CAPESA 1996 - Première épreuve

Dans tout le problème, a est un **entier strictement positif fixé**.
Le but est de décrire et de comparer des suites de rationnels convergeant vers $\sqrt{a^2+1}$.
Notation : on pose $r = \dfrac{\sqrt{a^2+1}-a}{a}$.

PARTIE 1 - Préliminaires

1. a) Montrer $\dfrac{1}{2a} - \dfrac{1}{8a^3} < \sqrt{a^2+1} - a < \dfrac{1}{2a}$.

   b) En déduire que a est l'entier le plus proche de $\sqrt{a^2+1}$.

2. Application numérique : en déduire une valeur approchée décimale de $\sqrt{626}$ à 10^{-5} par excès.

PARTIE 2 - Méthode de PADÉ

On définit la suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $t_0 = a$ et $\forall n \in \mathbf{N}\ t_{n+1} = t_n + \dfrac{1}{2a}(a^2+1-t_n^2)$.

3. En supposant (uniquement pour cette question) $a = 2$, donner une représentation graphique permettant d'obtenir successivement les quatre premiers termes de la suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

4. a) Montrer que, pour tout entier n, t_n est un rationnel appartenant à $\left[a, a+\dfrac{1}{2a}\right]$.

   b) Montrer que, si $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, alors sa limite est $\sqrt{a^2+1}$.

5. On pose, pour tout entier naturel n, $e_n = |t_n - \sqrt{a^2+1}|$.

   a) Montrer : $\forall n \in \mathbf{N}\ e_{n+1} = e_n \left(\dfrac{\sqrt{a^2+1}+t_n}{2a} - 1\right)$.

   b) Démontrer, pour tout entier n : $a\dfrac{r^{n+1}}{2^n} \leq e_n \leq \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^n$.

   c) En déduire que la suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

6. a) Vérifier que l'on a : $\forall n \in \mathbf{N}\ e_{n+1} = r.e_n \left(1 + (-1)^{n+1}\dfrac{e_n}{2ar}\right)$.

   b) En déduire l'existence d'un réel λ dans $\left]0; \dfrac{1}{2a}e^{\frac{1}{2r(2a^2-1)}}\right[$ tel qu'on ait : $e_n \sim_{+\infty} \lambda r^n$.

PARTIE 3 - Construction géométrique

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan et A le point de coordonnées $(a, 0)$.

Pour t élément quelconque de $\left[a, a+\dfrac{1}{2a}\right]$, on désigne par M, O_1 et O_2 les points de l'axe $(O; \vec{\imath})$ d'abscisses respectives t, $t+a$ et $t-a$. On construit le point L tel qu'on ait $\overrightarrow{ML} = \vec{\jmath}$.

7. Montrer que les cercles (C_1) de centre O_1 et passant par A et (C_2) de centre O_2 passant par L sont sécants en deux points distincts.

   On note P le projeté orthogonal de ces deux points sur l'axe des abscisses et N le symétrique de M par rapport à P.

8. Montrer que l'abscisse t' de N est donnée par :

$$t' = t + \frac{1}{2a}\left(1 + a^2 - t^2\right) .$$

PARTIE 4 - Méthode des moyennes arithmético-harmoniques

9. a) Montrer que les relations $u_0 = a$, $v_0 = a + \dfrac{1}{a}$ et

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

définissent deux suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de rationnels strictement positifs.

b) Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont de monotonies contraires.

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbf{N}\ 0 < v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{4a}(v_n - u_n)^2$.

d) En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent et ont la même limite.

e) Calculer $u_{n+1}v_{n+1}$ et en déduire la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

10. On pose, pour tout entier n, $d_n = v_n - \sqrt{a^2+1}$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbf{N}\ d_{n+1} = \dfrac{d_n^2}{2v_n}$.

b) À l'aide d'une relation analogue pour δ_n défini par $\delta_n = v_n + \sqrt{a^2+1}$, déterminer un équivalent de d_n, quand n tend vers $+\infty$ (on l'exprimera en fonction de ρ donné par $\rho = \dfrac{\sqrt{a^2+1} - a}{\sqrt{a^2+1} + a}$).

En déduire que les suites $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\sqrt{a^2+1} - u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont équivalentes.

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbf{N}\ 0 < \sqrt{a^2+1} - u_n < d_n$.

11. Étudier la limite quand n tend vers $+\infty$ du rapport $\dfrac{d_n}{e_n}$ à l'aide de 6b.

12. a) Vérifier $e_0 < d_0$ et $e_1 = d_1$.

b) Montrer, pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{d_{n+1}}{d_n} \leq \dfrac{r}{2}$ et, pour tout $n \geq 2$, $d_n < e_n$.

PARTIE 5 - Étude d'une famille de polynômes

On note $(\mathcal{C}(\mathbf{R}), +, \times)$ l'anneau des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et $\mathbf{Z}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients entiers relatifs. On pose

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}) \;\middle|\; \exists (A,B) \in \mathbf{Z}[X]^2\ \forall x \in \mathbf{R}\ f(x) = A(x) + \sqrt{x^2+1}B(x) \right\} .$$

13. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, si $\sqrt{n}$ est rationnel alors il est entier.
En déduire que $\sqrt{a^2+1}$ n'est pas rationnel.

b) Montrer que, pour A et B dans $\mathbf{Z}[X]$, on a

$$\left(\forall x \in \mathbf{R}\ A(x) + \sqrt{x^2+1}B(x) = 0\right) \Rightarrow A = B = 0 .$$

On définit, pour tout entier n et tout réel x,

$$\varphi_n(x) = \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^n .$$

14. a) Montrer que les fonctions φ_n appartiennent à E et qu'il existe, de façon unique, deux suites $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes de $\mathbf{Z}[X]$ telles que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad \varphi_n(x) = P_n(x) + \sqrt{x^2+1}Q_n(x) .$$

On exprimera P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n.

b) Montrer, pour tout entier n : $P_{n+2} = 2XP_{n+1} + P_n$ et $Q_{n+2} = 2XQ_{n+1} + Q_n$.

c) En déduire que P_n et Q_n sont à coefficients entiers naturels et calculer, pour chacun d'eux, le degré ainsi que le coefficient dominant.

d) Distinguer le cas « n pair » et « n impair » pour montrer que les polynômes P_n et Q_n sont pairs ou impairs, et déterminer leurs racines réelles.

15. a) Montrer que, pour tout entier n et tout réel x, on a les relations

    i. $P_n(x) - \sqrt{x^2+1}Q_n(x) = \left(x - \sqrt{x^2+1}\right)^n$;

    ii. $P_n' = nQ_n$;

    iii. $(X^2+1)Q_n' + XQ_n = nP_n$.

b) En déduire que P_n est solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle $(x^2+1)y'' + xy' - n^2y = 0$.

PARTIE 6 - Méthode des fractions continues

16. a) Montrer qu'il existe une suite $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de rationnels telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad c_n = \frac{P_n(a)}{Q_n(a)} .$$

b) Démontrer que la fraction précédente est irréductible.

c) Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n.

17. a) Montrer que $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers $\sqrt{a^2+1}$.

b) Montrer que, si on pose $\varepsilon_n = \left|c_n - \sqrt{a^2+1}\right|$, on a ($\rho$ étant défini en 10b) :

$$\varepsilon_n \sim_{+\infty} 2\sqrt{a^2+1}\rho^n .$$

c) Étudier la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{\varepsilon_n}{e_n}$ où e_n a été défini en 6b.

d) Vérifier : $\forall n \in \mathbf{N}^*$ $\varepsilon_{n+1} = \dfrac{\sqrt{a^2+1}-a}{a+c_n}\varepsilon_n$.

En déduire : $\forall n \in \mathbf{N}^*$ $\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \leq \dfrac{r}{2}$ et $\varepsilon_{n+1} \leq e_n$.

18. a) Exprimer P_{2k} et Q_{2k} en fonction de P_k et Q_k. En déduire

$$\forall k \in \mathbf{N}^* \qquad c_{2k} = \frac{1}{2}\left(c_k + \frac{a^2+1}{c_k}\right) .$$

b) Conclure : $\forall n \in \mathbf{N}^*$ $c_{2^n} = v_n$. Quel résultat retrouve-t-on ?

