Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents, sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. Il est possible d'utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

L'épreuve comporte deux parties :

— Une première partie, composée d'**exercices**. Les candidats sont invités à consacrer au moins un tiers du temps de l'épreuve à cette partie en cherchant à traiter les cinq exercices numérotés 1, 2, 3, 4 et 5.

— Un problème à traiter **au choix** parmi deux proposés : le Problème 1, plutôt orienté « Algèbre et Géométrie » ou bien le Problème 2, plutôt orienté « Analyse et Probabilités ». **Le candidat devra indiquer clairement sur sa copie le problème qu'il choisit. Seul ce choix sera pris en compte dans l'évaluation.** Au moins la moitié du temps de l'épreuve devrait être consacrée à l'un de ces problèmes.

Le barème tient compte de cette répartition indicative du temps à accorder à chaque partie.

Exercices

Exercice 1

On note $\mathscr{C}^0([0,1])$ l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ et on le munit de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ définie par, pour toute $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$,

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|,\ x \in [0,1]\}.$$

On introduit, pour toute $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$, la fonction $T(f) : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par :

$$T(f) : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t & \text{si } x \in]0,1] \ ; \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On remarquera, et il n'est pas demandé de le justifier, que l'application T est linéaire.
On souhaite montrer que pour toute $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$, $(T^n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément.

1. Montrer, pour toute $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$, que $T(f) \in \mathscr{C}^0([0,1])$.

2. On rappelle que l'on définit $|||T|||$, lorsque cette quantité existe, par

$$|||T||| = \sup\{\|T(f)\|_\infty,\ f \in \mathscr{C}^0([0,1]) \text{ et } \|f\|_\infty \leqslant 1\}.$$

Montrer que T est continue et que

$$|||T||| \leqslant 1.$$

3. On se donne dans cette question $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$ puis un réel $\varepsilon > 0$.

a. Justifier l'existence de $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

b. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ \|T^n(f) - f(0)\|_\infty \leqslant \|T^n(P) - P(0)\|_\infty + 2\varepsilon.$$

c. Conclure alors que $(T^n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers $f(0)$.

Exercice 2

On se donne deux matrices A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ (avec n entier naturel non nul) et on se propose de montrer que A et B ont une valeur propre commune si et seulement s'il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ non nulle telle que $MA = BM$.

1. *Condition suffisante*
On suppose dans cette question que $MA = BM$ pour une certaine $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ non nulle.

a. Montrer, pour tout $P \in \mathbf{C}[X]$, que $MP(A) = P(B)M$.

b. En déduire que A et B ont une valeur propre commune.
On pourra appliquer le résultat précédent avec P égal au polynôme caractéristique de A.

2. *Condition nécessaire*
On suppose dans cette question que A et B ont une valeur propre commune λ.

a. Montrer que $\mathrm{Sp}({}^tA) = \mathrm{Sp}(A)$ (c'est-à-dire que ${}^tA$ et A ont mêmes valeurs propres).
Ainsi, il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ et $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ non nulles telles que

$${}^tAX = \lambda X \quad \textit{et} \quad BY = \lambda Y.$$

b. À l'aide de X et de Y, construire M non nulle telle que $MA = BM$.

Exercice 3

On considère $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{R}^n$ (avec n entier naturel non nul) et C une partie convexe compacte non vide de $\mathbf{R}^n$.
On rappelle que $f : C \to C$ est dite K-lipschitzienne (avec $K \in \mathbf{R}^+$) si

$$\forall\,(x,y) \in C^2,\ \|f(y) - f(x)\| \leqslant K\|y - x\|,$$

et contractante si elle est K-lipschitzienne pour un certain $K \in [0,1[$.
On se donne $f : C \to C$ 1-lipschitzienne et on veut montrer que f admet un point fixe.
Pour cela, on fixe $x_0 \in C$ et on pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n : C \to C$ définie par :

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{n}x_0 + \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)f(x).$$

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, que f_n est bien définie et qu'elle admet un unique point fixe x_n. *On montrera que f_n est contractante, et on énoncera précisément le théorème utilisé.*

2. En déduire que f admet un point fixe.

3. Ce résultat reste-t-il vrai si on ne suppose plus C compacte ? si on ne suppose plus C convexe ?

Exercice 4

On se donne P et Q dans $\mathbf{Z}[X]$ premiers entre eux dans $\mathbf{Q}[X]$ et on pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = P(n) \wedge Q(n)$$

où la notation $x \wedge y$ désigne le plus grand commun diviseur de x et y. Le but de l'exercice est de montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est périodique.

