Première composition
CCINP 2016 – MP

EXERCICE I

On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y'' + (x^2 - x)y' + 2y = 0$.
Existe-t-il des solutions non nulles de l'équation (E) développables en série entière sur un intervalle $]-r;r[$ $(r > 0)$ de $\mathbf{R}$?

EXERCICE II

II.1. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

II.2. Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose que la loi conjointe du couple (X, Y) vérifie :

$$\forall (i,j) \in \mathbf{N}^2\,,\ \mathbf{P}\,(X = i, Y = j) = \mathbf{P}\,((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}\ .$$

II.2.a. Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi conjointe.

II.2.b. Démontrer que les variables X et Y suivent une même loi que l'on déterminera.

II.2.c. Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?

PROBLÈME : Fonction Digamma

Partie préliminaire

III.1.

III.1.a. Soit x dans $\mathbf{R}_+^*$; démontrer que la fonction $t \longmapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$.

III.1.b. On note alors, pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ (fonction Γ d'Euler).

Démontrer $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $\Gamma(x) > 0$.

III.1.c. Démontrer que Γ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ puis exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

III.2. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}$.

III.2.a. Utiliser un théorème du cours pour justifier simplement que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ converge.

III.2.b. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

Démontrer que la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ converge.

La limite de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ sera notée γ *dans tout le sujet* (γ est appelée constante d'Euler). Dans la suite de ce problème, on définit, pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$, $\Psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ appelée fonction Digamma.

Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

III.3. Pour x dans $\mathbf{R}_+^*$ et n entier vérifiant $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur $\mathbf{R}_+^*$ telle que :

$$\forall t \in\,]0;n]\,,\ f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \text{ et } \forall t \in\,]n;+\infty[\,,\ f_n(t) = 0\ .$$

III.3.a. Démontrer, pour $x < 1$, $\ln(1-x) \leq -x$.

En déduire, pour n entier vérifiant $n \geq 1$, et x et t dans $\mathbf{R}_+^*$,

$$0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}t^{x-1}\ .$$

III.3.b. En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer, pour x dans $\mathbf{R}_+^*$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

III.4. On pose, pour n entier naturel et x dans $\mathbf{R}_+^*$, $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,\mathrm{d}u$.

III.4.a. Après avoir justifié l'existence de l'intégrale $I_n(x)$, déterminer, pour $x > 0$ et $n \geq 1$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.

III.4.b. En déduire, pour n entier naturel et x dans $\mathbf{R}_+^*$ une expression de $I_n(x)$.

III.4.c. Démontrer, pour x dans $\mathbf{R}_+^*$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,n^x}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)} \text{ (formule de G}{\scriptstyle\text{AUSS}}\text{)}\,.$$

III.5. Pour n entier vérifiant $n \geq 1$, on note toujours $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

En remarquant, pour $n \geq 1$ et x dans $\mathbf{R}_+^*$, $\displaystyle\frac{1}{n^x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) = e^{xH_n}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right]$, démontrer, pour x dans $\mathbf{R}_+^*$: $\displaystyle\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right]$ (formule de WEIERSTRASS).

III.6.

III.6.a. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right]$ converge simplement sur $\mathbf{R}_+^*$.

III.6.b. On pose, pour x dans $\mathbf{R}_+^*$: $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right]$. Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et exprimer $g'(x)$ comme somme d'une série de fonctions.

III.6.c. En déduire que, pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$, $\Psi(x) = -\dfrac{1}{x} - \gamma + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right)$. On rappelle, pour x dans $\mathbf{R}_+^*$, $\Psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

III.7.

III.7.a. Que vaut $\Psi(1)$? En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t$.

III.7.b. Calculer, pour x dans $\mathbf{R}_+^*$, $\Psi(x+1)-\Psi(x)$, puis démontrer que, pour n entier vérifiant $n \geq 2$, $\Psi(n) = -\gamma + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

III.7.c. On pose, pour (x,y) dans $(\mathbf{R}_+^*)^2$ et k entier naturel, $j_k(y) = \dfrac{1}{k+y+1} - \dfrac{1}{k+y+x}$. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} j_k$ converge uniformément sur $\mathbf{R}_+^*$.

En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\Psi(x+n)-\Psi(1+n)$.