19. On pose, pour tout entier n, $w_n = c_{3^n}$.

a) En s'inspirant de la question précédente, déterminer une relation entre w_{n+1} et w_n.

b) Donner une majoration de $\left|w_n - \sqrt{a^2+1}\right|$.

c) Application numérique : déterminer un entier n tel que w_n soit une valeur approchée à 10^{-7} de $\sqrt{10}$.

Première épreuve – CAPESA 1996

PARTIE 1 - Préliminaires

1. a) **Par convexité** La fonction racine carrée est strictement concave sur $\mathbf{R}_+^*$ et donc la pente de la droite joignant $(a^2, \sqrt{a^2})$ à $(a^2+1, \sqrt{a^2+1})$ est strictement inférieure à la pente de la dérivée en a^2. Autrement dit

$$\boxed{\frac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2}}{a^2+1-a^2} = \sqrt{a^2+1}-a < \frac{1}{2\sqrt{a^2}} = \frac{1}{2a}.}$$

Par la Formule de Taylor L'inégalité de concavité précédente peut être vue comme un produit dérivé de la Formule de Taylor-Lagrange. Notons f la fonction racine carrée. Puisque f est de deux fois dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, on a

$$\exists c \in]a^2; a^2+1[\qquad f(a^2+1) = f(a^2) + f'(a^2) + \frac{1}{2} f"(c)$$

et donc la stricte négativité du dernier terme entraîne

$$\sqrt{a^2+1} < \sqrt{a^2} + \frac{1}{2\sqrt{a^2}} = a + \frac{1}{2a}\ .$$

En fait racine carrée est trois fois dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, de dérivée troisième strictement positive et il vient

$$\exists c \in]a^2; a^2+1[\qquad f(a^2+1) = f(a^2) + f'(a^2) + \frac{1}{2} f"(a^2) + \frac{1}{6} f'''(c)$$

et donc

$$\sqrt{a^2+1} > \sqrt{a^2} + \frac{1}{2\sqrt{a^2}} - \frac{1}{8\sqrt{a^6}} = a + \frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3}\ .$$

D'où $\boxed{\frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3} < \sqrt{a^2+1} - a < \frac{1}{2a}.}$

Par manipulation algébrique En multipliant par la quantité $\sqrt{a^2+1}+a$, dite quantité conjuguée, on remarque

$$\sqrt{a^2+1} - a = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}+a}$$

et, comme $\sqrt{a^2+1} > a$, il vient

$$\sqrt{a^2+1} - a < \frac{1}{2a}\ .$$

De même

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2+1} - a - \frac{1}{2a} &= \frac{1}{\sqrt{a^2+1}+a} - \frac{1}{2a} \\
&= \frac{a-\sqrt{a^2+1}}{2a(a+\sqrt{a^2+1})} \\
\sqrt{a^2+1} - a - \frac{1}{2a} &= -\frac{1}{2a(a+\sqrt{a^2+1})^2} \\
&> -\frac{1}{2a(2a)^2} \\
&> -\frac{1}{8a^3}
\end{aligned}$$

Par élimination des radicaux On a

$$\forall a \in \mathbf{R}_+^* \qquad a + \frac{1}{2a} = \frac{2a^2+1}{2a} \quad \text{et} \quad a + \frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3} = \frac{8a^4+4a^2-1}{8a^3} \ .$$

Comme $\sqrt{a^2+1}$, $2a^2+1$ et $2a$ sont des quantités (strictement) positives sur $\mathbf{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2+1} < a + \frac{1}{2a} \quad &\Leftrightarrow \quad a^2+1 < \frac{(2a^2+1)^2}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow \quad 4a^2(a^2+1) < (2a^2+1)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 4a^4+4a^2 < 4a^4+4a^2+1 \end{aligned}$$

et l'inégalité de droite en découle. Pour celle de gauche, on remarque

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2+1} > \left| a + \frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3} \right| \quad &\Leftrightarrow \quad a^2+1 > \frac{(8a^4+4a^2-1)^2}{64a^6} \\ &\Leftrightarrow \quad 64a^8+64a^6 > 64a^6+64a^6-8a^2+1 \\ &\Leftrightarrow \quad 8a^2 > 1 \ . \end{aligned}$$

Par conséquent, pour a entier naturel non nul

$$\sqrt{a^2+1} > \left| a + \frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3} \right| \geq a + \frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3} \ .$$

Remarque : on peut obtenir ces résultats par le calcul formel en évaluant $(a+1/2a)^2 - (a^2+1)$ et $(a+1/2a-1/8a^3)^2 - (a^2+1)$ sous forme de fraction rationnelle.

Par étude de fonction C'est la méthode où on réfléchit le moins mais aussi celle où ne comprend pas pourquoi ça marche. En particulier quand on n'a pas de chance dans les calculs ou dans les choix de fonctions à étudier, ça devient très compliqué et on perd confiance. Si on étudie la fonction $x \to \sqrt{a^2+x}$, on retombe rapidement sur la formule de Taylor et tout va bien en faisant $x=1$. Si on réfléchit moins, on pose $f(x) = x + 1/2x - \sqrt{x^2+1}$ sur $\mathbf{R}_+^*$, qui est de classe C^∞. On obtient (à la main ou avec une calculatrice)

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^* \qquad f"(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}^3 - x^3}{x^3\sqrt{x^2+1}^3} > 0$$

et donc f' est croissante. Comme

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = 0$$

f' est négative sur $\mathbf{R}_+^*$. Pour conclure on est donc obligé de trouver un équivalent de f en l'infini. On peut employer pour cela un développement asymptotique et le calcul utilisera le développement limité de $y \to \sqrt{1+y}$ au voisinage de 0 :

$$f(x) = x\left(1 - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) + \frac{1}{2x} = x\left(1 - \left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\right) + \frac{1}{2x}$$

et fonc $f(x) = \dfrac{1}{8x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$. Par conséquent f est strictement positive au voisinage de l'infini. Comme elle est décroissante, elle est donc strictement positive sur tout $\mathbf{R}_+^*$.

b) Pour tout entier naturel k distinct de a, on a

$$|\sqrt{a^2+1}-a| = \sqrt{a^2+1}-a < \frac{1}{2a} \leq \frac{1}{2}$$

et

$$|\sqrt{a^2+1}-k| = |a-k+\sqrt{a^2+1}-a| \geq |a-k| - |\sqrt{a^2+1}-a| \geq 1 - |\sqrt{a^2+1}-a| > 1-\frac{1}{2}$$

d'où

$$|\sqrt{a^2+1}-a| < \frac{1}{2} < |\sqrt{a^2+1}-k|$$

et donc $\boxed{a \text{ est l'entier le plus proche de } \sqrt{a^2+1}.}$

2. Prenons $a = 25$, on a $8a^3 = (50)^3 = 1.25\ 10^5 > 10^5$ et donc

$$25.02 - 10^{-5} < a + \frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3} < \sqrt{a^2+1} = \sqrt{626} < a + \frac{1}{2a} = 25.02\ .$$

Il en résulte que $\boxed{25.02 \text{ est une valeur décimale approchée de } \sqrt{626} \text{ à } 10^{-5} \text{ par excès.}}$

On trouve sur une calculatrice $\sqrt{626} \simeq 25.0199920$, ce qui est cohérent.

PARTIE 2 - Méthode de PADÉ

3. Soit f la fonction, définie sur $\mathbf{R}$, par $f(x) = x + \dfrac{1+a^2-x^2}{2a}$. La suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc la suite récurrente associée à f et de terme initial a.
On part de (a, a) puis on projette successivement verticalement sur le graphe de f, puis horizontalement sur la première bissectrice. Les abscisses des points sur la première bissectrices sont les valeurs successives de t_n.
Ici $f(x) = \dfrac{5+4x-x^2}{4}$ et on place successivement les points $(2, 2)$, $(2, 9/4)$, $(9/4, 9/4)$, $(9/4, 143/64)$, $(143/64, 143/64)$ et $(143/64, 36639/16384)$. Autrement dit $t_0 = 2$, $t_1 = \dfrac{9}{4}$, $t_2 = \dfrac{143}{64}$ et $t_3 = \dfrac{36639}{16384}$.

