On définit la suite de polynômes $(H_k)_{k\in\mathbf{N}}$ par $H_0 = 1$ et pour tout entier naturel k,

$$H_k = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!} .$$

Dans le problème n et k désignent des entiers naturels, $\mathbf{R}[X]$ (resp. $\mathbf{R}_n[X]$) désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels (resp. de degré inférieur ou égal à n).

PARTIE I

I.1) a) Démontrer que pour tout entier relatif x, $H_k(x)$ est aussi un entier relatif.

b) Calculer $H_k(k)$, $H_k(-1)$ et $H_k'(0)$.

c) Démontrer, pour k non nul, $kH_k = (X-k+1)H_{k-1}$.

d) Démontrer que $(H_k)_{0\le k\le n}$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

I.2) On considère l'application Δ de $\mathbf{R}[X]$ dans lui-même donnée par $\Delta(P) = P(X+1) - P$.

a) Justifier que Δ est linéaire et déterminer son noyau. Comparer $\Delta(P')$ et $\Delta(P)'$.

b) Démontrer, pour $n \neq 0$: $\Delta(H_n) = H_{n-1}$.

c) Démontrer, pour tout polynôme P dans $\mathbf{R}_n[X]$: $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0)H_k$, où Δ^k est défini par $\Delta^0 = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}[X]}$ et $\Delta^{k+1} = \Delta \circ \Delta^k$.

d) Établir la formule, pour $k \neq 0$, $H_k' = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-1-i}}{k-i} H_i$.

I.3) Soit P dans $\mathbf{R}_n[X]$. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout entier relatif x, $P(x)$ est un entier relatif.

(ii) Il existe $n+1$ entiers relatifs consécutifs x_0, x_1, …, x_n tels que $P(x_0)$, $P(x_1)$, …, $P(x_n)$ soient des entiers relatifs.

(iii) Il existe des entiers relatifs a_0, a_1, …, a_n tels que $P = a_0 + a_1H_1 + \cdots + a_nH_n$.

I.4) Application. On cherche un polynôme P de degré inférieur ou égal à 4 vérifiant $P(0) = 7$, $P(1) = 87$, $P(2) = -143$, $P(3) = -2453$ et $P(4) = -9897$.

a) Sous réserve d'existence, calculer $\Delta^k P(0)$ pour $0 \le k \le 4$. On pourra utiliser la table des différences finies suivante

x	$\Delta^0 P$	$\Delta^1 P$	$\Delta^2 P$	$\Delta^3 P$	$\Delta^4 P$
0					
1					
2					
3					
4					

b) Démontrer qu'un tel polynôme existe et est unique puis déterminer P.

c) Généralisation : écrire en `Python` une fonction renvoyant les coordonnées d'un polynôme Q de $\mathbf{R}_n[X]$ dans la base $(H_k)_{0\le k\le n}$ et prenant $[Q(0), \ldots, Q(n)]$ en entrée.

PARTIE II

Dans cette partie f désigne une fonction définie sur $[d;+\infty[$, avec d négatif, et à valeurs dans $\mathbf{R}$.

II.1) Démontrer que l'on peut définir par récurrence une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de la façon suivante : on pose $a_0 = f(0)$ et $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ étant supposés construits, on définit a_n comme étant l'unique réel a tel que la fonction $x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k H_k(x) - aH_n(x)$ s'annule au point n.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ainsi définie sera dite suite associée à la fonction f.

II.2) Démontrer que la fonction $x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(x)$ s'annule sur $[\![0;n]\!]$.

II.3) Soit b dans $\mathbf{R}_+^*$; montrer que la suite associée à la fonction $x \mapsto b^x$ est la suite $((b-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec la convention $(b-1)^0 = 1$ dans tous les cas.

II.4) On suppose dans cette question que f est de classe C^∞ sur $[d;+\infty[$. Soit x dans $[d;+\infty[$. On se propose de démontrer qu'il existe un réel θ, dépendant de x et n, vérifiant $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(x) + H_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\theta)$.

a) Le démontrer pour x dans $[\![0;n]\!]$.

b) On suppose désormais que x n'appartient pas à $[\![0;n]\!]$. Démontrer que l'on peut déterminer un réel A tel que la fonction $t \mapsto f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(t) - AH_{n+1}(t)$ s'annule pour t dans $\{0,\ldots,n,x\}$.
Conclure.