III.8. Déterminer l'ensemble des applications f définies sur $\mathbf{R}_+^*$ et à valeurs réelles vérifiant les trois conditions :

— $f(1) = -\gamma$,

— pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$, $f(x+1) = f(x) + \dfrac{1}{x}$,

— pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (f(x+n) - f(1+n)) = 0$.

Autour de la fonction Digamma

III.9. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

On effectue un premier tirage d'une boule dans l'urne et on adopte le protocole suivant :

si on a tiré la boule numéro k, on la remet alors dans l'urne avec k nouvelles boules toutes numérotées k.

Par exemple, si on a tiré la boule numéro 3, on remet quatre boules de numéro 3 dans l'urne (la boule tirée plus trois nouvelles boules numérotées 3).

On effectue ensuite un deuxième tirage d'une boule.

On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au premier tirage (respectivement au deuxième tirage).

III.9.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire X ainsi que son espérance $\mathbf{E}(X)$.

III.9.b. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y et vérifier que, pour tout entier naturel non nul k, $\mathbf{P}(Y = k) = \dfrac{1}{n}\left(\Psi(2n+1) - \Psi(n+1) + \dfrac{k}{n+k}\right)$.

III.9.c. Calculer l'espérance $\mathbf{E}(Y)$. On pourra utiliser sans démonstration

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n(n+k)} = \frac{1-n}{2} + n(\Psi(2n+1) - \Psi(n+1)) \,.$$

Première composition – CCINP 2016 – MP

EXERCICE I

Soit r strictement positif et $\sum_n x^n$ le développement en série entière d'une telle solution non nulle sur $]-r;r[$. Comme une telle solution est de classe C^∞ sur $]-r;r[$, de dérivées données par dérivation terme à terme de la série entière, on en déduit $2a_0=0$, et donc $a_0=0$, puis que pour tout entier naturel n supérieur à 1, on a $n(n-1)a_n+(n-1)a_{n-1}-na_n+2a_n=0$, i.e. $((n-1)^2+1)a_n+(n-1)a_{n-1}=0$, et donc $a_{n-1}=0 \implies a_n=0$ car le coefficient de a_n est toujours strictement positif. Une telle solution est donc nulle. Cette contradiction assure que $\boxed{\text{une telle solution n'existe pas.}}$

Élements de notation : Justification de la dérivation terme à terme : 1 ; Cas $n=0$: 1 ; Relation a_n/a_{n-1} : 1 ; conclusion :1.

EXERCICE II

II.1. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Son espérance est donc égale à 2, de sorte qu'on a $\mathbf{E}(Z)=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{i}{2^i}=2.$

La famille considérée est à termes positifs. Le théorème de Tonelli assure donc qu'on peut en faire la somme dans $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ et que cette somme ne dépend pas de l'ordre de sommation. Pour tout j dans $\mathbf{N}$, d'après la formule de transfert et par linéarité de l'espérance, on a

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i+j}{2^{i+j}}=\frac{1}{2^{j-1}}\mathbf{E}(Z+j-1)=\frac{j+1}{2^{j-1}}$$

et donc, en sommant en j, $\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j+1}{2^{j-1}}=4\mathbf{E}(Z)=8$. Autrement dit

$$\boxed{\left(\frac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}\text{ est sommable, de somme 8.}}$$

Élements de notation : Termes positifs : 1 ; Tonelli : 1 ; Justification des sommes : 1 ; Résultat : 1.

II.2.

II.2.a. La relation de l'énoncé définit une loi conjointe de variables entières si et seulement si la fonction $(i,j)\mapsto\frac{i+j}{2^{i+j+3}}$ est définie sur $\mathbf{N}^2$, à valeurs positives et si la somme de ses valeurs est 1, autrement dit si et seulement la famille $\left(\frac{i+j}{2^{i+j+3}}\right)_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ est bien définie, positive et sommable de somme 1. Les deux premiers points sont directs et le dernier résulte de la question précédente. Ainsi la relation donnée définit bien $\boxed{\text{une loi conjointe.}}$

Élements de notation : Traduction en hypothèses : 1 ; Famille définie : 1 ; Famille positive : 1 ; Somme 1 : 1.

II.2.b. Les lois marginales de X et Y s'obtiennent par sommation par rapport à un des indices. La formule donnant la loi conjointe étant symétrique en i et j et les domaines de définition de i et j étant égaux, les lois marginales sont identiques. Plus précisément elles sont à valeurs entières et de loi donnée par le calcul de la première question : $\boxed{X\sim Y,\ X(\Omega)=\mathbf{N}\text{ et pour } i \text{ dans } \mathbf{N},\ \mathbf{P}(X=i)=\frac{i+1}{2^{i+2}}.}$

Élements de notation : Domaine de définition de X et Y : 1 ; Symétrie : 1 ; Conclusion : 0/2.