4. a) La fonction f définie précédemment est une fonction polynôme à coefficients rationnels et donc $f(\mathbf{Q}) \subset \mathbf{Q}$. Par propriété des trinômes du second degré, le maximum de f est atteint en a et elle est donc décroissante sur $[a; +\infty[$. En particulier, par continuité et décroissance de f,

$$f\left(\left[a; a+\frac{1}{2a}\right]\right) = \left[f\left(a+\frac{1}{2a}\right); f(a)\right] = \left[a+\frac{1}{2a}-\frac{1}{8a^3}; a+\frac{1}{2a}\right] \subset \left[a; a+\frac{1}{2a}\right]$$

et donc f préserve l'intervalle $[a; a+1/2a]$.
Il en résulte

$$f\left(\left[a; a+\frac{1}{2a}\right] \cap \mathbf{Q}\right) \subset \left[a; a+\frac{1}{2a}\right] \cap \mathbf{Q}\ .$$

On conclut par récurrence. Notons X l'ensemble $[a; a+1/2a] \cap \mathbf{Q}$; en particulier la propriété précédente s'écrit $f(X) \subset X$. Pour n entier naturel, notons (H_n) la propriété $t_n \in X$. Comme $t_0 = a$ et a est un entier, (H_0) est vraie. Montrons maintenant que la propriété est héréditaire. Soit n un entier naturel tel que $t_n \in X$. On a alors $t_{n+1} = f(t_n) \in f(X) \subset X$ et donc $t_{n+1} \in X$. D'après le principe de récurrence on conclut

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad t_n \in X$$

ou encore, pour tout entier naturel n, $\boxed{t_n \text{ est un rationnel appartenant à } [a; a+1/2a].}$

b) On note toujours f la fonction précédente. Puisque c'est une fonction polynôme, elle est continue et toute limite d'une suite récurrente associée à f est un point fixe de f. Or

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = a^2 + 1 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{a^2+1}\ .$$

De plus la suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est à valeurs dans l'intervalle fermé $[a; a + 1/2a]$ et donc sa limite, si elle existe, appartient aussi à ce fermé. En particulier cette hypothétique limite est strictement positive. Comme l'unique point fixe de f strictement positif est $\sqrt{a^2+1}$, $\boxed{\sqrt{a^2+1}\text{ est l'unique limite possible pour la}}$

5. a) Soit n un entier naturel. On a

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= |t_{n+1} - \sqrt{a^2+1}| \\ &= |f(t_n) - f(\sqrt{a^2+1})| \\ &= \left|(t_n - \sqrt{a^2+1})\left(1 - \frac{t_n + \sqrt{a^2+1}}{2a}\right)\right| . \end{aligned}$$

Puisque $\sqrt{a^2+1}$ et t_n sont supérieurs à a, $\dfrac{t_n+\sqrt{a^2+1}}{2a} - 1$ est positif et donc

$$\boxed{e_{n+1} = e_n\left(\frac{t_n+\sqrt{a^2+1}}{2a} - 1\right).}$$

b) Pour n un entier naturel, on note (H_n) la propriété $\dfrac{ar^{n+1}}{2^n} \leq e_n \leq \dfrac{(2a^2)^{-n}}{2a}$. La propriété (H_0) s'écrit

$$ar = \sqrt{a^2+1} - a \leq e_0 = |a - \sqrt{a^2+1}| \leq \frac{1}{2a}\ .$$

Puisque $\sqrt{a^2+1} - a$ est positif, (H_0) résulte de 1a).
Montrons maintenant que la propriété (H_n) est héréditaire. Pour cela prenons n un entier naturel tel que (H_n) soit vraie. On a

$$\frac{t_n+\sqrt{a^2+1}}{2a} - 1 = \frac{(t_n - a) + (\sqrt{a^2+1} - a)}{2a}\ .$$

Or $0 \leq t_n - a \leq \dfrac{1}{2a}$ d'après 4a), et $\sqrt{a^2+1} - a \leq \dfrac{1}{2a}$, d'après 1a). Il vient

$$\frac{r}{2} \leq \frac{t_n+\sqrt{a^2+1}}{2a} - 1 \leq \frac{1}{2a^2}\ .$$

Par conséquent (H_n) et 5a) entraînent

$$a\frac{r^{n+2}}{2^{n+1}} \leq \frac{r}{2}e_n \leq e_n\left(\frac{t_n+\sqrt{a^2+1}}{2a} - 1\right) = e_{n+1} \leq \frac{1}{2a^2}e_n \leq \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{2a^2}\right)^{n+1}$$

et donc (H_{n+1}) est vraie. D'après le principe de récurrence on en déduit

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N} \qquad a\frac{r^{n+1}}{2^n} \leq e_n \leq \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{2a^2}\right)^n.}$$

c) Il résulte de la question précédente que $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite positive majorée par une suite géométrique de raison inférieure à 1/2. Par le théorème d'encadrement, elle converge donc vers 0, ce qui exprime que $\boxed{\text{la suite } (t_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge vers } \sqrt{a^2+1}.}$

6. a) On a déjà remarqué que f est décroissante sur $[a; a + 1/2a]$. Il en résulte que les suites $(t_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(t_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont monotones de monotonies contraires. Elles convergent vers $\sqrt{a^2+1}$ puisque ce sont des suites extraites de la suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Comme $t_0 = a$, on a $t_0 \le \sqrt{a^2+1}$ et donc la suite $(t_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante. La suite $(t_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est par conséquent décroissante. On a donc

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad t_{2n} \le \sqrt{a^2+1} \le t_{2n+1}$$

et ainsi

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad t_n - \sqrt{a^2+1} = (-1)^{n+1} e_n \ .$$

Ainsi, d'après 5a), pour tout entier naturel n,

$$e_{n+1} = e_n \frac{\sqrt{a^2+1} + t_n - 2a}{2a} = e_n \frac{2(\sqrt{a^2+1} - a) + t_n - \sqrt{a^2+1}}{2a} = e_n \frac{2ar + (-1)^{n+1} e_n}{2a}$$

i.e. $\boxed{e_{n+1} = re_n \left(1 + (-1)^{n+1} \dfrac{e_n}{2ar}\right).}$

b) On en déduit

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad \frac{e_{n+1}}{r^{n+1}} = \frac{e_n}{r^n} \left(1 + (-1)^{n+1} \frac{e_n}{2ar}\right)$$

et donc

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad \frac{e_n}{r^n} = e_0 \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + (-1)^{k+1} \frac{e_k}{2ar}\right) \ .$$

Posons, pour tout entier naturel n,

$$\lambda_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + (-1)^{k+1} \frac{e_k}{2ar}\right) \ .$$

Remarquons que, pour tout entier naturel n, par stricte positivité de e_{n+1}/re_n, la quantité $1 + (-1)^{n+1} e_n/2ar$ est strictement positive. On peut donc poser

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad \mu_k = \ln\left(1 + (-1)^{k+1} \frac{e_k}{2ar}\right) \qquad \text{et alors} \qquad \ln(\lambda_n) = \sum_{k=0}^{n} \mu_k \ .$$

Comme $e_0 < 1/2a$, il suffit, pour démontrer l'assertion demandée, par continuité de l'exponentielle, que la suite $(\ln(\lambda_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et converge vers un réel ℓ inférieur à $1/2r(2a^2 - 1)$. En effet la suite $(e_0\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est alors convergente de limite $\lambda = e_0 e^{\ell}$ et on a $0 < \lambda \le e_0 \exp(1/2r(2a^2-1)) < \exp(1/2r(2a^2-1))/2a$ et $e_n \sim \lambda r^n$.