PARTIE III

III.1) a) Démontrer que, pour $n \neq 0$, il existe un unique polynôme B_n tel que $\Delta B_n = nX^{n-1}$ et $\int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

b) Démontrer, pour $n \geq 2$, $B_n(1) = B_n(0)$.

c) Déterminer B_1 et B_2.

III.2) a) En considérant $P = B_n' - nB_{n-1}$, démontrer pour $n \geq 2$, $B_n' = nB_{n-1}$.

b) Calculer B_3 et B_4.

III.3) a) Démontrer, pour $n \neq 0$, $\forall p \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} k^{p-1} = \dfrac{1}{p}\,(B_p(n) - B_p(0))$.

b) Déduire de l'expression précédente la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k^3$.

III.4) a) Démontrer, par unicité des expressions B_n, qu'on a pour $n \neq 0$, $B_n = (-1)^n B_n(1-X)$.

b) Démontrer que, si n est un entier impair, $B_n(1/2) = 0$ et, si n est de plus supérieur à 3, $B_n(0) = B_n(1) = 0$.

III.5) a) Démontrer pour $n \neq 0$,

$$B_n = 2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{X}{2}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right).$$

b) Démontrer que, si n est un entier pair non nul, $B_n(1/2) = (2^{1-n} - 1)B_n(0)$.

III.6) a) On pose, pour n non nul, $b_n = B_n(0)$, et $b_0 = 1$. Démontrer pour $n \neq 0$,

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$$

et en déduire une expression pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^p$ (p entier).

b) En déduire $\forall p \in \mathbf{N}$, $b_{2p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} b_k$.

c) Démontrer qu'on a $\forall p \geq 2$, $b_{2p} = -\dfrac{2}{(2p+1)(2p+2)} \displaystyle\sum_{k=0}^{2p-2} \binom{2p+2}{k} b_k$ et en conclure que la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de nombres rationnels.

d) Calculer b_{14}.

e) Question subsidiaire : pourquoi avoir noté ces nombres b ?

Deuxième composition de mathématiques – CAPES Agricole 2002

PARTIE I

I.1) a) Soit x un entier relatif. Si x est supérieur à k, on a $H_k(x) = \binom{x}{k}$. Si x est strictement négatif, on a $H_k(x) = (-1)^k\binom{-x+k-1}{k}$. Enfin si x est compris entre 0 et $k-1$, $H_k(x)$ est nul. Par conséquent $\boxed{H_k(x) \text{ est un entier relatif.}}$

b) Si k est nul, $H_0 = 1$ et on a $\boxed{H_0(0) = H_0(-1) = 1 \text{ et } H_0'(0) = 0.}$ Sinon, d'après les formules précédentes, on a $\boxed{H_k(k) = 1}$ et $\boxed{H_k(-1) = (-1)^k}$. De plus $H_k(0) = 0$ et donc $H_k'(0)$ est la limite de $H_k(x)/x$ lorsque x tend vers 0, à savoir $\boxed{H_k'(0) = (-1)^{k-1}/k.}$

c) On a $H_1 = XH_0$ et pour $k \geq 2$

$$kH_k(X) = \frac{1}{(k-1)!}X(X-1)\dots(X-k+1) = (X-k+1)H_{k-1}(X)\,,$$

i.e. $\boxed{kH_k(X) = (X-k+1)H_{k-1}(X).}$

d) La famille $(H_k)_{0\leq k\leq n}$ étant échelonnée en degrés, de 0 à n, elle forme une $\boxed{\text{base de } \mathbf{R}_n[X].}$

I.2) a) L'opérateur de translation de 1 étant linéaire, Δ est différence de deux applications linéaires et est donc elle aussi une $\boxed{\text{application linéaire}}$.
Soit P un polynôme dans $\mathbf{R}[X]$ tel que $\Delta(P) = 0$. En particulier le polynôme $P - P(0)$ s'annule sur $\mathbf{Z}$ et donc est identiquement nul. Il en résulte que P est constant. Réciproquement si P est un polynôme constant, il est dans le noyau de Δ. Par conséquent le noyau de Δ est formé des $\boxed{\text{polynômes constants.}}$
La dérivation commutant à la translation, elle commute à Δ. Autrement dit, si P est dans $\mathbf{R}[X]$, on a $\boxed{(\Delta(P))' = \Delta(P').}$

b) On a $\Delta(H_1) = X + 1 - X = H_0$ et, pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}\Delta(H_n) &= \frac{(X+1)\Big(X\dots(X-n+2)\Big) - \Big(X\dots(X-n+2)\Big)(X-n+1)}{n!}\\ &= (X+1-X+n-1)\frac{X\dots(X-n+2)}{n!}\,,\end{aligned}$$