1. Montrer qu'il existe $d \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n divise d.
On pourra utiliser le théorème de Bézout.

2. Montrer, pour tous $R \in \mathbf{Z}[X]$ et $n \in \mathbf{N}$, que $R(n+d) - R(n)$ est divisible par d.

3. Conclure.

Exercice 5

On se donne $p \in]0, \frac{1}{2}[$ et on suppose que $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes valant 1 ou -1 avec probabilité respectivement p et $1-p$.
On pose alors $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

1. Montrer qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $p\mathrm{e}^{t_0} + (1-p)\mathrm{e}^{-t_0} < 1$.

2. Montrer qu'il existe α et β dans $]0,1[$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ \forall\, k \in \mathbf{Z},\ P(S_n \geqslant k) \leqslant \alpha^k \beta^n.$$

On pourra remarquer que $\forall\, t > 0,\ S_n \geqslant k \Leftrightarrow \mathrm{e}^{tS_n} \geqslant \mathrm{e}^{tk}$.

3. Montrer que S_n tend vers $-\infty$ presque sûrement quand $n \to \infty$.

Problème d'algèbre et géométrie

Étant donné un entier $d \geqslant 2$, on considère $D : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ défini par

$$D : (a_1, \ldots, a_d) \longmapsto (|a_2 - a_1|, \ldots, |a_d - a_{d-1}|, |a_1 - a_d|).$$

Quitte à indexer les d-uplets modulo d, on peut écrire :

$$D : (a_k)_{k \in \{1,\ldots,d\}} \longmapsto (|a_{k+1} - a_k|)_{k \in \{1,\ldots,d\}}.$$

On appelle *suite de Ducci* les suites $(D^n(a))_{n \in \mathbf{N}}$ pour $a \in \mathbf{R}^d$ (où $D^n = D \circ \cdots \circ D$). Le but de ce problème est d'étudier ces suites.

Plus précisément, on se propose de montrer qu'elles stationnent à 0 quel que soit $a \in \mathbf{Z}^d$ si et seulement si d est une puissance de 2, d'étendre ce résultat quand $a \in \mathbf{R}^d$ et d'étudier le cas où d n'est pas une puissance de 2.

Pour cela, on considère $\Delta : (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d \to (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d$ défini par

$$\Delta : (\alpha_1, \ldots, \alpha_2) \longmapsto (\alpha_1 + \alpha_2, \ldots, \alpha_{d-1} + \alpha_d, \alpha_d + \alpha_1),$$

ce qu'on pourra également écrire :

$$\Delta : (\alpha_k)_{k \in \{1,\ldots,d\}} \longmapsto (\alpha_k + \alpha_{k+1})_{k \in \{1,\ldots,d\}}$$

On remarquera que Δ est linéaire et a pour matrice dans la base canonique $\overline{I}_d + \overline{J}_d$ où I_d désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_d(\mathbf{R})$,

$$J_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_d(\mathbf{R}),$$

$\overline{n}$ désigne la classe de $n \in \mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $\overline{a}$ celle de $a \in \mathbf{Z}^d$ dans $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d$ et $\overline{A}$ celle de $A \in \mathscr{M}_d(\mathbf{Z})$ dans $\mathscr{M}_d(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Enfin, pour tout $a \in \mathbf{R}^d$, on note

$$\|a\|_\infty = \max\{|a_1|, \ldots, |a_d|\}.$$

I. Étude du cas entier

1. Préliminaires
Justifier, pour tout $a \in \mathbf{R}_+^d$, que $\|D(a)\|_\infty \leqslant \|a\|_\infty$.
On montre alors par récurrence, et il n'est pas demandé de le faire, que

$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ \|D^n(a)\|_\infty \leqslant \|a\|_\infty.$$

2. Justifier, pour toutes A et B dans $\mathscr{M}_d(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ telles que $AB = BA$, que

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2,$$

et en déduire une expression, pour tout $n \in \mathbf{N}$, de $(A+B)^{2^n}$.

