Deuxième composition de mathématiques
Concours Communs Polytechniques – MP

Dans ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on note :

- E l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique et rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, $\mathscr{L}(E)$ la $\mathbf{R}$-algèbre des endomorphismes de E et $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des automorphismes de E.
- $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne, $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ la $\mathbf{R}$-algèbre des matrices carrées réelles de taille n, $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
- pour une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, A^{T} sa matrice transposée.
- $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ le groupe des matrices orthogonales, $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
- S_n le groupe des permutations de l'ensemble $[\![1;n]\!]$.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des réels, on note $\mathrm{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans cet ordre.
Si p est un réel supérieur ou égal à 1, on note $\|\cdot\|_p$ la **norme** p sur E, i.e. si $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. On note $\|\cdot\|_\infty$ la **norme uniforme** sur E, i.e. si $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.
Une norme N sur E est dite euclidienne s'il existe un produit scalaire φ sur E tel que pour tout x dans E, $N(x) = \sqrt{\varphi(x,x)}$
Si N est une norme sur E, on dit qu'un endomorphisme u dans $\mathscr{L}(E)$ est une N-**isométrie** si, pour tout x dans E, $N(u(x)) = N(x)$. On note $\mathrm{Isom}(N)$ l'ensemble des N-isométries. L'objectif du problème est de déterminer le nombre d'éléments de $\mathrm{Isom}(N)$ dans le cas des normes euclidiennes puis des normes p.

PARTIE I - Description des normes euclidiennes

I.1) **Identité du parallélogramme**

a) Démontrer que si N est une norme euclidienne alors elle vérifie l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire pour tous vecteurs x et y de E, on a $(N(x+y))^2 + (N(x-y))^2 = 2\left[(N(x))^2 + (N(y))^2\right]$. En déduire que la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas euclidienne.

b) Justifier que la norme $\|\cdot\|_2$ est euclidienne puis démontrer que pour $p \neq 2$, la norme $\|\cdot\|_p$ n'est pas euclidienne.

I.2) Soit $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sont deux vecteurs de E, on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les matrices colonnes associées. Démontrer que si l'on pose $\langle x \,|\, y \rangle_S = X^{\mathrm{T}} S Y$, alors $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_S$ définit un produit scalaire sur E.

I.3) Soit φ un produit scalaire sur E et S la matrice de coefficients $(\varphi(e_i, e_j))$. Justifier, pour tous vecteurs x et y de E, $\varphi(x,y) = X^{\mathrm{T}} S Y$ et $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

On a donc démontré $\varphi = \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_S$.

Toute norme euclidienne peut donc s'écrire sous la forme : $N_S : x \mapsto \sqrt{X^{\mathrm{T}} S X}$ avec $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ où X désigne la matrice colonne associée à x.

PARTIE II - Quelques généralités et exemples

Soit N une norme sur E.

II.1) Montrer que $(\mathrm{Isom}(N), \circ)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.

II.2) On note $\Sigma(N) = \{x \in E \,|\, N(x) = 1\}$, la sphère unité pour N. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer $u \in \mathrm{Isom}(N) \Leftrightarrow u\,(\Sigma(N)) = \Sigma(N)$.

II.3) Dans cette question uniquement $n = 2$. On note s la symétrie orthogonale par rapport à la droite $D = \mathrm{V}ect\,(e_1 - e_2)$ et r la rotation vectorielle d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Les endomorphismes s et r sont-ils des $\|\cdot\|_1$-isométries ?

II.4) Dans cette question uniquement $n = 3$. Si $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, on pose $q(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz$, ce qui définit une forme quadratique q.

a) On note $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$. Déterminer une matrice symétrique S dans $\mathscr{S}_3(\mathbf{R})$, telle que $q(x, y, z) = X^{\mathrm{T}} S X$.

b) Déterminer une matrice P dans $\mathscr{O}_3(\mathbf{R})$ et une matrice diagonale D dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $S = PDP^{\mathrm{T}}$.

c) Justifier alors que l'application $N_q : (x, y, z) \mapsto \sqrt{q(x, y, z)}$ est une norme euclidienne sur $\mathbf{R}^3$.

d) Déterminer la nature géométrique de la quadrique $\Sigma(N_q)$ et en donner une équation simple dans une nouvelle base.

e) Justifier que $\Sigma(N_q)$ est une surface de révolution, préciser un vecteur qui dirige son axe.

f) Déduire de la question 2, par une considération géométrique, que $\mathrm{Isom}(N_q)$ a une infinité d'éléments.