i.e. $\boxed{\Delta(H_n) = H_{n-1}.}$

c) Par linéarité, il suffit de vérifier la formule demandée sur une base de $\mathbf{R}_n[X]$ et donc sur les polynômes $(H_m)_{0\leq m\leq n}$. Or pour m et k dans $[\![0;n]\!]$, on a $\Delta^k(H_m) = H_{m-k}$, si $k \leq m$ et d'après ce qui précède, ou $\Delta^k(H_m) = 0$ sinon car H_0 est dans le noyau de Δ d'après I.2.a). Comme 0 est racine de tous les polynômes H_m sauf H_0, il vient $\Delta^k(H_m)(0) = 0$ sauf si $m = k$ auquel cas $\Delta^m(H_m) = 1$. La formule en résulte dans ce cas et donc dans le cas général : $\boxed{P = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0)H_k.}$

d) Soit k un entier naturel non nul et i un entier compris entre 0 et $k-1$. On a, d'après I.2.a, I.2.b et I.1.b,

$$\Delta^i(H_k')(0) = \left(\Delta^i(H_k)\right)'(0) = H_{k-i}'(0) = \frac{(-1)^{k-i-1}}{k-i}$$

et donc, d'après I.2.c et puisque H_k' est de degré $k-1$,

$$\boxed{H_k' = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-1-i}}{k-i} H_i\ .}$$

I.3) Si (i) est vraie, alors (ii) l'est en prenant x_0 arbitraire.

Si (ii) est vraie, soit x_0 tel que $P(x_0)$, $P(x_0+1)$, $\ldots$, $P(x_0+n)$ soient tous entiers relatifs. On pose $Q = P(x_0+X)$. D'après la formule du binôme de Newton Q est un polynôme à coefficients réels et, par hypothèse, il prend des valeurs entières sur $[\![0;n]\!]$. L'ensemble des entiers étant stable par différence, il en va de même pour $\Delta(P)$ sur $[\![0;n-1]\!]$ et aussi, par récurrence immédiate, pour $\Delta^k(P)$ sur $[\![0;n-k]\!]$ pour $0 \leq k \leq n$. En particulier $\Delta^0(Q)(0)$, $\Delta^1(Q)(0)$, $\ldots$, $\Delta^n(Q)(0)$ sont des entiers et la formule I.2.c assure que Q est combinaison linéaire entière de H_0, H_1, $\ldots$, H_n. En particulier Q, et donc aussi P par translation, prend des valeurs entières sur $\mathbf{Z}$. Il en résulte qu'on peut choisir $x_0 = 0$. Dans ce cas $Q = P$ et on en déduit que (iii) est vraie.

Enfin, si (iii) est vraie, (i) l'est aussi d'après I.1.a.

Il en résulte que les trois conditions $\boxed{(i),\ (ii) \text{ et } (iii) \text{ sont équivalentes.}}$

I.4) a) On remplit successivement la table des différences finies

x	$\Delta^0 P$	$\Delta^1 P$	$\Delta^2 P$	$\Delta^3 P$	$\Delta^4 P$
0	7				
1	87				
2	-143				
3	-2453				
4	-9897				

x	$\Delta^0 P$	$\Delta^1 P$	$\Delta^2 P$	$\Delta^3 P$	$\Delta^4 P$
0	7	80			
1	87	-230			
2	-143	-2310			
3	-2453	-7444			
4	-9897				

en complétant une colonne grâce à la précédente

x	$\Delta^0 P$	$\Delta^1 P$	$\Delta^2 P$	$\Delta^3 P$	$\Delta^4 P$
0	7	80	-310		
1	87	-230	-2080		
2	-143	-2310	-5134		
3	-2453	-7444			
4	-9897				

x	$\Delta^0 P$	$\Delta^1 P$	$\Delta^2 P$	$\Delta^3 P$	$\Delta^4 P$
0	7	80	-310	-1770	
1	87	-230	-2080	-3054	
2	-143	-2310	-5134		
3	-2453	-7444			
4	-9897				

x	$\Delta^0 P$	$\Delta^1 P$	$\Delta^2 P$	$\Delta^3 P$	$\Delta^4 P$
0	7	80	-310	-1770	-1284
1	87	-230	-2080	-3054	
2	-143	-2310	-5134		
3	-2453	-7444			
4	-9897				