Par concavité du logarithme, pour $x > -1$, $\ln(1 + x) \le x$. D'où, pour n entier naturel,

$$0 \le |\mu_{2n+1}| = \mu_{2n+1} \le \frac{e_{2n+1}}{2ar} \le \frac{1}{4a^2 r} \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{2n+1}$$

et

$$0 \le |\mu_{2n}| = -\mu_{2n} = \ln\left(\frac{1}{1 - \dfrac{e_{2n}}{2ar}}\right) = \ln\left(1 + \frac{\dfrac{e_{2n}}{2ar}}{1 - \dfrac{e_{2n}}{2ar}}\right) \le \frac{\dfrac{e_{2n}}{2ar}}{1 - \dfrac{e_{2n}}{2ar}} \le \frac{\dfrac{1}{4a^2 r}\left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{2n}}{1 - \dfrac{1}{4a^2 r}\dfrac{1}{2a^2}}$$

et donc, par inégalité triangulaire et comparaison avec une série géométrique, la suite $(\ln(\lambda_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet donc une valeur d'adhérence. Encore par comparaison avec une série géométrique, la distance entre deux valeurs de cette suite est arbitrairement petite dès que les deux termes sont d'indices assez grand. Il en résulte que la suite a au plus une valeur d'adhérence et donc converge. De plus

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad \mu_k \leq \ln\left(1+\frac{e_k}{2ar}\right) \leq \frac{1}{4a^2r}\left(\frac{1}{2a^2}\right)^k$$

et donc

$$\lim \ln(\lambda_n) \leq \frac{1}{4a^2r}\frac{1}{1-\dfrac{1}{2a^2}} = \frac{1}{2r(2a^2-1)} ,$$

$\boxed{\text{ce qui achève de prouver l'assertion.}}$

PARTIE 3 - Construction géométrique

7. Notons R_1 et R_2 les rayons respectifs des cercles (C_1) et (C_2), et d la distance entre leurs centres. On a $R_1 = O_1A = t$, $R_2 = O_2L = \sqrt{a^2+1}$ et $d = O_1O_2 = 2a$. Comme R_1 et R_2 sont deux réels de l'intervalle $[a; a+1/2a]$, leur distance est inférieure à la longeur de cet intervalle. Il vient $|R_2 - R_1| \leq 1/2a < 1 < 2a = d$. De plus $R_1 + R_2 - d = \sqrt{a^2+1} - a + t - a > 0$ et donc

$$|R_2 - R_1| < d < R_1 + R_2 .$$

Par conséquent les cercles (C_1) et (C_2) sont strictement sécants, i.e.

$\boxed{(C_1) \text{ et } (C_2) \text{ sont sécants en deux points distincts.}}$

8. Puisque l'axe des abscisses est la droite des centres des cercles (C_1) et (C_2), leurs deux points d'intersection sont symétriques par rapport à cet axe. Aussi le point P est-il bien défini.

Notons I un des points d'intersection. Comme le triangle (O_1PI) est rectangle en P, on a $O_1P^2+PI^2 = O_1I^2 = R_1^2$.

De même, dans (O_2PI), on obtient $O_2P^2 + PI^2 = R_2^2$. Comme P est sur le segment $[O_1O_2]$, on a également $O_2P = O_1O_2 - O_1P = d - O_1P$ et il vient $(d - O_1P)^2 + PI^2 = R_2^2$.

En prenant la différence avec la première relation trouvée, on obtient $2dO_1P - d^2 = R_1^2 - R_2^2$ et donc $O_1P = (R_1^2 - R_2^2 + d^2)/2d$. Toujours puisque P est sur le segment $[O_1O_2]$, l'abscisse de P est $t + a - (t^2 - a^2 - 1 + 4a^2)/4a$ ou encore $t - (t^2 - a^2 - 1)/4a$. Celle de N est donc deux fois celle de P moins celle de M ou encore $\boxed{t' = 2t - \dfrac{t^2-a^2-1}{2a} - t = t + \dfrac{1+a^2-t^2}{2a}.}$

PARTIE 4 - Méthode des moyennes arithmético-harmoniques

9. a) Puisque a et $a + 1/a$ sont deux rationnels strictement positifs, u_0 et v_0 sont définis de façon unique et sont des rationnels strictement positifs.

Supposons maintenant les suites $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ construites jusqu'à un certain rang n. En particulier u_n et v_n sont des rationnels strictement positifs. Par conséquent $(u_n + v_n)/2$ aussi et, de plus, $1/u_n$ et $1/v_n$ sont bien définis et sont des rationnels strictement positifs. Il en est de même pour $(1/u_n + 1/v_n)/2$ et donc son inverse est bien défini et est un rationnel strictement positif. Aussi les deux suites $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ sont bien définies et à valeurs rationnelles. Autrement dit

$\boxed{\text{les relations de l'énoncé définissent de façon unique deux suites de rationnels strictement positifs.}}$

b) D'une façon générale la moyenne M_k d'ordre k de réels strictement positifs $(x_1, \ldots, x_n)$ est une fonction croissante du réel k. Aussi la moyenne harmonique de deux nombres réels strictement positifs est elle inférieure à leur moyenne arithmétique, l'égalité n'ayant lieu que si ces deux nombres sont égaux. Démontrons ce point : on a

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbf{R}_+^*\right)^2 \qquad M_{-1}(x,y) = \frac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}} = \frac{2xy}{x+y} \qquad \text{et} \qquad M_1(x,y) = \frac{x+y}{2}$$

et donc

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbf{R}_+^*\right)^2 \qquad M_{-1}(x,y) \leq M_1(x,y) \Leftrightarrow 4xy \leq (x+y)^2 \Leftrightarrow 0 \leq (x-y)^2$$

avec égalité si et seulement si $x = y$.
Montrons également que l'on a affaire à des moyennes, à savoir :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbf{R}_+^*\right)^2 \qquad \inf(x,y) \leq M_{-1}(x,y) \leq M_1(x,y) \leq \sup(x,y) \ .$$

Pour x et y deux réels strictement positifs, on a

$$\begin{aligned} \inf(x,y) \leq M_{-1}(x,y) \quad &\Leftrightarrow \quad \inf(x,y)(x+y) \leq 2xy \\ &\Leftrightarrow \quad \inf(x,y)\left(\inf(x,y)+\sup(x,y)\right) \leq 2\inf(x,y)\sup(x,y) \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq \inf(x,y)\left(\sup(x,y)-\inf(x,y)\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M_1(x,y) \leq \sup(x,y) \quad &\Leftrightarrow \quad x+y \leq 2\sup(x,y) \\ &\Leftrightarrow \quad \inf(x,y)+\sup(x,y) \leq 2\sup(x,y) \\ &\Leftrightarrow \quad \inf(x,y) \leq \sup(x,y) \end{aligned}$$

et l'assertion en résulte. On peut noter que les infimum et supremum sont en fait les moyennes d'ordre $k = -\infty$ et $k = +\infty$ respectivement.
Soit maintenant, pour n entier naturel, (H_n) la propriété $u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$. Puisque $u_0 = a$ et $v_0 = a + 1/a$, la propriété précédente entraîne

$$\inf(u_0, v_0) = u_0 < M_{-1}(u_0, v_0) = u_1 < M_1(u_0, v_0) = v_1 < \sup(u_0, v_0) = v_0$$

et donc (H_0) est vraie.
Soit n un entier naturel pour lequel (H_n) est vraie. On a alors $0 < u_n < v_n$ et donc

$$\inf(u_n, v_n) = u_n < M_{-1}(u_n, v_n) = u_{n+1} < M_1(u_n, v_n) = v_{n+1} < \sup(u_n, v_n) = v_n$$

et (H_{n+1}) est vraie. La propriété (H_n) est donc héréditaire et le principe de récurrence entraîne

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$$

ce qui assure en particulier que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante tandis que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement décroissante : $\boxed{\text{ces deux suites sont donc de monotonies contraires.}}$

c) Soit n un entier naturel. On a

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \ .$$

De plus

$$a = u_0 \leq u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n \leq v_0 = a + \frac{1}{a}$$

d'après la propriété démontrée en 9b) et donc $v_{n+1} - u_{n+1} > 0$ et $u_n + v_n > 2a$. Il en résulte $\boxed{0 < v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{(u_n - v_n)^2}{4a}.}$

d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante et majorée par v_0, elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite. La suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement décroissante et minorée par u_0, elle est donc également convergente. Notons ℓ' sa limite. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, il vient

$$0 \leq \ell' - \ell \leq \frac{(\ell' - \ell)^2}{4a}$$

et donc

$$0 = \ell' - \ell \qquad \text{ou} \qquad 4a \leq \ell' - \ell\ .$$

Mais les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont à valeurs dans $[a; a + 1/a]$ et ℓ et ℓ' appartiennent donc aussi à cet intervalle, ce qui entraîne $|\ell - \ell'| \leq 1/a$. Par conséquent $\ell = \ell'$, i.e.

