

Semaine 17 – 27/02 – 03/03

MPSI, chapitres 1 à 11 – Révisions

12 Séries entières

1. Théorème d'approximation polynomiale de WEIERSTRASS.
2. Séries entières (variable réelle ou complexe). Lemme d'ABEL, rayon de convergence, règle de D'ALEMBERT. Relations de comparaison. Somme et produit de deux séries entières.
3. Convergence normale sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence. Continuité sur le disque ouvert de convergence.
4. Régularité dans le cas de la variable réelle, théorème d'ABEL radial. Intégration et dérivation. Fonctions développable en série entière (en 0), unicité du développement, caractérisation par le reste intégral (ou de LAGRANGE) dans la formule de TAYLOR.
5. Exemples et applications : fonction génératrice ($G_X(t) = \mathbf{E}(t^X)$), calculs des moments, fractions rationnelles, intégration/dérivation des fonctions développables en série entière, résolution d'équations différentielles. Calcul de $\sum P(n)z^n$ pour P dans $\mathbf{C}[X]$. Application au caractère C^∞ de fonctions définies par des quotients (comme $\frac{1 - \cos(x)}{x^2}$).

13 Théorème spectral

1. Endomorphismes auto-adjoints, théorème spectral. Caractérisation des projecteurs orthogonaux. Endomorphismes auto-adjoints définis positifs.
2. Matrices symétriques réelles. Théorème spectral. Matrice symétrique réelle (définie) positive.
3. Réduction des automorphismes orthogonaux. Rotations en dimension 3. Compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$.

14 Intégration

1. Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.
2. Théorème de convergence dominée pour les fonctions continues par morceaux (suites, séries, intégrales à paramètre). Application à la convergence normale dans L^1 , i.e. interversion $\sum_n \int_I f_n = \int_I \sum_n f_n$ quand la série $\sum_n \|f_n\|_1$ est convergente.
3. Intégrales à paramètre : continuité, dérivabilité en fonction du paramètre dans le cas où l'intégrande est dominé.
4. Exemples : fonction Γ , intégrale de GAUSS.
5. Application à la convergence bornée (sur un compact). Ce théorème est hors-programme.

Groupe de colles :

Interrogateur(trice) :

Nom	Énoncés
Note	Commentaires
Nom	Énoncés
Note	Commentaires
Nom	Énoncés
Note	Commentaires