et donc $\boxed{(\Delta^k(P)(0))_{0\leq k\leq 4} = (7, 80, -310, -1770, -1284).}$

b) D'après les calculs précédents et I.2.c), si P existe, il est $\boxed{\text{unique}}$. Réciproquement connaissant $(\Delta^k(P)(0))_{0\leq k\leq 4}$, on en déduit $P(k)_{0\leq k\leq 4}$. De plus, toujours par I.2.c) l'écriture de P dans la base $(H_k)_{0\leq k\leq 4}$ est équivalente à la donnée de $(\Delta^k(P)(0))_{0\leq k\leq 4}$. Par conséquent l'unique polynôme P qui convient est $\boxed{7 + 80H_1 - 310H_2 - 1770H_3 - 1284H_4.}$

c) On se donne une liste ℓ de taille $n+1$ et on construit une liste c grâce à l'algorithme suivant. On initialise c à [ ]. Puis, tant que ℓ est distincte de [ ], on augmente c de $\ell[0]$ et on affecte la liste des différences entre les termes successifs de ℓ à ℓ.

```
def differences(x):
  y=x[:]
  y.pop()
  return map(lambda u,v: u-v,x[1:],y)

def delta(x):
  c=[]
  while(len(x)>0):
    c.append(x[0])
    x=differences(x)
  c.append(x[0])
  return c
```

PARTIE II

II.1) Pour n non nul et a un réel. La fonction $x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k H_k(x) - aH_n(x)$ s'annule en n si et seulement si

$$a = f(n) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k H_k(n)$$

puisque $H_n(n) = 1$. D'où la possibilité de construire la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ $\boxed{\text{par récurrence.}}$

II.2) Soit m un entier naturel avec $m \leq n$. D'après I.1.a et la définition de $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, il vient

$$f(m) = \sum_{k=0}^{m} a_k H_k(m) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(m)$$

i.e. $\boxed{x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(x) \text{ s'annule sur } [\![0;n]\!].}$

II.3) On a, d'après la formule du binôme de NEWTON,

$$b^n = (1+b-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (b-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (b-1)^k H_k(n)$$

et donc, par la définition donnée en II.1, la suite associée à la fonction $x \mapsto b^x$ est la suite $\boxed{((b-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}.}$

II.4) a) Si x est un entier naturel inférieur à n, on a $H_{n+1}(x) = 0$ et donc, d'après II.2,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(x) + a.H_{n+1}(x)$$

pour tout réel a. Il en résulte que la formule proposée est valide $\boxed{\text{pour tout réel } \theta \text{ dans le domaine de définition de } f.}$

b) Soit I l'intervalle $[\min(0,x); \max(n,x)]$.
Si maintenant x n'est pas un entier naturel inférieur à n, $H_{n+1}(x)$ n'est pas nul et il existe donc un unique réel A tel que

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(x) = AH_{n+1}(x)\ .$$

Comme par ailleurs, pour entier naturel m inférieur à n, on a

$$f(m) - \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(m) = 0 = AH_{n+1}(m)\ ,$$

la fonction g, définie sur I par $g(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(t) - AH_{n+1}(t)$, s'annule en les $n+2$ points $\boxed{0,\ 1,\ \dots n \text{ et } x.}$
Comme g est de classe C^∞ sur I, le théorème de ROLLE assure que sa dérivée d'ordre $n+1$ s'annule en au moins un point de l'intérieur de I. Notons θ un point intérieur à I tel que $g^{(n+1)}(\theta) = 0$. On a en fait

$$0 = g^{(n+1)}(\theta) = f^{(n+1)}(\theta) - A$$

et donc la fonction

$$t \mapsto f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(t) - H_{n+1}(t) f^{(n+1)}(\theta)$$

s'annule en 0, 1, ..., n et x. En particulier $\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(x) + H_{k+1}(x) f^{(n+1)}(\theta).}$

