Deuxième épreuve de mathématiques
CCINP 2014 – MP

Ce sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

PROBLÈME – CCINP 2014

Notations et rappels

Soit n un entier supérieur à 1. On désigne par $\mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans cet ordre. Pour M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on note M^{T} sa transposée. On note $E = \mathbf{R}^n$ et on munit l'espace vectoriel E du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée. On note $\mathscr{S}(E)$ le sous-espace des endomorphismes auto-adjoints de E, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes s de E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2 \, , \; \langle s(x) \mid y \rangle = \langle x \mid s(y) \rangle \; .$$

Un endomorphisme auto-adjoint s de E est dit positif (respectivement défini positif) si :

$$\forall x \in E \, , \; \langle s(x) \mid x \rangle \geq 0 \quad \text{(respectivement } \forall x \in E \setminus \{0\} \, , \; \langle s(x) \mid x \rangle > 0) \; .$$

Une matrice S de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est dite symétrique positive (respectivement symétrique définie positive) si :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \;\; X^{\mathrm{T}} S X \geq 0 \quad \text{(respectivement } \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0\} \;\; X^{\mathrm{T}} S X > 0) \; .$$

On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ (respectivement $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (respectivement symétriques définies positives) de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

On rappelle qu'un endomorphisme s de E est auto-adjoint (respectivement auto-adjoint positif, auto-adjoint défini positif) si, et seulement si, sa matrice dans toute base orthonormée de E est symétrique (respectivement symétrique positive, symétrique définie positive).

On admet que, pour tous réels positifs $a_1, \dots, a_n$, on a

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{(inégalité arithmético-géométrique.)}$$

Objectif du problème

On se donne une matrice S de $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ (ou $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$) et on étudie le maximum (ou minimum) de la forme linéaire $A \mapsto \mathrm{tr}(AS)$ sur des ensembles de matrices.

PARTIE I - Questions préliminaires

Q1. a) Énoncer (sans démonstration) le théorème de réduction des endomorphismes auto-adjoints de l'espace euclidien E et sa version relative aux matrices symétriques réelles.

b) Toute matrice symétrique à coefficients complexes est-elle nécessairement diagonalisable ? On pourra par exemple considérer la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$:

$$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \; .$$

Q2. Soit s dans $\mathscr{S}(E)$, de valeurs propres (réelles) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \; .$$

Soit $\beta = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de E telle que, pour tout i dans $[\![1; n]\!]$, ε_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i. Pour tout vecteur x de E, on pose :

$$R_x(x) = \langle s(x) \mid x \rangle \; .$$

a) Exprimer $R_s(x)$ à l'aide des λ_i et des coordonnées de x dans la base β.

b) En déduire l'inclusion : $R_s(S(0,1)) \subset [\,\lambda_1 ; \lambda_n\,]$ où $S(0,1)$ désigne la sphère unité de E.

Q3. a) On suppose dans cette question que s est auto-adjoint positif (respectivement auto-adjoint défini positif). Démontrer que les valeurs propres de s sont toutes positives (respectivement strictement positives).

b) Soit S dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ avec $S = (s_{i,j})$, de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

On note s l'endomorphisme de E représenté par S dans la base canonique $B = (e_1, \cdots, e_n)$. Exprimer le terme général $s_{i,j}$ de S comme un produit scalaire et démontrer :

$$\forall i \in [\![1; n]\!] \quad \lambda_1 \leq s_{i,i} \leq \lambda_n \ .$$

PARTIE II - Un maximum sur $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$

On note I_n la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Q4. Démontrer que l'application $M \mapsto M^{\mathrm{T}}M - I_n$ est continue de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Q5. Justifier que, si A est une matrice orthogonale, alors en notant $A = (a_{i,j})$:

$$\forall (i,j) \in [\![1; n]\!]^2 \quad |a_{i,j}| \leq 1 \ .$$

Q6. En déduire que le groupe orthogonal $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est une partie compacte de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Q7. Soit S dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$, de valeurs propres (positives) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On pose $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.
Si A est une matrice orthogonale, on note $T(A)$ le nombre réel $T(A) = \mathrm{tr}(AS)$.

a) Soit A dans $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale B telle que :

$$T(A) = \mathrm{tr}(B\Delta) \ .$$

b) Démontrer que l'application T de $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$ admet un maximum sur $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ que l'on notera t.

c) Démontrer que, pour toute matrice orthogonale A de $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$, $T(A) \leq \mathrm{tr}(S)$, puis déterminer le réel t.