PARTIE III - Étude de $\mathrm{Isom}(N)$ lorsque N est une norme euclidienne

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on note $[u]_{\mathcal{B}}$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. Si N est une norme, on note $\mathrm{ISOM}(N) = \{[u]_{\mathcal{B}} \,|\, u \in \mathrm{Isom}(N)\}$. L'ensemble $\mathrm{ISOM}(N)$ est par construction un groupe isomorphe à $\mathrm{Isom}(N)$, c'est <u>sa version matricielle</u>.

III.1) **Caractérisation matricielle des isométries euclidiennes**

a) Soit $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, N_S la norme euclidienne associée et $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_S$ le produit scalaire associé. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer que u est une N_S-isométrie si et seulement si pour tous vecteurs x et y de E, on a $\langle u(x) \,|\, u(y) \rangle_S = \langle x \,|\, y \rangle_S$.

b) En déduire que u est une N_S-isométrie si et seulement si sa matrice A dans $\mathcal{B}$ vérifie $A^{\mathrm{T}} S A = S$.

III.2) Reconnaître alors $\mathrm{ISOM}(\|\cdot\|_2)$. Que peut-on dire du nombre d'éléments de $\mathrm{ISOM}(\|\cdot\|_2)$? Justifier votre réponse.

III.3) **Une application des polynômes interpolateurs**

$\mathbf{R}_r[X]$ désigne le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à r. On se donne $r + 1$ réels $x_0 < x_1 < \ldots < x_r$. On considère l'application linéaire u de $\mathbf{R}_r[X]$ vers $\mathbf{R}^{r+1}$ définie par $P \mapsto (P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_r))$.

a) Déterminer le noyau de u. En déduire que pour tous réels $y_0, y_1, \ldots, y_r$, il existe un unique polynôme L de $\mathbf{R}_r[X]$ tel que pour tout $i \in [\![0;r]\!]$, $L(x_i) = y_i$ (un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur).

b) Application : soit n un entier naturel non nul et $u_1, \ldots, u_n$ des réels strictement positifs, on pose $U = \operatorname{diag}(u_1, \ldots, u_n)$ et $V = \operatorname{diag}(\sqrt{u_1}, \ldots, \sqrt{u_n})$. Démontrer qu'il existe un polynôme L, à coefficients réels, tel que $V = L(U)$.

III.4) Racine carrée dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$

a) Soit $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Déterminer une matrice A dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $A^2 = S$. On dit que A est une racine carrée de S.

b) Soit $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ une autre racine carrée de S. Démontrer qu'il existe un polynôme Q, à coefficients réels, tel que $A = Q(B)$. En déduire que A et B commutent.

c) Démontrer que la somme de deux matrices symétriques définies positives est une matrice inversible.

d) Déduire des questions précédentes que $A = B$ (on pourra calculer $(A+B)(A-B)$).
Désormais, on note $\sqrt{S}$ l'unique racine carrée dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ de S.

III.5) **Étude du groupe d'isométrie pour une norme euclidienne**

Soit N une norme euclidienne. Il existe donc une matrice S dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que pour tout $x \in E$, $N(x) = N_S(x) = \sqrt{X^{\mathrm{T}} S X}$ où X est le vecteur colonne associée à x.

a) Montrer que si $M \in \mathscr{O}_n(\mathbf{R})$, la matrice $\left(\sqrt{S}\right)^{-1} M \sqrt{S}$ appartient à $\operatorname{ISOM}(N_S)$

b) Montrer que l'application ψ de $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ dans $\operatorname{ISOM}(N_S)$ définie par $M \mapsto \left(\sqrt{S}\right)^{-1} M \sqrt{S}$ est une bijection.
Le groupe d'isométrie d'une norme euclidienne est-il fini ?

PARTIE IV

Dans cette partie p est un réel strictement supérieur à 1, on appelle **exposant conjugué** de p l'unique réel q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. On appelle p-isométrie une isométrie pour la norme $\|\cdot\|_p$ et on note $\operatorname{Isom}(p)$ le groupe des p-isométries.

IV.1) a) Soit σ dans S_n et $\varepsilon = (\varepsilon_1 \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^n$. On note $u_{\sigma,\varepsilon}$ l'endomorphisme de E qui vérifie, pour tout i dans $[\![1;n]\!]$, $u_{\sigma,\varepsilon}(e_i) = \varepsilon_i e_{\sigma(i)}$. Montrer que $u_{\sigma,\varepsilon}$ est une p-isométrie.

b) Écrire la matrice de $u_{\sigma,\varepsilon}$ dans la base canonique dans le cas où $n = 4$, $\sigma = (13)(24)$ et $\varepsilon = (1, 1, -1, 1)$.