3. Justifier, pour tout $a \in \mathbf{Z}^d$, que
$$\overline{D(a)} = \Delta(\overline{a}).$$
On montre alors par récurrence, et il n'est pas demandé de le faire, que
$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ \overline{D^n(a)} = \Delta^n(\overline{a}).$$

4. On suppose dans cette question que $d = 2^k$ avec $k \in \mathbf{N}^*$.
On se donne $a \in \mathbf{Z}^d$ et on veut montrer qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $D^n(a) = 0_{\mathbf{R}^d}$.

a. Montrer que pour tout $b \in \mathbf{Z}^d$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $D^n(b)$ a toutes ses coordonnées paires.

b. En déduire que pour tout $p \in \mathbf{N}$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $D^n(a)$ a toutes ses coordonnées divisibles par 2^p. *On rédigera une récurrence soignée, en précisant bien son hypothèse.*

c. Conclure.

5. Déterminer, pour tout entier $d \geqslant 2$, le polynôme minimal de $\overline{J}_d$.

6. On suppose dans cette question que $d = 2^k m$ avec $k \in \mathbf{N}^*$ et $m \geqslant 3$ impair.

a. Montrer que Δ n'est pas nilpotente. [*On pourra supposer* Δ *nilpotente et aboutir à une absurdité en montrant que* $(X^{2^k} + \overline{1})^m = X^d + \overline{1}$.]

b. Montrer alors qu'il existe $\alpha \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d$ tel que
$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ \Delta^n(\alpha) \neq 0_{(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d},$$
puis qu'il existe $a \in \mathbf{Z}^d$ tel que
$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ D^n(a) \neq 0_{\mathbf{R}^d}.$$

II. Étude des longueurs

Pour tout $a \in \mathbf{R}^d$, on note $\Lambda(a)$ le plus petit $n \in \mathbf{N}$, s'il existe, tel que $D^n(a) = 0_{\mathbf{R}^d}$ et on l'appelle *longueur* de a. Dans le cas contraire, on pose $\Lambda(a) = +\infty$.
On suppose désormais dans cette partie que $d = 2^k$ avec $k \in \mathbf{N}^*$. Ainsi, d'après la partie précédente, tout $a \in \mathbf{Z}^d$ est de longueur finie.
On dit que $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ est K*-lipschitzienne* si
$$\forall\, (x,y) \in (\mathbf{R}^d)^2,\ \|f(y) - f(x)\|_\infty \leqslant K\|y - x\|_\infty,$$
et *lipschitzienne* s'il existe un réel K tel que f est K-lipschitzienne. On remarquera qu'une fonction lipschitzienne est continue.

7. Déterminer le plus petit réel K tel que D est K-lipschitzienne.

8. *Exemple d'une longueur infinie*
On pose
$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_d(\mathbf{R})$$

et

$$Q = \det(XI - C).$$

a. Calculer Q.

b. Justifier que $Q(0) = 0$, $Q'(0) < 0$ et $Q(1) > 0$.
En déduire qu'il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $Q(\lambda) = 0$.

c. Montrer qu'il existe un vecteur propre $u \in \mathbf{R}^d$ de C à coordonnées positives.

d. On fixe dans cette question un vecteur $u \in \mathbf{R}^d$ donné par la question précédente.
Montrer que u est de longueur infinie.