II.2.c. L'événement $(X = Y = 0)$ est par hypothèse de probabilité nulle, tandis que l'événement $(X = 0)$ (et donc aussi l'événement $Y = 0$) est de probabilité donnée par la somme de la famille $\left(\dfrac{j}{2^{j+3}}\right)_{j\in\mathbf{N}}$.
Cette famille étant positive et non identiquement nulle, sa somme n'est pas nulle et ainsi

$$\mathbf{P}(X=0)\,\mathbf{P}(Y=0) > 0 = \mathbf{P}(X=Y=0)\ .$$

Par conséquent $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

Élements de notation : Conclusion : 1 ; Justification complète et correcte : 0/3.

PROBLÈME : Fonction Digamma

Partie préliminaire

III.1.

III.1.a. La fonction étudiée est bien définie et de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$ comme produit de fonctions de référence. Elle y est donc localement intégrable. En $+\infty$, elle est dans $\mathrm{O}\left(e^{-t/2}\right)$, par croissance comparée, et y est donc localement intégrable par comparaison à une fonction positive et intégrable au voisinage de $+\infty$. Enfin au voisinage de 0 à droite, elle est équivalente à la fonction positive $t \mapsto t^{x-1}$ et comme on a $x - 1 > 1$, le critère de RIEMANN permet de conclure qu'elle y est localement intégrable. Il en résulte qu'elle est $\boxed{\text{intégrable sur } \mathbf{R}_+^*.}$

Élements de notation : Définie : 1 ; Localement intégrable : 1 ; Comparaison positive en $+\infty$: 1 ; Critère RIEMANN en 0 : 1.

III.1.b. Soit x dans $\mathbf{R}_+^*$. L'intégrande étant une fonction positive, Γ l'est aussi. L'intégrande étant continu et non identiquement nul, Γ est à valeurs strictement positives. Ainsi on a $\boxed{\Gamma(x) > 0.}$

Élements de notation : Positivité 0/2 ; Continu et non indentiquement nul : 0/2.

III.1.c. L'intégrande est une fonction de classe C^∞ en les deux variables x et t et sa dérivée partielle par rapport à x est donnée par $t \mapsto \ln(t)e^{-t}t^{x-1}$. Soit a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$. Pour x dans $[\,a;b\,]$, on a

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^* \quad \left|\ln(t)e^{-t}t^{x-1}\right| \leq |\ln(t)|\, e^{-t}(t^{a-1} + t^{b-1})$$

par positivité et croissance (resp. décroissance) des fonctions puissances de base supérieure (resp. inférieure) à 1. La fonction majorante est bien définie, continue et positive en fonction de t. En $+\infty$ elle est dans $\mathrm{O}\left(e^{-t/2}\right)$, par croissance comparée, et au voisinage de 0 à droite elle est équivalente à la fonction positive $t \mapsto |\ln(t)|\, t^{a-1}$ donc dans $\mathrm{O}\left(t^{(a-1)/2}\right)$ par croissance comparée. La fonction majorante est donc intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$ et indépendante de x. Le théorème de LEIBNIZ, dit de dérivation sous le signe intégral, permet de conclure que Γ est dérivable sur $[\,a;b\,]$, de dérivée donnée par intégration de la dérivée de l'intégrande. Comme a et b sont des réels strictement positifs arbitraires, on en conclut que, pour x dans $\mathbf{R}_+^*$, $\boxed{\Gamma \text{ est dérivable sur } \mathbf{R}_+^* \text{ et } \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t.}$

Élements de notation : Justification **complète** de la dérivabilité (continuité, positivité, intégrabilité, restriction à un compact) : 0/4. – Formule pour Γ' : 0/4.

III.2.

III.2.a. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est définie sur $\mathbf{R}_+^*$, continue, positive et décroissante et donc le théorème de MACLAURIN, dit de comparaison série et intégrale, permet de conclure que $\sum_{n\geq 2} u_n$ est une série à termes positifs, de somme majorée par 1. En particulier $\boxed{\sum_{n\geq 2} u_n \text{ converge.}}$

Élements de notation : Théorème de Maclaurin : 1 ; Hypothèses : 2 ; Conclusions complètes du théorème :1.