IV.2) **Inégalité de Hölder**

a) Montrer que pour tous réels a et b positifs ou nuls, on a $ab \leq \dfrac{1}{p} a^p + \dfrac{1}{q} b^q$. On pourra utiliser la fonction logarithme népérien.

b) En déduire que pour tous vecteurs x et y de E, on a $|\langle x \,|\, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q$. Ce résultat s'appelle **l'inégalité de Hölder** (on pourra d'abord démontrer l'inégalité lorsque $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$).

c) Que devient l'inégalité si $p = 2$?

Dans toute la suite, u désigne une p-isométrie. On note (a_{ij}) les coefficients de la matrice A, matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$.

IV.3) Montrer que pour tout j dans $[\![1;n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^p = 1$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^p$.

IV.4) Soit x dans E. On note $\Sigma_q = \left\{ z \in E \;\middle|\; \|z\|_q = 1 \right\}$.

a) Justifier l'existence du réel $\displaystyle\max_{y\in\Sigma_q} |\langle x \mid y\rangle|$ et montrer $\displaystyle\max_{y\in\Sigma_q} |\langle x \mid y\rangle| \leq \|x\|_p$.

b) Soit i dans $[\![1;n]\!]$; si $x_i \neq 0$, on pose $y_i = \varepsilon_i\,|x_i|^{p-1}\,\|x\|_p^{1-p}$ où ε_i désigne le signe de x_i et, si $x_i = 0$, on pose $y_i = 0$. On définit ainsi un vecteur $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Montrer $|\langle x \mid y\rangle| = \|x\|_p$, puis montrer l'égalité suivante : $\|x\|_p = \displaystyle\max_{y\in\Sigma_q} |\langle x \mid y\rangle|$.

IV.5) On note u^* l'élément de $\mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A^{T}.

a) Montrer que, pour tout (x, y) dans E^2, on a $\langle u(x) \mid y\rangle = \langle x \mid u^*(y)\rangle$.

b) En déduire que u^* est une q-isométrie. Donner alors, en justifiant, la valeur de $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |a_{ji}|^q$.

IV.6) On suppose de plus $p \neq 2$.

a) Soit α_1, α_2, …, α_r des réels dans $[0;1]$ vérifiant $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \alpha_k^p = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k^q$. Montrer avec soin que, pour tout k dans $[\![1;r]\!]$, α_k ne prend qu'un nombre fini de valeurs à déterminer.

b) En déduire que, pour tout i et j dans $[\![1;n]\!]$, $|a_{ij}|$ ne peut prendre que deux valeurs différentes que l'on précisera.

c) Montrer que, lorsque $p \neq 2$, $\mathrm{Isom}(p)$ est un groupe fini dont on déterminera le cardinal.

On remarquera en particulier que ce cardinal est indépendant de p.

On vient de démontrer que les p-isométries pour $p \neq 2$ sont en nombre fini, contrairement aux isométries euclidiennes qui forment un groupe infini (mais compact). Sur $\mathbf{R}^n$ la géométrie euclidienne est donc plus riche que celle des normes p pour $p \neq 2$.

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – CCP 2007 – MP

PARTIE II

II.1) Soit u dans $\mathrm{Isom}(N)$ et x dans $\mathrm{Ker}(u)$. On a alors $N(x) = N(u(x)) = N(0) = 0$ et donc $x = 0$. Il en résulte que u est injective et donc, u étant un endomorphisme d'un espace de dimension finie, $u \in \mathrm{GL}(E)$. Autrement dit $\mathrm{Isom}(N) \subset \mathrm{GL}(E)$. De plus Id_E est une N-isométrie et donc $\mathrm{Isom}(N)$ n'est pas vide.

Soit maintenant u et v dans $\mathrm{Isom}(N)$ et x dans E. Puisque $v \in \mathrm{Isom}(N)$, $v^{-1}(x)$ existe et on a $N(x) = N(v \circ v^{-1}(x)) = N(v^{-1}(x))$ et, puisque $u \in \mathrm{Isom}(N)$, $N(v^{-1}(x)) = N(u \circ v^{-1}(x))$, d'où $u \circ v^{-1} \in \mathrm{Isom}(N)$. Il en résulte que $\boxed{(\mathrm{Isom}(N), \circ) \text{ est un sous-groupe de } \mathrm{GL}(E).}$

II.2) Soit u dans $\mathrm{Isom}(N)$ et x dans $\Sigma(N)$, alors $N(u(x)) = N(x) = 1$ et, puisque $u^{-1} \in \mathrm{Isom}(N)$, $N(u^{-1}(x)) = N(x) = 1$. Il en résulte $u(x) \in \Sigma(N)$ et x est l'image d'un élément de $\Sigma(N)$ par u. Donc $u\left(\Sigma(N)\right) = \Sigma(N)$.