9. *Application*
Montrer que les longueurs des vecteurs à coordonnées entières ne sont pas uniformément bornées, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'entier N tel que

$$\forall\, a \in \mathbf{Z}^d,\ \Lambda(a) \leqslant N.$$

III. Étude du cas réel

10. *Lemme fondamental*
On se donne un entier $d \geqslant 2$ et $a \in \mathbf{R}_+^d$. On suppose que la suite $(\|D^n(a)\|_\infty)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante égale à $c > 0$. Montrer que

$$a \in \{0, c\}^d.$$

11. On suppose dans cette question que $d = 2^k$ avec $k \in \mathbf{N}^*$. On se donne $a \in \mathbf{R}^d$ et on se propose de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \|D^n(a)\|_\infty = 0.$$

a. Justifier que la suite $(\|D^n(a)\|_\infty)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

b. Soit $v \in \mathbf{R}^d$ une valeur d'adhérence de $(D^n(a))_{n\in\mathbf{N}}$.

i. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \|D^n(a)\|_\infty = \|v\|_\infty.$$

ii. En déduire que

$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ \|D^n(v)\|_\infty = \|v\|_\infty.$$

iii. Montrer alors que $v = 0_{\mathbf{R}^d}$.

c. Conclure.

IV. Étude des périodes

Pour tout $a \in \mathbf{R}^d$, si la suite $(D^n(a))_{n\in\mathbf{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang, on dit qu'un entier $n \geqslant 1$ est *une* période de a si

$$\exists\, r \in \mathbf{N},\ D^{r+n}(a) = D^r(a)$$

ou, de façon équivalente, si

$$\exists\, r \in \mathbf{N},\ \forall\, k \geqslant r,\ D^{k+n}(a) = D^k(a).$$

On note alors $\tau(a)$ la plus période de a et on l'appelle *la* période de a. Dans le cas contraire, on pose $\tau(a) = +\infty$.
On suppose désormais dans cette partie que $d = 2^k m$ avec $k \in \mathbf{N}^*$ et $m \geqslant 3$ impair. On se propose de montrer que les vecteurs à coordonnées entières ont des périodes finies, uniformément bornées, et d'étudier la plus grande d'entre elles. Pour cela, on note $(e_1^d, \ldots, e_d^d)$ la base canonique de $\mathbf{R}^d$ ($(\overline{e}_1^d, \ldots, \overline{e}_d^d)$ celle de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d$), et

$$T_d = \tau(e_1^d).$$

12. Soit $a \in \mathbf{Z}^d$.

a. Justifier que $(D^n(a))_{n\in\mathbf{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.
Ainsi, $\tau(a) < +\infty$.

b. Montrer qu'il existe $n \in \mathbf{N}$, $c \in \mathbf{N}^*$ et $v \in \{0,1\}^d$ tels que $D^n(a) = cv$.
Ainsi, $\tau(a) = \tau(v)$.

c. Justifier, pour tout $u \in \{0,1\}^d$, qu'un entier $n \geqslant 1$ est une période de u si et seulement si

$$\exists\, r \in \mathbf{N},\ \Delta^{r+n}(\overline{u}) = \Delta^r(\overline{u}).$$

d. En déduire que $\tau(a)$ divise T_d.
Ainsi, T_d est la plus grande période des éléments de $\mathbf{Z}^d$.

13. On se donne dans cette question un entier $q \geqslant 3$. On note $(X^q + \overline{1})$ l'idéal principal engendré par $X^q + \overline{1}$ dans $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})[X]$ et on pose

$$E_q = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})[X]/(X^q + \overline{1}).$$

On note $\overline{P}$ la classe de $P \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})[X]$ dans E_q et on définit $\Phi_q : E_q \to E_q$ par

$$\Phi_q : \overline{P} \longmapsto (\overline{X} + \overline{1})\overline{P}.$$

a. Montrer que $(\overline{X}^{q-1}, \ldots, \overline{X}, \overline{1})$ est une base de E_q, que l'on note $\mathscr{B}_q$.

b. Déterminer la matrice de Φ_q dans la base $\mathscr{B}_q$.

c. En déduire qu'un entier $n \geqslant 1$ est une période de e_1^q si et seulement si

$$\exists\, r \in \mathbf{N},\ X^q + \overline{1} \mid ((X + \overline{1})^{r+n} - (X + \overline{1})^r)$$

où la notation $P \mid Q$ signifie que P divise Q (dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}[X]$).

