

## Semaine 20 – 20/03 – 24/03

MPSI, chapitres 1 à 15 – Révisions

### 16 Aléatoire

1. Familles de variables aléatoires, loi conjointe, loi marginale, loi conditionnelle.
2. Indépendance. Si  $X \perp\!\!\!\perp Y$  et  $X$  et  $Y$  sont dans  $\mathcal{L}^1$ , alors  $XY$  aussi. Covariance de variables dans  $\mathcal{L}^2$ . Variance d'une somme de variables indépendantes. Lemme des coalitions.
3. Existence de suites de variables aléatoires de lois données.
4. Fonction génératrice ( $G_X(t) = \mathbf{E}(t^X)$ ) : somme de variables aléatoires. Exemples : lois de BERNOULLI, binomiale, de POISSON, géométrique.
5. Loi faible des grands nombres. Utilisation des inégalités de MARKOV et de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV pour établir des inégalités de concentration.

### 17 Exponentielles (équations différentielles linéaires)

1. Équation différentielle linéaire :  $x' = a(t)x + b(t)$  où  $a \in C^0(I, \mathcal{L}(E))$  et  $b \in C^0(I, E)$ . Système différentiel linéaire  $X' = A'(t)X + B(t)$ . Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire.
2. Principe de superposition. Problème de CAUCHY. Mise sous forme intégrale d'un problème de CAUCHY. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre  $n$  par un système différentiel linéaire. Problème de CAUCHY pour une équation linéaire scalaire d'ordre  $n$ .
3. Théorème de CAUCHY linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de CAUCHY (démonstration non exigible). Adaptation aux systèmes différentiels linéaires. Cas des équations scalaires d'ordre  $n$ . Cas des équations homogènes, dimension de l'espace des solutions. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.
4. Exponentielle de matrices semblables, spectre de  $\exp(A)$ . Continuité de l'exponentielle sur  $\mathcal{L}(E)$ , sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ . Exponentielle de la somme de deux endomorphismes, de deux matrices carrées, qui commutent.
5. Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants. Résolution du problème de CAUCHY. Traduction matricielle. Pour les calculs explicites, on se borne aux deux cas suivants :  $A$  diagonalisable ou  $n \leq 3$ .
6. Équations différentielles linéaires du second ordre. Méthode de variation des constantes. Wronskien de deux solutions d'une équation scalaire homogène. Caractérisation des bases de l'espace des solutions.
7. Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées :  $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ ,  $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ . Exemples de recherche de solutions développables en série entière.

### 18 Arithmétique

1. Intersection de sous-groupes, sous-groupe engendré par une partie, sous-groupes du groupe  $(\mathbf{Z}, +)$ .
2. Groupe  $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$ , générateurs. Groupe monogène, groupe cyclique. Groupe des racines  $n$ -ièmes de l'unité. Tout groupe monogène infini est isomorphe à  $(\mathbf{Z}, +)$ . Tout groupe monogène fini de cardinal  $n$  est isomorphe à  $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$ .
3. Ordre d'un élément. L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.
4. Produit fini d'anneaux. Idéal d'un anneau commutatif. Noyau d'un morphisme d'anneaux commutatifs. Idéal engendré par un élément, noté  $xA$ . Divisibilité dans un anneau commutatif intègre.
5. Idéaux de  $\mathbf{Z}$ . Définition du PGCD d'entiers relatifs en termes d'idéaux, relation de BÉZOUT.
6. Anneau  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ , inversibles de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Condition nécessaire et suffisante pour que  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  soit un corps. Notation  $\mathbf{F}_p$ . Théorème des restes chinois, extension à plus de deux facteurs, application aux systèmes de congruences et à la résolution de systèmes d'équations dans  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ .
7. Indicatrice d'EULER  $\varphi$ , calcul à l'aide de la décomposition de  $n$  en facteurs premiers. Théorème d'EULER. Lien avec le petit théorème de FERMAT

Groupe de colles :

Interrogateur(trice) :

Nom	Énoncés
Note	Commentaires
Nom	Énoncés
Note	Commentaires
Nom	Énoncés
Note	Commentaires