Réciproquement, soit u dans $\mathscr{L}(E)$ tel que $u\left(\Sigma(N)\right) = \Sigma(N)$ et soit x dans E. On écrit $x = N(x)y$ avec y dans $\Sigma(N)$. Il vient $u(x) = N(x)u(y)$ et donc $N(u(x)) = N(x)N(y) = N(x)$, par homogénéité. $\boxed{\text{Pour } u \text{ dans } \mathscr{L}(E), \text{ on a } u \in \mathrm{Isom}(N) \Leftrightarrow u\left(\Sigma(N)\right) = \Sigma(N).}$

II.3) La sphère unité $\Sigma(\|\cdot\|_1)$ est le carré de sommets $\pm e_i$, avec $1 \leq i \leq 2$. Comme r transforme ce carré en un carré différent, ayant $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ comme sommet, $\boxed{r \notin \mathrm{Isom}(\|\cdot\|_1).}$ Par contre la droite D étant une diagonale du carré, s laisse fixe $\Sigma(\|\cdot\|_1)$ et donc $\boxed{s \in \mathrm{Isom}(\|\cdot\|_1).}$

PARTIE IV

IV.1) Soit x dans E avec $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $u = u_{\sigma,\varepsilon}$. On a donc

$$\|u(x)\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} \left|x_{\sigma^{-1}(i)}\right|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p = \|x\|_p^p$$

par réindexation, puisque σ est bijective. Autrement dit $\boxed{u_{\sigma,\varepsilon} \text{ est une } p\text{-isométrie.}}$

IV.2) a) Soit a et b dans $\mathbf{R}_+$. Si a ou b est nul, on a $ab = 0$ et donc $ab \leq \dfrac{1}{p}a^p + \dfrac{1}{q}b^q$. On suppose dorénavant a et b dans $\mathbf{R}_+^*$. Par concavité du logarithme, il vient

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab)$$

et donc, par croissance de l'exponentielle $ab \leq \dfrac{1}{p}a^p + \dfrac{1}{q}b^q$. Il en résulte que

$$\boxed{\text{pour tous réels } a \text{ et } b \text{ positifs ou nuls, on a } ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.}$$

b) Soit x et y dans E avec $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. On écrit $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$. Pour i entier entre 1 et n, on a, d'après ce qui précède, $x_i y_i \leq |x_i| . |y_i| \leq \dfrac{1}{p}|x_i|^p + \dfrac{1}{q}|y_i|^q$ et donc, en sommant, $\langle x \,|\, y \rangle \leq \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. En appliquant ce qui précède à $-x$ et y, il vient $-\langle x \,|\, y \rangle \leq 1$ et donc $|\langle x \,|\, y \rangle| \leq 1 = \|x\|_p \|y\|_q$.

Dans le cas général, on écrit $x = \|x\|_p x'$ et $y = \|y\|_q y'$ avec $\|x'\|_p = 1$ et $\|y'\|_q = 1$ et il vient

$$|\langle x \mid y \rangle| = \|x\|_p \|y\|_q |\langle x' \mid y' \rangle| \le \|x\|_p \|y\|_q \ .$$

D'où $\boxed{\text{l'inégalité de Hölder.}}$

c) Lorsque $p = 2$ $\boxed{\text{l'inégalité de Hölder est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.}}$

IV.3) On a, pour j entier entre 1 et n, $\|u(e_j)\|_p = \|e_j\|_p = 1$ et donc $\boxed{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^p = 1.}$ En sommant sur j, il vient $\boxed{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^p = n.}$

IV.4) Soit x dans E. On note $\Sigma_q = \left\{ z \in E \;\middle|\; \|z\|_q = 1 \right\}$.

a) D'après l'inégalité de Hölder, pour x dans E et y dans Σ_q, on a $|\langle x \mid y \rangle| \le \|x\|_p \|y\|_q = \|x\|_p$. Par définition de la borne supérieure, puisque Σ_q est non vide, il vient $\boxed{\sup_{y \in \Sigma_q} |\langle x \mid y \rangle| \le \|x\|_p.}$

b) Par construction, on a $y = 0$ si $x = 0$ et sinon, en notant $I = \{i \in [\![1;n]\!] \mid x_i \neq 0\}$, on a $I \neq \emptyset$ et