14. *Application*

a. On suppose dans cette question qu'un entier $n \geqslant 1$ est une période de e_1^d. En utilisant la question précédente, montrer que $2n$ est une période de e_1^{2d}.

b. Réciproquement, on suppose dans cette question qu'un entier $p \geqslant 1$ est une période de e_1^{2d}. On souhaite alors montrer que p est pair et, en notant $n = p/2$, que n est une période de e_1^d.

i. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}[X]$ et r un entier naturel pair tels que

$$(X^m + \overline{1})^{2^{k+1}} Q = (X + \overline{1})^{r+n} - (X + \overline{1})^r.$$

ii. Supposer que p est impair et aboutir à une absurdité. [*On pourra dériver la relation précédente puis montrer que* $X^m + \overline{1} = (X + \overline{1})^m$.]

iii. En notant $n = p/2$, montrer que n est une période de e_1^d.

On en déduit alors, et il n'est pas demandé de le rédiger, que $T_{2d} = 2T_d$. En itérant ce résultat, on obtient :

$$T_{2^k m} = 2^k T_m,$$

ce qui permet de ramener le calcul de T_d à celui de T_m.

15. *Étude de T_m*
On suppose désormais que $k = 0$, c'est-à-dire que $d = m$ (avec m impair et $m \geqslant 3$). On pose

$$H_m = I_m + J_m.$$

a. Montrer que T_m est le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que

$$\exists\, r \in \mathbf{N},\ \overline{H}_m^{r+n} = \overline{H}_m^{r}.$$

b. Justifier l'existence d'un sur-corps K de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ dans lequel $X^m + \overline{1}$ est scindé.

c. Montrer alors que $\overline{H}_m$ est diagonalisable dans K.

d. *Une première expression*
Déduire des résultats précédents que

$$T_m = \min\{n \in \mathbf{N}^* \mid \overline{H}_m^{n+1} = \overline{H}_m\}.$$

e. *Une deuxième expression*
On considère la forme linéaire $f : (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^m \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ définie par

$$f : (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \mapsto \alpha_1 + \cdots + \alpha_m.$$

i. Montrer que

$$\mathrm{Im}\Delta = \mathrm{Ker} f.$$

ii. Donner une base de $\mathrm{Ker}\Delta$.

iii. En déduire que Δ induit un endomorphisme de $\mathrm{Ker} f$, et que cet endomorphisme est un isomorphisme, que l'on note $\hat{\Delta}$.

iv. On pose $\varepsilon_1^m = \overline{e}_1^m + \overline{e}_2^m, \ldots, \varepsilon_{m-1}^m = \overline{e}_{m-1}^m + \overline{e}_m^m$. Montrer que $(\varepsilon_1^m, \ldots, \varepsilon_{m-1}^m)$ est une base de $\mathrm{Ker} f$, et déterminer la matrice Γ_m de $\hat{\Delta}$ dans cette base.

v. Montrer enfin que

$$T_m = \mathrm{ord}(\Gamma_m),$$

où $\mathrm{ord}(\Gamma_m)$ désigne l'ordre de Γ_m en tant qu'élément du groupe multiplicatif $\mathrm{GL}_{m-1}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

Problème d'analyse et probabilités

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble $\mathbf{R}^{\mathbf{N}^*}$ des suites réelles indexées par $\mathbf{N}^*$. On s'intéresse dans ce problème aux fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui, pour une certaine suite $r \in \mathscr{S}$, vérifient la propriété suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(x + \frac{k}{n}\Big) = r_n f(nx). \qquad (\mathscr{R}_r)$$

On dit alors que r est une *résolvante* de f. On désigne par $\mathscr{E}_r$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vérifiant $(\mathscr{R}_r)$.
On remarquera, et on pourra l'utiliser sans justification, que $\mathscr{E}_r$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
On note également $\mathscr{E}$ l'ensemble des $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pour lesquelles il existe $r \in \mathscr{S}$ telle que f vérifie $(\mathscr{R}_r)$. On se propose ici d'étudier quelques propriétés de $\mathscr{E}$. On déterminera notamment les éléments de $\mathscr{E}$ qui sont $\mathscr{C}^\infty$.

I. Quelques exemples et premières propriétés

1. On se donne dans cette question f dans $\mathscr{E}$ non identiquement nulle. Montrer que f a une unique résolvante r et que $r_1 = 1$.

2. Montrer que les fonctions constantes sont dans $\mathscr{E}$ et déterminer les réels c tels que $x \mapsto x+c$ est dans $\mathscr{E}$.