$\boxed{\text{les suites } (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ convergent et ont même limite.}}$

e) Soit n un entier naturel. On a

$$\boxed{u_{n+1}v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n}\frac{u_n + v_n}{2} = u_nv_n}$$

et donc la suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante. Sa valeur est u_0v_0, i.e. $a^2 + 1$. En passant à la limite, il vient $\ell^2 = a^2 + 1$. Comme ℓ est positif, on a $\ell = \sqrt{a^2 + 1}$. Autrement dit

$\boxed{\text{la limite commune des suites } (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est } \sqrt{a^2 + 1}.}$

10. a) Soit n un entier naturel. On a

$$\frac{d_n^2}{2v_n} = \frac{v_n^2 - 2v_n\sqrt{a^2 + 1} + a^2 + 1}{2v_n} = \frac{v_n^2 - 2v_n\sqrt{a^2 + 1} + u_nv_n}{2v_n} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{a^2 + 1}$$

i.e. $\boxed{d_{n+1} = \frac{d_n^2}{2v_n}.}$

b) La calcul avec les quantités conjuguées donne la même relation en remplaçant d par δ. En effet, soit n un entier naturel, on a

$$\frac{\delta_n^2}{2v_n} = \frac{v_n^2 + 2v_n\sqrt{a^2 + 1} + a^2 + 1}{2v_n} = \frac{v_n^2 + 2v_n\sqrt{a^2 + 1} + u_nv_n}{2v_n} = \frac{u_n + v_n}{2} + \sqrt{a^2 + 1}$$

et donc $\boxed{\delta_{n+1} = \frac{\delta_n^2}{2v_n}.}$

Par conséquent

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad \frac{d_{n+1}}{\delta_{n+1}} = \left(\frac{d_n}{\delta_n}\right)^2$$

et donc

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad \frac{d_n}{\delta_n} = \left(\frac{d_0}{\delta_0}\right)^{2^n}\ .$$

Or

$$\frac{d_0}{\delta_0} = \frac{a + \dfrac{1}{a} - \sqrt{a^2+1}}{a + \dfrac{1}{a} + \sqrt{a^2+1}} = \frac{a^2+1-a\sqrt{a^2+1}}{a^2+1+\sqrt{a^2+1}} = \frac{\sqrt{a^2+1}(\sqrt{a^2+1}-a)}{\sqrt{a^2+1}(\sqrt{a^2+1}+a)} = \rho$$

et donc

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad d_n = \delta_n \rho^{2^n} .$$

Comme $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\sqrt{a^2+1}$, $(\delta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $2\sqrt{a^2+1}$ et donc

$$\boxed{d_n \sim 2\sqrt{a^2+1}\rho^{2^n}.}$$

Soit n un entier naturel, on a

$$2d_{n+1} = (u_n + v_n) - 2\sqrt{a^2+1} = d_n - (\sqrt{a^2+1} - u_n)$$

et donc

$$\sqrt{a^2+1} - u_n = d_n - 2d_{n+1} .$$

Comme $\rho = 1/(\sqrt{a^2+1}+a)^2 < 1$, on a

$$d_n \sim 2\sqrt{a^2+1}\rho^{2^n} \qquad \text{et} \qquad 2d_{n+1} \sim 4\sqrt{a^2+1}\rho^{2^{n+1}} = o\left(\rho^{2^n}\right)$$

et il vient

$$\sqrt{a^2+1} - u_n \sim 2\sqrt{a^2+1}\rho^{2^n} \sim d_n .$$

En particulier $\boxed{\text{les suites } (d_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ et } (\sqrt{a^2+1} - u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ sont équivalentes.}}$

c) Comme $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite strictement croissante convergeant vers $\sqrt{a^2+1}$, on a, pour tout entier naturel n, $u_n < \sqrt{a^2+1}$. De même $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite strictement décroissante convergeant vers $\sqrt{a^2+1}$, on a, pour tout entier naturel n, $v_n > \sqrt{a^2+1}$ et donc $d_n > 0$.
Soit n un entier naturel, on a vu à la question précédente $u_n - \sqrt{a^2+1} - d_n = -2d_{n+1}$ et cette dernière quantité est strictement négative. On en conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N} \qquad 0 < \sqrt{a^2+1} - u_n < d_n.}$$

11. On a

$$\frac{d_n}{e_n} \sim \frac{2\sqrt{a^2+1}\rho^{2^n}}{\lambda r^n} = \frac{2\sqrt{a^2+1}}{\lambda} e^{\ln(\rho)e^{n\ln(2)} - n\ln(r)} .$$

L'exponentielle double l'emporte sur l'exponentielle simple. De façon plus concrète, le terme dans l'exponentielle peut s'écrire

$$\ln(\rho)e^{n\ln(2)}\left(1 - ne^{-n\ln(2)}\frac{\ln(r)}{\ln(\rho)}\right)$$

et ce terme tend donc vers $-\infty$, puisque $\rho < 1$. Par conséquent

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{d_n}{e_n} = 0,}$$

i.e. $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend plus rapidement vers $\sqrt{a^2+1}$ que $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$: la méthode des moyennes arithmético-harmoniques est plus performante que la méthode de Padé.

12. a) On a $e_0 = \sqrt{a^2+1} - a = ar$ et

$$d_0 = a + \frac{1}{a} - \sqrt{a^2+1} = \frac{a^2+1-a\sqrt{a^2+1}}{a} = \sqrt{a^2+1}\frac{\sqrt{a^2+1}-a}{a} = \sqrt{a^2+1}r .$$

Comme $a < \sqrt{a^2+1}$ et $r > 0$, on en déduit $\boxed{e_0 < d_0.}$

On a

$$e_1 = a + \frac{1}{2a} - \sqrt{a^2+1} = \frac{2a^2+1-2a\sqrt{a^2+1}}{2a} = \frac{(\sqrt{a^2+1}-a)^2}{2a} = \frac{(ar)^2}{2a} = \frac{ar^2}{2}$$

et

$$d_1 = \frac{d_0^2}{2v_0} = \frac{(a^2+1)r^2}{2(a+\frac{1}{a})} = \frac{a(a^2+1)r^2}{2(a^2+1)} = \frac{ar^2}{2}$$

et par conséquent $\boxed{e_1 = d_1.}$

b) Soit n un entier naturel supérieur à 1, on a, par décroissance de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$,

$$v_n \leq v_0 = a + \frac{1}{a} = \frac{a^2+1}{a}$$

et donc

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{d_n}{2v_n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{a^2+1}}{v_n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a\sqrt{a^2+1}}{a^2+1}\right) = \frac{1}{2}\frac{a^2+1-a\sqrt{a^2+1}}{a^2+1}$$

d'où

$$\boxed{\frac{d_{n+1}}{d_n} \leq \frac{1}{2}\frac{\sqrt{a^2+1}-a}{\sqrt{a^2+1}} \leq \frac{1}{2}r.}$$

De plus, ainsi qu'on l'a déjà remarqué en 5b),

$$\frac{r}{2} \leq \frac{t_n + \sqrt{a^2+1}}{2a} - 1$$

avec égalité seulement si $t_n = a$, ce qui n'est pas le cas. On a donc

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} > \frac{r}{2} \geq \frac{d_{n+1}}{d_n}$$

et

$$e_{n+1} > \left(\frac{r}{2}\right)^n e_1 = \left(\frac{r}{2}\right)^n d_1 \geq d_{n+1}\ .$$