PARTIE III - Inégalité de Hadamard

Soit S dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ avec $S = (s_{i,j})$, de valeurs propres (réelles positives) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \ .$$

Q8. Démontrer l'inégalité valable pour tout S dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$:

$$\det(S) \leq \left(\frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(S)\right)^n \ . \qquad (\star)$$

Q9. Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$, $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $S_\alpha = D^{\mathrm{T}}SD$. Démontrer $S_\alpha \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ et calculer $\mathrm{tr}(S_\alpha)$.

Q10. Dans cette question on suppose que les coefficients diagonaux $s_{i,i}$ de S sont strictement positifs et, pour $1 \leq i \leq n$, on pose $\alpha_i = \dfrac{1}{\sqrt{s_{i,i}}}$. En utilisant l'inégalité $(\star)$, démontrer :

$$\det(S) \leq \prod_{i=1}^{n} s_{i,i} \ .$$

Q11. Pour tout réel ε strictement positif, on pose $S_\varepsilon = S + \varepsilon I_n$. Démontrer $\det(S_\varepsilon) \leq \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(s_{i,i} + \varepsilon)$, puis conclure :

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \leq \prod_{i=1}^{n} s_{i,i} \quad \text{(inégalité d'Hadamard)} \ .$$

PARTIE IV - Application de l'inégalité de Hadamard : détermination d'un minimum

Soit S dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, de valeurs propres vérifiant $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$, et $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Soit $\Omega \in \mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ telle que $S = \Omega \Delta \Omega^{\mathrm{T}}$. On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ de déterminant égal à 1.

Q12. Démontrer que, pour tout A dans $\mathcal{U}$, la matrice B donnée par $B = \Omega^{\mathrm{T}} A \Omega$ est une matrice de $\mathcal{U}$ vérifiant $\operatorname{tr}(AS) = \operatorname{tr}(B\Delta)$.

Q13. Démontrer $\{\operatorname{tr}(AS) \mid A \in \mathcal{U}\} = \{\operatorname{tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$, puis que ces ensembles admettent une borne inférieure que l'on notera m.

Q14. Démontrer, pour $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$, $\operatorname{tr}(B\Delta) \geq n(\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{1/n}(b_{1,1} \cdots b_{n,n})^{1/n}$.

Q15. En déduire que, pour $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$, on a $\operatorname{tr}(B\Delta) \geq n(\det(S))^{1/n}$.

Q16. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on pose $\mu_k = \dfrac{1}{\lambda_k}(\det(S))^{1/n}$ et $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

Déterminer le réel m.

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES – CCINP 2023 & 2014 – MP

PROBLÈME – CCINP 2014

PARTIE I - Questions préliminaires

Q17. a) $\boxed{\text{Tout endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien est ortho-diagonalisable.}}$

$\boxed{\text{Toute matrice symétrique réelle est ortho-semblable à une matrice diagonale.}}$

b) Soit $S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$. En notant χ_S son polynôme caractéristique, on a $\chi_S = X^2 - i^2 - 1 = X^2$. On en déduit que S est nilpotente mais non nulle et ne saurait donc être diagonalisable. Comme elle est cependant symétrique $\boxed{\text{une matrice symétrique complexe n'est pas nécessairement diagonalisable.}}$

Q18. Pour x dans E, on note $(x_1, \ldots, x_n)$ ses coordonnées dans β.

a) Soit x dans E. On écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et il vient, puisqu'on a affaire à une base de diagonalisation,

$s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$ et donc, par orthonormalité, $\boxed{R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.}$

b) Soit x dans $S(0,1)$. On a alors $1 = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, par orthonormalité de β. On en déduit que $R_s(x)$ est une combinaison convexe de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ puisque $(x_1^2, \ldots, x_n^2)$ est une famille de réels positifs de somme 1. Étant une moyenne, cette quantité est comprise entre le plus petit et le plus grand des λ_i, i.e. $\boxed{R_s(S(0,1)) \subset [\lambda_1; \lambda_n].}$

Q19. a) Par définition si s est auto-adjoint positif (respectivement auto-adjoint défini positif) $R_s(S(0,1))$ est inclus dans $\mathbf{R}_+$ (respectivement $\mathbf{R}_+^*$). La question précédente montre alors que