Deuxième composition de mathématiques – CAPES Agricole 1997

PARTIE III

III.1) a) L'application $P \mapsto (\Delta(P), \int_0^1 P)$ de $\mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}_{n-1}[X] \times \mathbf{R}$ est linéaire car Δ et l'intégration le sont. Un élément P du noyau est constant car $\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbf{R}_0[X]$ d'après I.2.a et donc il est nul car alors $\int_0^1 P = P(0)$. Puisque les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension finie, on a affaire à une bijection. Par conséquent

il existe un unique polynôme B_n vérifiant

$$\Delta(B_n) = nX^{n-1} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0\ .$$

b) Pour $n \geq 2$, 0 est racine de nX^{n-1} et donc $\Delta(B_n)(0) = 0$, i.e. $\boxed{B_n(1) = B_n(0).}$

c) On a $(nX^{n-1})_{1\leq n\leq 2} = (H_0, 2H_1)$. Donc B_1 et B_2 sont, à des constantes près, H_1 et $2H_2$. De plus

$$\int_0^1 H_1(t)dt = \int_0^1 tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

et

$$2\int_0^1 H_2(t)dt = \int_0^1 t(t-1)dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}\ .$$

Par linéarité de l'intégrale, il vient $\boxed{B_1 = X - \frac{1}{2} \text{ et } B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}.}$

III.2) a) Pour $n \geq 2$ on pose $P_n = B_n' - nB_{n-1}$. On a

$$\Delta(P_n) = \Delta(B_n)' - n\Delta(B_{n-1}) = 0$$

puisque la dérivée de nX^{n-1} est $n(n-1)X^{n-2}$. Il en résulte que P_n est constant, d'après I.2.a). Or

$$\int_0^1 P_n(t)dt = B_n(1) - B_n(0) - n\int_0^1 B_{n-1}(t)dt = 0$$

d'après III.1.b) et la définition de B_{n-1}. Par conséquent P_n est la constante nulle et donc $\boxed{B_n' = nB_{n-1}.}$

b) On a donc $B_3' = 3B_2 = 3X^2 - 3X + \frac{1}{2}$ et on dispose de a réel tel que $B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + a$. Or

$$\int_0^1 \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0$$

et donc $a = 0$, i.e. $\boxed{B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X.}$

On a également $B_4' = 4B_3 = 4X^3 - 6X^2 + 2X$ et on dispose de b réel tel que $B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 + b$. Or

$$\int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{30}$$

et donc $\boxed{B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}.}$

III.3) a) Soit p un entier naturel non nul. Pour $n \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} k^{p-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{p}\Delta(B_p)(k)\\ &= \frac{1}{p}\left(B_p(1) - B_p(0) + B_p(2) - B_p(1) + \cdots + B_p(n) - B_p(n-1)\right)\\ &= \frac{1}{p}\left(B_p(n) - B_p(0)\right)\end{aligned}$$

et donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} k^{p-1} = \frac{1}{p}\left(B_p(n) - B_p(0)\right).}$

b) D'après ce qui précède, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\left(B_4(n+1) - B_4(0)\right) = \frac{(n+1)^4 - 2(n+1)^3 + (n+1)^2}{4}$$

i.e. $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.}$

III.4) a) Pour n non nul on pose $P_n = (-1)^n B_n(1-X)$. On a

$$\Delta(P_n) = (-1)^n B_n(-X) - (-1)^n B_n(1-X)$$

et donc

$$\Delta(P_n) = (-1)^{n+1}\Delta(B_n)(-X) = (-1)^{n+1} n(-X)^{n-1} = nX^{n-1}\ .$$

De plus, par changement de variable affine bijectif $x = 1 - t$, on a

$$\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-t)\,\mathrm{d}t = -(-1)^n \int_1^0 B_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

et donc, d'après III.1.a), l'unicité de B_n entraine $P_n = B_n$, i.e. $\boxed{B_n = (-1)^n B_n(1-X).}$

b) En prenant n impair et $x = 1/2$ dans la formule précédente, il vient $B_n(1/2) = -B_n(1/2)$ et donc $\boxed{B_n(1/2) = 0.}$

En prenant n impair et $x = 0$, il vient $B_n(0) = -B_n(1)$. Par conséquent, si n est strictement supérieur à 1, d'après III.1.a), on a $\boxed{B_n(0) = B_n(1) = 0.}$

III.5) a) Pour n non nul on pose

$$P_n = 2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{X}{2}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) .$$

Il vient

$$\begin{aligned} \Delta(P_n) &= 2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{X+2}{2}\right) - B_n\left(\frac{X}{2}\right)\right) \\ &= 2^{n-1}\Delta(B_n)\left(\frac{X}{2}\right) \\ &= nX^{n-1} . \end{aligned}$$

De plus, par changements de variable affines bijectifs $x = 2t$ et $x = 2t - 1$, on a

$$\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t = 2^n \int_0^{\frac{1}{2}} B_n(t)\,\mathrm{d}t + 2^n \int_{\frac{1}{2}}^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

d'après la relation de Chasles. Et donc, d'après III.1.a), l'unicité de B_n entraine $P_n = B_n$, i.e. $\boxed{B_n = 2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{X}{2}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right).}$

b) En prenant n pair non nul et $x = 0$, il vient $B_n(0) = 2^{n-1}(B_n(0) + B_n(1/2))$, d'où $\boxed{B_n(1/2) = (2^{1-n} - 1)B_n(0).}$

III.6) a) Soit, pour n non nul, $(\mathbf{H}_n)$ le prédicat : $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}X^k$.