Autrement dit, pour tout entier naturel n supérieur à 2, $\boxed{d_n < e_n.}$

PARTIE 5 - Étude d'une famille de polynômes

13. a) Soit n, p et q trois entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{n} = p/q$ avec p et q premiers entre eux. On a alors $p^2 = nq^2$. Si ℓ est un nombre premier divisant q, il divise nq^2 et donc il divise aussi p. Comme p et q sont premiers entre eux, c'est que q n'a aucun diviseur premier, autrement dit $q = 1$. Ainsi $n = p^2$ et $\sqrt{n} = p$. Par conséquent si n est un entier naturel non nul tel que $\sqrt{n}$ est un rationnel (strictement positif), alors $\sqrt{n}$ est un entier. Pour $n = 0$, $\sqrt{n}$ est entier et donc, pour tout entier naturel n, $\boxed{\text{si } \sqrt{n} \text{ rationnel, alors il est entier.}}$

D'après 1b) a est l'entier le plus proche de $\sqrt{a^2+1}$. En particulier $\sqrt{a^2+1}$ ne saurait être entier. D'après ce qui précède, ceci entraîne que

$\boxed{\sqrt{a^2+1} \text{ n'est pas non plus un rationnel.}}$

b) Soit A et B deux polynômes dans $\mathbf{Z}[X]$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad A(x) + \sqrt{x^2+1}B(x) = 0 \ .$$

La méthode suggérée par l'énoncé Supposons que B ne soit pas le polynôme nul. Alors il existe au plus un nombre fini d'entiers qui sont racines de B. Aussi il existe une infinité d'entiers naturels qui ne sont pas des racines de B. Mais de tels entiers vérifient alors $A(n)+\sqrt{n^2+1}B(n)$ et donc $\sqrt{n^2+1} = -A(n)/B(n)$, ce qui entraîne que $\sqrt{n^2+1}$ est rationnel. Ceci est impossible d'après la question précédente, et donc B est le polynôme nul. Mais alors A aussi et donc $\boxed{A = B = 0.}$

Par élimination des radicaux On a donc

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad A^2(x) = (x^2+1)B^2(x) \ .$$

Notons I le polynôme de $\mathbf{Z}[X]$ donné par $I(X) = X^2+1$. L'égalité des fonctions polynômes sur $\mathbf{R}$ entraîne l'égalité des polynômes eux-mêmes et donc $A^2 = I.B^2$. Si B n'est pas le polynôme nul, alors A non plus et on peut définir la multiplicité (éventuellement nulle) de la racine i dans A et B. Notons-les respectivement m et n. La multiplicité de i dans A^2 est $2m$, mais dans IB^2 elle est de $1+2n$. Comme ceci est impossible B est le polynôme nul et donc A aussi, par intégrité de $\mathbf{Z}[X]$, d'où $A = B = 0$.

14. a) Notons tout d'abord que, d'après 13b), pour tout élément de E,

$$\exists!(A,B) \in (\mathbf{Z}[X])^2 \quad \forall x \in \mathbf{R} \qquad f(x) = A(x) + \sqrt{x^2+1}B(x) \ .$$

Ceci montre l'unicité des suites $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Montrons maintenant leur existence.

Formellement Notons que E est un sous-anneau de $C(\mathbf{R})$ puisqu'il contient 0, 1, $f-g$ et fg si f et g sont des éléments de E. En effet si (A,B) et (C,D) sont associés à f et g selon la définition de E, alors $(A-C, B-D)$ est associé à $f-g$ et $(AC+(X^2+1)BD, AD+BC)$ est associé à fg. Or φ_1 appartient à E de par son écriture et comme, pout tout entier naturel n, $\varphi_n = \varphi_1^n$, φ_n appartient à E. De plus si φ_n est associé à (P_n, Q_n), comme φ_1 est associé à $(X,1)$, on a $P_{n+1} = XP_n + (X^2+1)Q_n$ et $Q_{n+1} = P_n + XQ_n$.

Directement Soit n un entier naturel. Posons, en notant $[t]$ la partie entière du réel t,

$$P_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} X^{n-2k}(X^2+1)^k \text{ et } Q_n = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2k+1} X^{n-2k-1}(X^2+1)^k \ .$$

Ce sont des polynômes à coefficients entiers puisque les coefficients binomiaux sont entiers et que $\mathbf{Z}[X]$ est un anneau. La formule du binôme donne

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad \varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\sqrt{x^2+1}^k = P_n(x) + \sqrt{x^2+1}Q_n(x)$$

et donc φ_n appartient à E. On peut obtenir la relation entre (P_{n+1}, Q_{n+1}) et (P_n, Q_n) en utilisant la relation $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

Par récurrence C'est certainement la méthode envisagée par l'énoncé. Pour n entier naturel soit (H_n) la propriété $\varphi_n \in E$ et, si $n > 0$, $P_n = XP_{n-1} + (X^2+1)Q_{n-1}$ et $Q_n = P_{n-1} + XQ_{n-1}$. La propriété (H_0) est vraie puisque φ_0 s'obtient avec $A = 1$ et $B = 0$. Montrons que (H_n) est héréditaire. Soit n un entier naturel tel que (H_n) soit vraie. On a, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+1}(x) &= \varphi_n(x)(x+\sqrt{x^2+1}) \\
&= (P_n(x) + \sqrt{x^2+1}Q_n(x))(x+\sqrt{x^2+1}) \\
&= xP_n(x) + (x^2+1)Q_n(x) + \sqrt{x^2+1}(P_n(x) + xQ_n(x))
\end{aligned}$$

et donc $\varphi_{n+1} \in E$ et $P_{n+1} = XP_n + (X^2+1)Q_n$ et $Q_{n+1} = P_n + XQ_n$. Le principe de récurrence permet donc d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $\varphi_n \in E$ et qu'il existe, de façon unique, deux suites $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes de $\mathbf{Z}[X]$ telles que, pour tout entier n et tout réel x,

$$\boxed{\varphi_n(x) = P_n(x) + \sqrt{x^2+1}Q_n(x) \text{ et } (P_{n+1}, Q_{n+1}) = (XP_n + (X^2+1)Q_n, P_n + XQ_n).}$$

b) **Matriciellement** On peut récrire les relations précédentes de façon synthétique

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad \begin{pmatrix} P_{n+1} \\ Q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & X^2+1 \\ 1 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} .$$

Par ailleurs, par un calcul direct ou par le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$\begin{pmatrix} X & X^2+1 \\ 1 & X \end{pmatrix}^2 = 2X \begin{pmatrix} X & X^2+1 \\ 1 & X \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc, en appliquant cette identité au vecteur (P_n, Q_n),

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad \begin{pmatrix} P_{n+2} \\ Q_{n+2} \end{pmatrix} = 2X \begin{pmatrix} P_{n+1} \\ Q_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} .$$

D'où les relations cherchées.