$\boxed{\text{les valeurs propres de } s \text{ sont toutes positives (respectivement strictement positives).}}$

b) Soit i et j dans $[\![1;n]\!]$. Le coefficient $s_{i,j}$ de S est la i^{e} coordonnée de $s(e_j)$. Comme la base canonique est orthonormée pour le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$, cette coordonnée s'écrit $\boxed{s_{i,j} = \langle s(e_j) \mid e_i \rangle}$. Ainsi $s_{i,i} = R_s(e_i)$ et donc, d'après la question précédente $\boxed{\lambda_1 \leq s_{i,i} \leq \lambda_n.}$

PARTIE II - Un maximum sur $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$

Q20. La transposition est linéaire, le produit est bilinéaire et une translation est une isométrie. Comme $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est de dimension finie, on en déduit que $\boxed{M \mapsto M^{\mathrm{T}} M - I_n \text{ est continue sur } \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).}$

Q21. Soit A une matrice orthogonale. En notant $A = (a_{i,j})$, pour (i,j) dans $[\![1;n]\!]$, on a, d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, $|a_{i,j}| = |\langle s(e_j) \mid e_i \rangle| \leq \|s(e_j)\| \, \|e_1\|$. Or s préserve la norme et la base canonique est unitaire. On en déduit $\boxed{|a_{i,j}| \leq 1.}$

Q22. Les normes étant équivalentes en dimension finie et $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ étant de dimension finie, on peut le munir d'une norme quelconque, par exemple la norme de la convergence uniforme. Pour cette norme, la question précédente montre que $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est inclus dans boule unité fermée, donc un compact d'après le théorème de HEINE-BOREL. D'après la question 20 c'est l'image réciproque du singleton $\{0\}$ par une application continue. Or le singleton $\{0\}$ est une partie fermée de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, donc $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est une partie fermée de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Étant fermée dans un compact, on en déduit que $\boxed{\mathscr{O}_n(\mathbf{R}) \text{ est une partie compacte de } \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).}$

Q23. a) D'après le théorème spectral on dispose de P dans $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ tel que $S = P^{\mathrm{T}}\Delta P$. Ainsi on a $T(A) = \operatorname{tr}(AP^{\mathrm{T}}\Delta P)$. Par circularité de la trace, $T(A) = \operatorname{tr}(PAP^{\mathrm{T}}\Delta)$. Puisque $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est un groupe, stable par inverse donc par transposition, en posant $B = PAP^{\mathrm{T}}$, on a $\boxed{B \in \mathscr{O}_n(\mathbf{R}) \text{ et } T(A) = \operatorname{tr}(B\Delta).}$

b) Le produit est bilinéaire et la trace est linéaire, donc $A \mapsto \operatorname{tr}(AS)$ est continu sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. D'après la question 22, $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est compact et donc, d'après le théorème de Weierstrass,

$\boxed{T \text{ admet un maximum sur } \mathscr{O}_n(\mathbf{R}).}$

c) Soit A dans $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$. D'après la question 23a on dispose de B dans $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ tel que $T(A) = \operatorname{tr}(B\Delta)$ et donc, en notant $B = (b_{i,j})$, $T(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_{i,i}\lambda_i$. Il résulte donc de la question 21 et de la positivité des valeurs propres de S, $T(A) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et donc, par invariance de la trace par changement de base, $\boxed{T(A) \leq \operatorname{tr}(S).}$ Comme $T(I_n) = \operatorname{tr}(S)$ et que I_n est orthogonale, il vient $\boxed{t = \operatorname{tr}(S).}$

PARTIE III - Inégalité de Hadamard

Q24. Si la matrice S est diagonale à diagonale positive, l'inégalité ($\star$) est une reformulation de l'inégalité arithmético-géométrique. Comme le déterminant et la trace sont des invariants de conjugaison et que, d'après le théorème spectral, S est (ortho-)semblable à une matrice diagonale à diagonale positive, il vient $\boxed{\det(S) \leq \left(\dfrac{1}{n}\operatorname{tr}(S)\right)^n.}$

Q25. On a directement $S_\alpha^{\mathrm{T}} = D^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}D = S_\alpha$ et donc S_α est symétrique réelle. De plus, pour X dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, en posant $Y = DX$, il vient $X^{\mathrm{T}}S_\alpha X = Y^{\mathrm{T}}SY \geq 0$, par positivité de S, et donc $\boxed{S_\alpha \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R}).}$ Pour i et j dans $[\![1;n]\!]$, on a $S_\alpha = (\alpha_i s_{i,j}\alpha_j)$ et donc $\boxed{\operatorname{tr}(S_\alpha) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\alpha_i^2.}$