3. L'ensemble $\mathscr{E}$ est-il un $\mathbf{R}$-espace vectoriel ?

4. Soient $C : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $S : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définies par :

$$C : x \mapsto \cos(2\pi x) \quad \text{et} \quad S : x \mapsto \sin(2\pi x).$$

Montrer que les fonctions C et S sont dans $\mathscr{E}$ et en préciser les résolvantes.

5. *Exemple de solution continue non dérivable*
Soit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\varphi : x \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \sin(2^{j+1}\pi x).$$

a. Justifier que φ est bien définie et continue.

b. Montrer que φ est dans $\mathscr{E}$ et en préciser la résolvante.

c. Montrer enfin que φ n'est pas dérivable. [*On pourra étudier $2^k\varphi(2^{-k})$ pour $k \in \mathbf{N}$.*]

6. On se donne dans cette question f dans $\mathscr{E}$ dérivable et non constante. Montrer que f' est dans $\mathscr{E}$ et en préciser la résolvante.

7. *Exemple de solution non continue*
Soit $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\psi : x \mapsto \lfloor x \rfloor$$

(où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x).

a. Montrer que ψ est dans $\mathscr{E}$ et en préciser la résolvante.

b. *Dans cette question seulement, on étend la relation $(\mathscr{R}_r)$ aux distributions.* Déterminer la dérivée ψ' de ψ et une suite r telle que ψ' vérifie $(\mathscr{R}_r)$.

II. Étude des solutions $\mathscr{C}^\infty$ et 1-périodiques

On rappelle que si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ et 2π-périodique, alors, pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \mathrm{e}^{-\imath n t} \mathrm{d}t$$

est le n-ième coefficient de Fourier de f.

8. *Préliminaires*
On se donne dans cette question $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ et 2π-périodique.

a. Calculer $c_n(f^{(k)})$ pour tous $n \in \mathbf{Z}$ et $k \in \mathbf{N}$. *On exprimera le résultat en fonction de $c_n(f)$.*

b. En déduire, pour tout $k \in \mathbf{N}$, que $\lim_{n\to\infty} n^k c_n(f) = 0$.

9. On se donne dans cette question f dans $\mathscr{E}$. On suppose que f est $\mathscr{C}^\infty$, 1-périodique et non constante, et on note r sa résolvante. On définit $\tilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par :

$$\tilde{f} : x \mapsto f(\frac{x}{2\pi}).$$

On remarque alors que $\tilde{f}$ est 2π-périodique et on pose

$$c_n = c_n(\tilde{f}).$$

a. Montrer que pour tous $p \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}^*$,

$$n c_{pn} = r_n c_p.$$

b. Montrer que $c_1 \neq 0$.

c. On se donne dans cette question un entier $q \geqslant 2$. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ c_{q^n} = c_1 \Big(\frac{c_q}{c_1}\Big)^n,$$

et en déduire que $c_q = 0$.

10. Déterminer enfin les éléments de $\mathscr{E}$ qui sont $\mathscr{C}^\infty$ et 1-périodiques.

III. Polynômes de Bernoulli

11. Montrer, pour toute $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue et tout réel t, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{t}{n} + \frac{k}{n}\Big) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

12. En déduire, pour toute f dans $\mathscr{E}$ continue et non constante, que

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

13. On se donne dans cette question f dans $\mathscr{E}$ continue, non identiquement nulle, de résolvante r.

a. Justifier l'existence d'une unique $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $\mathscr{C}^1$ telle que $F' = f$ et $\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x = 0$.

On définit alors, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $G_n, H_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par :

$$G_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} F\Big(x + \frac{k}{n}\Big) \quad \textit{et} \quad H_n : x \mapsto F(nx).$$

b. Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} G_n(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} H_n(x)\mathrm{d}x$.

c. En déduire que F est dans $\mathscr{E}$ et en préciser la résolvante.

Ainsi, on peut définir une suite $(B_p)_{p\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{E}$ par :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \ ; \\ \forall\, p \in \mathbb{N}^*, \ B_p' = pB_{p-1} \text{ et } \int_0^1 B_p(x)\mathrm{d}x = 0. \end{cases}$$

On remarquera que c'est une suite de polynômes, appelés polynômes de Bernoulli.