Par unicité de l'écriture dans E Soit n un entier naturel. Par unicité de l'écriture des éléments de E, les relations cherchées sont équivalentes à

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad \varphi_{n+2}(x) = 2x\varphi_{n+1}(x) + \varphi_n(x) .$$

Remarquons qu'on a, pour x réel

$$\varphi_2(x) = (x + \sqrt{x^2+1})^2 = 2x^2 + 1 + 2x\sqrt{x^2+1} = 2x(x + \sqrt{x^2+1}) + 1$$

soit $\varphi_2(x) = 2x\varphi_1(x) + \varphi_0(x)$, et donc

$$\varphi_{n+2}(x) = \varphi_n(x)\varphi_2(x) = \varphi_n(x)(2x\varphi_1(x) + \varphi_0(x)) = 2x\varphi_{n+1}(x) + \varphi_n(x) .$$

Directement Soit n un entier naturel. On a

$$\begin{aligned} P_{n+2} &= XP_{n+1} + (X^2+1)Q_{n+1} \\ &= XP_{n+1} + (X^2+1)(P_n + XQ_n) \\ &= XP_{n+1} + (X^2+1)P_n + X(X^2+1)Q_n \\ &= XP_{n+1} + (X^2+1)P_n + X(P_{n+1} - XP_n) \end{aligned}$$

i.e. $\boxed{P_{n+2} = 2XP_{n+1} + P_n}$ et

$$Q_{n+2} = P_{n+1} + XQ_{n+1} = XP_n + (X^2+1)Q_n + XQ_{n+1} ,$$

i.e. $Q_{n+2} = X(Q_{n+1} - XQ_n) + (X^2+1)Q_n + XQ_{n+1} =$, soit $\boxed{Q_{n+2} = 2XQ_{n+1} + Q_n.}$

c) Pour n entier naturel soit (H_n) la propriété :

P_n et Q_n ont des coefficients entiers naturels (ou positifs, ce qui revient au même puisqu'on sait déjà qu'ils sont entiers relatifs), le degré de P_n est n, celui de Q_n est $n-1$ sauf pour $n=0$, les coefficients dominants de P_n et Q_n sont égaux et valent 2^{n-1} sauf pour $n=0$. Dans le cas $n=0$, Q_0 est nul et P_0 est constant égal à 1.

Directement Les expressions trouvées dans la démonstration directe de 14a) montrent que (H_n) est vraie pour tout entier naturel n, sauf peut-être en ce qui concerne les coefficients dominants. Mais le développement du binôme pour $(1-1)^n$, pour n entier naturel supérieur à 1, montre que la somme des coefficients binomiaux d'indice pair est égale à celle des coefficients binomiaux d'indice impair. Comme la somme de ces deux quantités est $(1+1)^n = 2^n$, c'est que chacun vaut 2^{n-1}, ce qui est l'assertion cherchée.

À partir de 14b) On a $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $Q_0 = 0$ et $Q_1 = 1$. Par conséquent (H_0) et (H_1) sont vraies. Si maintenant n est un entier naturel tel que (H_{n+1}) et (H_n) soient vraies, alors (H_{n+2}) l'est aussi d'après 14b). D'après le principe de récurrence (faible), on en conclut que tous les polynômes P_n et Q_n, pour n entier naturel, sont à coefficients entiers naturels.

À partir de 14a) On a $P_0 = 1$ et $Q_0 = 0$, donc (H_0) est vraie. Si maintenant n est un entier naturel tel que (H_n) est vraie, alors $P_{n+1} = XP_n + (X^2+1)Q_n$ et $Q_{n+1} = P_n + XQ_n$ entraînent que (H_{n+1}) aussi est vraie.

Remarque : il est utile de noter que seul Q_0 est le polynôme nul car la relation 14b) entraîne la non nullité de P_{n+2} et Q_{n+2} dès qu'un des deux précédents ne l'est pas. L'étude des P_0, P_1, Q_0 et Q_1 permet donc de conclure que P_n n'est nul pour aucun n et que Q_n ne l'est que pour n nul.

d) **Directement** Les expressions trouvées dans la démonstration directe de 14a) montrent que P_n est de la pa

Par récurrence Pour n dans $\mathbf{N}$, on note (H_n) la propriété « $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$ et $Q_n(-X) = (-1)^{n+1} Q_n(X)$ ». Le polynôme $P_0 = Q_1 = 1$ étant pair et les polynômes $P_1 = X$ et $Q_0 = 0$ étant impairs, (H_0) et (H_1) sont vraies. On conclut soit grâce à la relation trouvée en 14b), soit grâce à celle trouvée en 14a), que la propriété (H_n) est héréditaire et d'après le principe de récurrence (faible dans le premier cas), P_n est de la parité de n et Q_n de la parité opposée.

Un polynôme non nul pair à coefficients positifs prend des valeurs positives sur $\mathbf{R}$ et même strictement positives sur $\mathbf{R}^*$. Il peut ou non s'annuler en 0. Un polynôme non nul impair à coefficients positifs s'écrit X fois un polynôme de la forme précédente. Il a donc une unique racine réelle, à savoir 0. De plus, pour tout entier naturel n, on a $\varphi_n(0) = 1 = P_n(0) + Q_n(0)$ et donc 0 ne peut être racine à la fois de P_n et de Q_n. Il en résulte :

P_0 ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$ et Q_0 s'annule sur tout $\mathbf{R}$, si n est pair et non nul, P_n n'a pas de racine réelle et Q_n admet 0 comme unique racine réelle, tandis que si n est impair la situation est inversée, Q_n n'a pas de racine réelle et P_n admet 0 comme unique racine réelle.

15. a) Soit n un entier naturel et x un réel, on a

$$(x - \sqrt{x^2+1})^n = (-1)^n \varphi_n(-x) = (-1)^n P_n(-x) + (-1)^n \sqrt{x^2+1}\, Q_n(-x)\,,$$

d'où $\boxed{P_n(x) - \sqrt{x^2+1}\, Q_n(x) = (x - \sqrt{x^2+1})^n = (-1)^n \varphi_n(-x).}$

Comme la fonction racine carrée est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$, la fonction φ_1 est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. On peut donc la dériver et il vient

$$\varphi_n'(x) = n\varphi_{n-1}(x)\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

et donc

$$\sqrt{x^2+1}\,\varphi_n'(x) = n\varphi_{n-1}(x)\varphi_1(x) = n\varphi_n(x)\ .$$

Par ailleurs
$$\varphi_n'(x) = P_n'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} Q_n(x) + \sqrt{x^2+1} Q_n'(x)$$
et donc
$$\sqrt{x^2+1}\varphi_n'(x) = xQ_n(x) + (x^2+1)Q_n'(x) + \sqrt{x^2+1} P_n'(x) \ .$$
Il en résulte que $\sqrt{x^2+1}\varphi_n'$ appartient à E et l'unicité de l'écriture dans E entraîne les relations $\boxed{P_n' = nQ_n \text{ et } (X^2+1)Q_n' + XQ_n = nP_n.}$.

b) Soit n un entier naturel et x un réel, on a
$$\begin{aligned}(x^2+1)P"_n(x) + xP_n'(x) - n^2P_n(x) &= n(x^2+1)Q_n'(x) + nxQ_n(x) - n^2P_n(x)\\ &= n((x^2+1)Q_n'(x) + xQ_n(x) - nP_n(x))\\ &= 0\end{aligned}$$
et donc $\boxed{P_n \text{ est solution, sur } \mathbf{R}\text{, de l'équation différentielle } (x^2+1)y" + xy' - n^2y = 0.}$

PARTIE 6 - Méthode des fractions continues

16. a) D'après l'étude menée en 14d), a n'est racine de Q_n pour aucun entier naturel non nul n. La quantité $P_n(a)/Q_n(a)$ est donc bien définie. Comme P_n et Q_n sont à coefficients entiers et que a l'est aussi, il en va de même pour $P_n(a)$ et $Q_n(a)$ et