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \|x\|_p^{1-p} \sum_{i \in I} \varepsilon_i x_i |x_i|^{p-1} = \|x\|_p$$

et donc, par positivité, dans tous les cas $\boxed{|\langle x \mid y \rangle| = \|x\|_p.}$

Par ailleurs, si $x \neq 0$,

$$\|y\|_q^q = \|x\|_p^{q(1-p)} \sum_{i \in I} |x_i|^{q(p-1)} = \|x\|_p^{-p} \|x\|_p^p = 1$$

et donc

$$\sup_{y \in \Sigma_q} |\langle x \mid y \rangle| \ge |\langle x \mid y \rangle| = \|x\|_p \ .$$

Cette dernière inégalité est directe si $x = 0$ puisque les termes sont tous nuls. Par double inégalité, il vient $\sup_{y \in \Sigma_q} |\langle x \mid y \rangle| = |\langle x \mid y \rangle| = \|x\|_p$ et, puisque la borne est atteinte, $\boxed{\|x\|_p = \max_{y \in \Sigma_q} |\langle x \mid y \rangle|.}$

IV.5) a) Soit x et y dans E et X et Y les vecteurs colonnes associés relativement à la base $\mathcal{B}$. On a donc $\langle u(x) \mid y \rangle = (AX)^{\mathrm{T}} Y = X^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} Y$, i.e. $\boxed{\langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u^*(y) \rangle.}$

b) D'après ce qui précède, appliqué au couple d'exposants conjugués (q, p), on a, pour x dans E, par définition de u^* et puisque $u(\Sigma_p) = \Sigma_p$:

$$\|u^*(x)\|_q = \max_{y \in \Sigma_p} |\langle u^*(x) \mid y \rangle| = \max_{y \in \Sigma_p} |\langle x \mid u(y) \rangle| = \max_{y \in u(\Sigma_p)} |\langle x \mid y \rangle| = \max_{y \in \Sigma_p} |\langle x \mid y \rangle| = \|x\|_q \ ,$$

$\boxed{u^* \text{ est une } q\text{-isométrie.}}$

En appliquant le résultat de II.3, la somme des puissances q^{e} des modules des coefficients de la matrice de u^* dans $\mathcal{B}$ est égale à n. Il en résulte $\boxed{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ji}|^q = n.}$

IV.6) a) Pour α dans $]0;1[$, la fonction $t \mapsto \alpha^t$ est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$. Pour $\alpha \in \{0,1\}$, la même fonction est constante, donc décroissante au sens large. Comme $p \neq 2$, on a $p \neq q$ et donc les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\alpha_k^p$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\alpha_k^q$ sont ordonnées à l'inverse de p et q. Si l'un des α_k est distinct de 0 et 1, alors les deux sommes sont strictement ordonnées. Par contraposée $\boxed{\text{pour tout } k \text{ dans } [\![1;r]\!],\ \alpha_k \text{ ne prend que les valeurs 0 ou 1.}}$

b) Puisque $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^p = n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ji}|^q$, d'après II.3 et II.5b, il résulte de ce qui précède (avec $r = n^2$ et $a_{ij} = \alpha_{n(i-1)+j}$) que,

$\boxed{\text{pour tout } i \text{ et } j \text{ dans } [\![1;n]\!],\ |a_{ij}| \text{ ne peut prendre que les deux valeurs 0 ou 1.}}$

c) D'après II.3, pour j dans $[\![1;r]\!]$, $\sum_{i=1}^{n}|a_{ji}|^p = 1$ et donc A est une matrice constituée de 0 et de ± 1, avec un seul élément non nul par colonne. Comme A^{T} est la matrice d'une q-isométrie avec $q \neq 2$, A^{T} a aussi cette propriété, i.e. A ne comporte qu'un seul élément non nul par ligne. Il en résulte que u est de la forme $u_{\sigma,\varepsilon}$ avec $\sigma \in S_n$ et $\varepsilon \in \{-1,+1\}^n$.
On a vu en II.1 que si u est de cette forme, alors $u \in \text{Isom}(p)$. Il en résulte que $\text{Isom}(p)$ est en bijection (ensembliste) avec $S_n \times \{-1,+1\}^n$ et est donc de cardinal $2^n n!$:

$\boxed{\text{Isom}(p) \text{ est un groupe fini de cardinal } 2^n n!.}$