Comme $B_1 = X - \dfrac{1}{2}$, on a $b_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $B_1 = b_0X + b_1$, et donc $(\mathbf{H}_1)$ est vrai.
Soit maintenant n non nul tel que $(\mathbf{H}_n)$ est vrai. On a donc

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}X^k$$

et, puisque d'après III.2.a) $B'_{n+1} = (n+1)B_n$,

$$B_{n+1} = B_{n+1}(0) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n+1}{k+1} b_{n-k}X^{k+1}$$

i.e.

$$B_{n+1} = b_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} b_{n+1-k-1}X^{k+1}$$

et donc $(\mathbf{H}_{n+1})$ est vraie. D'après le principe de récurrence, on en conclut :

$$\boxed{B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}X^k.}$$

Par conséquent, d'après III.3.a, pour tout entier naturel p,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1}\sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} b_{p+1-k}n^k.}$$

b) Soit p un entier naturel non nul, comme $2p \geq 2$, on a, d'après III.1.a,

$$b_{2p} = B_{2p}(0) = B_{2p}(1) = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} b_{2p-k}$$

et donc, en changeant l'indice en $2p - k$ et en utilisant la symétrie du triangle de Pascal, il vient, puisque cette formule est une tautologie pour b_0, $\boxed{\forall p \in \mathbf{N},\ b_{2p} = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} b_k}$

c) D'après III.4.b le seul terme non nul parmi les éléments de la suite (b_n) pour n impair, est b_1 qui vaut $-\frac{1}{2}$. En particulier, si p est supérieur à 2, $b_{2p-1} = b_{2p+1} = 0$ et donc, d'après la question précédente

$$b_{2p+2} = \sum_{k=0}^{2p-2} \binom{2p+2}{k} b_k + \binom{2p+2}{2p} b_{2p} + b_{2p+2}$$

et donc $\boxed{b_{2p} = -\frac{2}{(2p+1)(2p+2)} \sum_{k=0}^{2p-2} \binom{2p+2}{k} b_k.}$

Cette dernière formule montre que la suite (b_n) est définie par récurrence, à partir du terme b_4, comme somme et produits des termes précédents par des nombres rationnels. Une récurrence immédiate montre que tous les b_n sont rationnels, puisque $b_0 = 1$, $b_1 = -1/2$, $b_2 = 1/6$ et $b_3 = 0$ le sont aussi. $\boxed{\text{La suite } (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est une suite de nombres rationnels.}}$

d) On a $b_4 = -\dfrac{1}{30}$. Et donc

$$b_6 = -\frac{1}{28}\left(1 - 8 \times \frac{1}{2} + 28 \times \frac{1}{6} - 70 \times \frac{1}{30}\right) = \frac{1}{42}$$

puis

$$b_8 = -\frac{1}{45}\left(1 - \frac{10}{2} + \frac{45}{6} - \frac{210}{30} + \frac{210}{42}\right) = -\frac{1}{30}$$

puis

$$b_{10} = -\frac{1}{66}\left(1 - 6 + 11 - \frac{495}{30} + \frac{924}{42} - \frac{495}{30}\right) = \frac{5}{66}$$

puis

$$b_{12} = -\frac{1}{91}\left(1 - 7 + \frac{91}{6} - \frac{1001}{30} + \frac{3003}{42} - \frac{3003}{30} + \frac{5005}{66}\right) = -\frac{691}{2730}$$

et enfin

$$b_{14} = -\frac{1}{120}\left(1 - 8 + 20 - \frac{1820}{30} + \frac{8008}{42} - \frac{12870}{30} + \frac{40040}{66} - \frac{1820 \times 691}{2730}\right) = \frac{7}{6}\ .$$

i.e. $\boxed{b_{14} = \frac{7}{6}.}$

e) Parce que ce sont les nombres de (Jakob) Bernoulli ! Ils ont été ainsi nommés par Abraham de Moivre.