Q26. D'après l'inégalité ($\star$), on a $\det(S_\alpha) \leq 1$ puisque $\operatorname{tr}(S_\alpha) = 1$ dans ce cas. Par multiplicativité et invariance par transposition du déterminant on a $\det(S_\alpha) = \det(S)\det(D)^2$ et donc $\boxed{\det(S) \leq \displaystyle\prod_{i=1}^{n} s_{i,i}.}$

Q27. Soit ε dans $\mathbf{R}_+^*$. On a $\operatorname{Sp}(S) \subset \mathbf{R}_+$ et $\operatorname{Sp}(S_\varepsilon) = \varepsilon + \operatorname{Sp}(S) \subset \mathbf{R}_+^*$. Puisque S_ε est encore symétrique réelle, on en conclut $S_\varepsilon \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Les coefficients diagonaux de S_ε étant les $(s_{i,i} + \varepsilon)$, la question précédente donne $\boxed{\det(S_\varepsilon) \leq \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(s_{i,i} + \varepsilon).}$ Le déterminant est polynomial donc continu, car $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est de dimension finie, tout comme la multiplication par I_n et la translation par S. On peut donc passer à la limite en 0 dans la question précédente et obtenir $\det(S) \leq \displaystyle\prod_{i=1}^{n} s_{i,i}$. Par inviariance par conjugaison du déterminant, il est équivalent d'écrire $\boxed{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \leq \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}.}$

PARTIE IV - Application de l'inégalité de Hadamard : détermination d'un minimum

Q28. Puisque B est ortho-semblable à S, elle est également ortho-semblable à une matrice diagonale à diagonale strictement positive, et donc $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Par circularité de la trace on a $\operatorname{tr}(AS) =$

$\mathrm{tr}(\Omega^{\mathrm{T}} A\Omega\Delta) = \mathrm{tr}(B\Delta)$. Par multiplicativité du déterminant on a $\det(B) = \det(A)$ car $\Omega^{\mathrm{T}} = \Omega^{-1}$ par orthogonalité de Ω. On en déduit $\boxed{B \in \mathcal{U} \text{ et } \mathrm{tr}(AS) = \mathrm{tr}(B\Delta).}$

Q29. Les calculs précédents donnent, avec les mêmes notations, $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \iff A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, $\det(B) = \det(A)$ et $\mathrm{tr}(AS) = \mathrm{tr}(B\Delta)$. On en déduit $A \in \mathcal{U} \iff \mathcal{B} \in \mathcal{U}$ et donc

$\boxed{\{\mathrm{tr}(AS) \mid A \in \mathcal{U}\} = \{\mathrm{tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}.}$ En notant $B = (b_{i,j})$, on a $\mathrm{tr}(B\Delta) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_{i,i}\lambda_i$ et donc, puisque B est symétrique définie positive, il résulte de la question 19b que tous les termes de cette somme sont positifs et donc le second ensemble est minoré par 0. Par égalité entre les deux, $\boxed{\text{les deux ensembles admettent une borne inférieure.}}$

Q30. Au vu de l'expression obtenue à la question précédente, il résulte directement de l'inégalité arithmético-géométrique qu'on a $\boxed{\mathrm{tr}(B\Delta) \geq n(\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{1/n}(b_{1,1} \cdots b_{n,n})^{1/n}.}$

Q31. D'après l'inégalité de Hadamard, on a $b_{1,1} \cdots b_{n,n} \geq \det(B) = 1$ et il vient donc, par invariance du déterminant par conjugaison, $\boxed{\mathrm{tr}(B\Delta) \geq n(\det(S))^{1/n}.}$

Q32. Par construction D est une matrice diagonale à diagonale strictement positive, donc appartient à $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. De plus par multilinéarité du déterminant $\det(D) = \det(S)/(\lambda_1 \cdots \lambda_n) = 1$ et par conséquent $D \in \mathcal{U}$. Les calculs précédents donnent $\mathrm{tr}(D\Delta) = n\det(S)^{1/n}$. Il en résulte que le minorant trouvé à la question précédente est atteint dans l'ensemble $\{\mathrm{tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$, et donc aussi dans $\{\mathrm{tr}(AS) \mid A \in \mathcal{U}\}$ puisque ces deux ensembles sont égaux. Ainsi $\boxed{m = n\det(S)^{1/n}.}$