$\boxed{\text{l'existence de la suite } (c_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ en découle.}}$

b) Soit n un entier naturel non nul. On a

$$\begin{aligned} 1 &= (\sqrt{a^2+1}+a)^n(\sqrt{a^2+1}-a)^n \\ &= (-1)^n(P_n(a)+\sqrt{a^2+1}Q_n(a))(P_n(a)-\sqrt{a^2+1}Q_n(a)) \\ &= (-1)^n(P_n^2(a)-(a^2+1)Q_n^2(a)) \end{aligned}$$

et ceci est en particulier une relation de Bézout entre $P_n(a)$ et $Q_n(a)$. Par conséquent la fraction définissant $\boxed{c_n \text{ est irréductible.}}$

c) D'après les relations obtenues en 14a), pour tout entier naturel non nul n, on a

$$c_{n+1} = \frac{aP_n(a)+(a^2+1)Q_n(a)}{P_n(a)+aQ_n(a)}$$

i.e. $\boxed{c_{n+1} = \dfrac{ac_n+a^2+1}{c_n+a}.}$

17. a) Soit n un entier naturel. Remarquons que $Q_n(a)$ est un entier naturel non nul et est donc supérieur à 1. Grâce à 15a), il vient

$$|c_n-\sqrt{a^2+1}| = \frac{|P_n(a)-\sqrt{a^2+1}Q_n(a)|}{Q_n(a)} = \frac{|a-\sqrt{a^2+1}|^n}{Q_n(a)} \leq |a-\sqrt{a^2+1}|^n$$

et, puisque $|a-\sqrt{a^2+1}| \leq 1/2$ d'après 1a), $\boxed{\text{la suite } (c_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ converge vers } \sqrt{a^2+1}.}$

b) Soit n un entier naturel non nul. On a

$$\frac{c_n-\sqrt{a^2+1}}{c_n+\sqrt{a^2+1}} = \frac{P_n(a)-\sqrt{a^2+1}Q_n(a)}{P_n(a)+\sqrt{a^2+1}Q_n(a)} = \frac{(a-\sqrt{a^2+1})^n}{(a+\sqrt{a^2+1})^n} = (-\rho)^n$$

et donc

$$\varepsilon_n = (c_n+\sqrt{a^2+1})\rho^n$$

et il vient, par convergence de $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ vers $\sqrt{a^2+1}$,

$$\boxed{\varepsilon_n \sim 2\sqrt{a^2+1}\rho^n.}$$

c) Il vient

$$\frac{\varepsilon_n}{e_n} \sim \frac{2\sqrt{a^2+1}}{\lambda}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n.$$

Or $\rho/r = a/(\sqrt{a^2+1}+a)$ est un réel strictement compris entre 0 et 1/2 et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{\varepsilon_n}{e_n} = 0.}$$

Autrement dit la méthode des fractions continues est plus performante que la méthode de Padé.

d) Soit n un entier naturel non nul. On a, d'après 16c),

$$\begin{aligned} c_{n+1} - \sqrt{a^2+1} &= \frac{ac_n + a^2 + 1}{a + c_n} - \sqrt{a^2+1} \\ &= \frac{(a - \sqrt{a^2+1})c_n + a^2 + 1 - a\sqrt{a^2+1}}{a + c_n} \\ &= \frac{(a - \sqrt{a^2+1})c_n + (\sqrt{a^2+1} - a)\sqrt{a^2+1}}{a + c_n} \\ &= \frac{\sqrt{a^2+1} - a}{a + c_n}(\sqrt{a^2+1} - c_n) \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\varepsilon_{n+1} = \frac{\sqrt{a^2+1} - a}{a + c_n}\varepsilon_n.}$$

On a $c_1 = P_1(a)/Q_1(a) = a/1 = a$ et, pour n entier naturel strictement supérieur à 1, on a $c_{n+1} - a = (ac_n + a^2 + 1)/(a + c_n) - a = 1/(a + c_n) > 0$ puisque c_n est positif. Par conséquent, pour tout entier naturel n non nul c_n est un rationnel supérieur à a et ε_n est non nul. Il en résulte

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \frac{\sqrt{a^2+1} - a}{a + c_n} \leq \frac{\sqrt{a^2+1} - a}{2a} = \frac{r}{2}.}$$

On a $\varepsilon_1 = \sqrt{a^2+1} - a = e_0$ et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad \varepsilon_{n+1} \leq \left(\frac{r}{2}\right)^n \varepsilon_1 = \left(\frac{r}{2}\right)^n e_0 \leq e_n}$$

d'après ce qui précède et la remarque faite en 12b).

18. a) Soit k un entier naturel. Par unicité de l'écriture des éléments de E et puisque $\varphi_{2k} = \varphi_k^2$, on a $\boxed{P_{2k} = P_k^2 + (X^2+1)Q_k^2 \text{ et } Q_{2k} = 2P_kQ_k.}$
Il vient, pour k non nul,

$$\boxed{c_{2k} = \frac{P_k^2(a) + (a^2+1)Q_k^2(a)}{2P_k(a)Q_k(a)} = \frac{c_k^2 + (a^2+1)}{2c_k} = \frac{1}{2}\left(c_k + \frac{a^2+1}{c_k}\right).}$$

b) Pour n entier naturel non nul soit (H_n) la propriété $c_{2^n} = v_n$. Puisque $P_1 = X$ et $Q_1 = 1$, on a $P_2 = 2X^2 + 1$ et $Q_2 = 2X$. Par conséquent $c_2 = (2a^2+1)/2a = a + 1/2a = v_1$ et la propriété (H_1) est vraie. Montrons le côté héréditaire. Soit n un entier naturel non nul tel que (H_n) soit vraie. On a

$$c_{2^{n+1}} = c_{2.2^n} = \frac{1}{2}\left(c_{2^n} + \frac{a^2+1}{c_{2^n}}\right) = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{a^2+1}{v_n}\right) = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{u_nv_n}{v_n}\right) = \frac{v_n + u_n}{2}$$

soit $c_{2^{n+1}} = v_{n+1}$ et le principe de récurrence permet de conclure

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad c_{2^n} = v_n.}$$

En particulier l'équivalent trouvé en 17b) redonne l'équivalent trouvé en 10b) :

$$d_n = \varepsilon_{2^n} \sim 2\sqrt{a^2+1}\rho^{2^n} .$$

19. a) Soit k un entier naturel. Par unicité de l'écriture des éléments de E et puisque $\varphi_{3k} = \varphi_k^3$, on a $P_{3k} = P_k^3 + 3(X^2+1)P_kQ_k^2$ et $Q_{3k} = 3P_k^2Q_k + (X^2+1)Q_k^3$.
Il vient, pour k non nul,

$$c_{3k} = \frac{c_k^3 + 3(a^2+1)c_k}{3c_k^2 + a^2 + 1}$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad w_{n+1} = \frac{w_n^3 + 3(a^2+1)w_n}{3w_n^2 + a^2 + 1}.}$$

b) Il vient, pour n dans $\mathbf{N}^*$,

$$w_{n+1} - \sqrt{a^2+1} = \frac{(w_n - \sqrt{a^2+1})^3}{3w_n^2 + a^2 + 1} \qquad \text{et} \qquad w_{n+1} + \sqrt{a^2+1} = \frac{(w_n + \sqrt{a^2+1})^3}{3w_n^2 + a^2 + 1}$$

d'où

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad \frac{w_{n+1} - \sqrt{a^2+1}}{w_{n+1} + \sqrt{a^2+1}} = \left(\frac{w_n - \sqrt{a^2+1}}{w_n + \sqrt{a^2+1}}\right)^3$$

et

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad |w_n - \sqrt{a^2+1}| = (w_n + \sqrt{a^2+1})\rho^{3^n} .$$

De plus, d'après 5b), pour n dans $\mathbf{N}^*$,

$$0 \leq w_n + \sqrt{a^2+1} \leq 2\sqrt{a^2+1} + \varepsilon_{3^n} \leq 2\sqrt{a^2+1} + e_{3^n-1} \leq 2\sqrt{a^2+1} + \frac{1}{2a} \leq 2a + \frac{3}{2a}$$

et finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad |w_n - \sqrt{a^2+1}| \leq \left(2a + \frac{3}{2a}\right)\rho^{3^n}.}$$

c) On prend $a = 3$. On a $2a + \dfrac{3}{2a} = 6.5 \leq 10$ et

$$\rho = \frac{\sqrt{a^2+1} - a}{\sqrt{a^2+1} + a} = \frac{1}{(\sqrt{a^2+1} + a)^2} \leq \frac{1}{a^2+1} = 10^{-1} .$$

Il vient, pour $n = 2$,

$$|w_2 - \sqrt{10}| \leq 10\ (10^{-1})^9 \leq 10^{-8}$$

et donc $\boxed{n = 2 \text{ convient.}}$
On trouve

$$w_0 = 3 \qquad w_1 = \frac{117}{37} \qquad w_2 = \frac{6406803}{2026009}$$

et

$$w_2 \simeq 3.16227766016834 \qquad \sqrt{10} \simeq 3.16227766016837$$

soit $|w_2 - \sqrt{10}| \leq 4\ 10^{-14}$!