Semaine 19 – 13/03 – 17/03

MPSI, chapitres 1 à 14 – Révisions

15 Géométrie différentielle

1. Connexité par arcs,théorème de Bolzano, fonctions continues à valeurs dans un ensemble discret.
2. Approximation par le calcul différentiel, notion de dérivée partielle, de plan tangent.
3. Différentiabilité (au sens de Fréchet) et interprétation en terme de développement limité. Exemples, matrice jacobienne, interprétation géométrique du gradient.
4. Opérations algébriques. Fonctions de classe C^1, théorème fondamental du calcul différentiel, formule de Leibniz. Théorème de Leibniz-Newton pour les différentielles. Fonctions à différentielle nulle.
5. Vecteurs tangents (sous-espace affine, sphère, graphe d'une fonction numérique). Plan tangent. Vecteurs tangents à une surface donnée par une équation.
6. Dérivées d'ordre supérieur, propriétés algébriques. Théorème de Schwarz pour les fonctions de classe C^2. Exemples d'équations aux dérivées partielles (très simples et, en cas de changement de variables, le retour aux variables d'origine n'est pas un attendu) : $x\dfrac{\partial f}{\partial y}-y\dfrac{\partial f}{\partial x}=2f$, $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=1$.
7. Points critiques, condition nécessaire d'extrémalité. Optimisation sous contrainte. Hessienne. Formule de Taylor-Young. Condition nécessaire pour un minimum ou un maximum. Condition suffisante. Cas $n=2$.

16 Aléatoire

1. Familles de variables aléatoires, loi conjointe, loi marginale, loi conditionnelle.
2. Indépendance. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ et X et Y sont dans $\mathcal{L}^1$, alors XY aussi. Covariance de variables dans $\mathcal{L}^2$. Variance d'une somme de variables indépendantes. Lemme des coalitions.
3. Existence de suites de variables aléatoires de lois données.
4. Fonction génératrice ($G_X(t)=\mathbf{E}\left(t^X\right)$) : somme de variables aléatoires. Exemples : lois de Bernoulli, binomiale, de Poisson, géométrique.
5. Loi faible des grands nombres. Utilisation des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour établir des inégalités de concentration.

17 Exponentielles (équations différentielles linéaires)

1. Équation différentielle linéaire : $x'=a(t)(x)+b(t)$ où $a\in C^0(I,\mathscr{L}(E))$ et $b\in C^0(I,E)$. Système différentiel linéaire $X'=A'(t)X+B(t)$. Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire.
2. Principe de superposition. Problème de Cauchy. Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire. Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n.
3. Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy (démonstration non exigible). Adaptation aux systèmes différentiels linéaires. Cas des équations scalaires d'ordre n. Cas des équations homogènes, dimension de l'espace des solutions. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.
4. Exponentielle de matrices semblables, spectre de $\exp(A)$. Continuité de l'exponentielle sur $\mathscr{L}(E)$, sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Exponentielle de la somme de deux endomorphismes, de deux matrices carrées, qui commutent.
5. Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants. Résolution du problème de Cauchy. Traduction matricielle. Pour les calculs explicites, on se borne aux deux cas suivants : A diagonalisable ou $n\leqslant 3$.

Groupe de colles : **Interrogateur(trice) :**

Nom Note	Énoncés Commentaires
Nom Note	Énoncés Commentaires
Nom Note	Énoncés Commentaires