14. Déterminer, pour tout $p \in \mathbf{N}$, le degré, le coefficient dominant et la résolvante de B_p.

IV. Étude des solutions $\mathscr{C}^\infty$ et non 1-périodiques

On définit, pour toute $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\Delta(f) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par :

$$\Delta(f) : x \longmapsto f(x+1) - f(x).$$

15. On se donne dans cette question $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme réel de degré $p \geqslant 1$. Calculer le degré et le coefficient dominant de $\Delta(P)$.

16. On se donne dans cette question f dans $\mathscr{E}$ continue, de résolvante r. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad r_n(\Delta(f))(nx) = (\Delta(f))(x).$$

17. On se donne dans cette question $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $\mathscr{C}^\infty$ et on suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \ \alpha g(2x) = g(x).$$

a. Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \ \forall\, k \in \mathbb{N}, \ \alpha^k g(x) = g\Big(\frac{x}{2^k}\Big).$$

b. Montrer, si $|\alpha| > 1$, que g est nulle.

c. On suppose dans cette question que $0 < |\alpha| \leqslant 1$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $g^{(p)}$ est nulle.

d. En déduire enfin que g est polynomiale.

18. On se donne dans cette question f dans $\mathscr{E}$. On suppose que f est $\mathscr{C}^\infty$, non 1-périodique, et on note r sa résolvante.

a. Montrer que $\Delta(f)$ est une fonction polynomiale non identiquement nulle. *On note alors q son degré.*

b. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \ r_n = \frac{1}{n^q}$$

et qu'il existe $a \in \mathbf{R}^*$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ (\Delta(f))(x) = ax^q.$$

c. En déduire, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ (\Delta(B_p))(x) = px^{p-1}.$$

d. Montrer alors qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}^*$ et $p \in \mathbf{N}^*$ tels que $f - \lambda B_p$ est dans $\mathscr{E}$, $\mathscr{C}^\infty$ et 1-périodique, et en préciser une résolvante.

19. Déterminer enfin les éléments de $\mathscr{E}$ qui sont $\mathscr{C}^\infty$ et non 1-périodiques.

V. Étude des solutions L^1

On rappelle que si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est dans L^1, sa transformée de Fourier est $\widehat{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ définie par :

$$\widehat{f} : \xi \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\imath\pi x\xi}\mathrm{d}x.$$

20. Rappeler, pour toute $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ élément de L^1, pourquoi $\widehat{f}$ est bornée et continue.

21. On se donne une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ intégrable et on définit, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $g_n, h_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par :

$$g_n : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(x + \frac{k}{n}\Big) \quad \text{et} \quad h_n : x \longmapsto f(nx).$$

a. Calculer, pour tous $\xi \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, $\widehat{g}_n(\xi)$ et $\widehat{h}_n(\xi)$. *On exprimera les résultats en fonction de $\widehat{f}(\xi)$.*

b. Calculer, pour tous $\xi \in \mathbf{R}$, les limites de $\frac{1}{n}\widehat{g}_n(\xi)$ et $n\widehat{h}_n(\xi)$ quand $n \to \infty$.

22. On se donne dans cette question f dans $\mathscr{E}$ de résolvante r, et on suppose que f est L^1. On suppose également que $\|\widehat{f}\|_\infty \neq 0$.

a. Montrer que $\widehat{f}(0) = 0$.

b. Montrer que $\forall\, n \in \mathbf{N}^*,\ |r_n| \leqslant n^2$.

c. Aboutir à une absurdité.

Ainsi, si f est dans $\mathscr{E}$ et dans L^1, alors $\widehat{f} = 0$: on peut ensuite déduire des propriétés de la transformation de Fourier, et il n'est pas demandé de le faire, que f est nulle presque partout.

23. Donner un exemple de fonction qui est élément de $\mathscr{E}$, et de L^1 et non identiquement nulle (on notera que cette fonction est nécessairement nulle presque partout, en vertu de la remarque précédente). [*On pourra s'inspirer de la question 7.(b).*]