III.2.b. Par définition et relation de Chasles pour les intégrales, pour n entier supérieur à 2, on a $H_n = 1 - \sum_{k=2}^{n} u_k$. La question précédente, et ses arguments, ainsi que la linéarité de la limite montrent que (H_n) converge vers une limite comprise entre 0 et 1. En particulier $\boxed{(H_n)_{n\geq 1} \text{ converge.}}$

Élements de notation : Cas $n = 1$: 1 ; Linéarité de la limite : 1 ; Convergence : 2.

Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

III.3. **L'énoncé n'est pas correct** : les fonctions f_n dépendent de x et x n'est pas fixé dans cette question. On suppose dans la suite que sauf pour la première partie de la question 3a la quantité x représente un réel strictement positif **fixé**.

III.3.a. La fonction de référence ln est concave sur $\mathbf{R}_+^*$, ce qu'on peut justifier en rappelant qu'elle est de classe C^∞ et de dérivée seconde négative ou encore qu'elle est limite simple des fonctions concaves données par $t \mapsto n(t^{\frac{1}{n}} - 1)$. Par positionnement de la fonction par rapport à sa tangente en 1, pour $x < 1$ on a $1 - x > 0$ et donc $\ln(1 - x) \leq \ln(1) + (1 - x - 1)\ln'(1)$, i.e. $\boxed{\ln(1 - x) \leq -x.}$

Élements de notation : Domaine de définition des fonctions : 1 ; Reste de l'argument : 0/3.

Soit x et t dans $\mathbf{R}_+^*$. Pour $t \leq n$, il résulte de ce qui précède $\ln(1 - \frac{t}{n}) \leq -\frac{t}{n}$, puis par positivité de n, $n\ln(1-\frac{t}{n}) \leq -t$ et par croissance et positivité de l'exponentielle, $0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$ et enfin par positivité des fonctions puissances de base positive, $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}t^{x-1}$. Pour $t > n$, par positivité de tous les termes et nullité de $f_n(t)$, la conclusion est encore vraie et ainsi $\boxed{0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}t^{x-1}.}$

Élements de notation : Cas $t > n$: 1 ; $n \geq 0$: 1 ; Croissance et positivité de exp : 1 ; $t^{x-1} \geq 0$:1.

III.3.b. La suite de fonctions (f_n) est une suite de fonctions toutes continues et positives sur $\mathbf{R}_+^*$. Pour t dans $\mathbf{R}_+^*$ et n supérieur à t, on a

$$f_n(t) = \exp(n\ln(1 - \frac{t}{n}))t^{x-1} = \exp(-t + \mathrm{o}\,(1))t^{x-1} = e^{-t}t^{x-1} + \mathrm{o}\,(1)$$

par développement limité du logarithme au voisinage de 1 et continuité de l'exponentielle en 0. Autrement dit la fonction étudiée en question 1a est la limite simple des fonctions (f_n) sur $\mathbf{R}_+^*$. On sait donc qu'elle est continue et positive. De plus les fonctions (f_n) sont positives et uniformément majorées par cette même fonction continue, positive et intégrable étudiée en question 1a. Le théorème de convergence dominée permet donc de conclure

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc, puisque pour n entier f_n est à support dans $[0; n]$, $\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t.}$

Élements de notation : Calcul de la limite simple f de (f_n) : 0/4 – TOUTES les hypothèses du théorème de convergence dominée, i.e. continuité de f_n et f, majoration en **valeur absolue**, continuité, **positivité** et intégrabilité de φ (avec ici $\varphi = f$) : 0/4.

III.4.

III.4.a. Pour x dans $\mathbf{R}_+^*$ et n dans $\mathbf{N}$, l'intégrande est une fonction continue sur $]0; 1]$ et équivalente en 0 à droite à la fonction de référence $u \mapsto u^{x-1}$. Le critère de Riemann permet donc de conclure que I_n est bien défini.

Pour $n \geq 1$, les termes de l'intégrande étant tous de classe C^∞ sur $]0;1]$, il résulte d'une intégration par parties qu'on a

$$x \int (1-u)^n u^{x-1} \,\mathrm{d}u = (1-u)^n t^x + n \int (1-u)^{n-1} u^x \,\mathrm{d}u$$

et donc, puisque les intégrales convergent sur $]0;1]$ et que la fonction restante admet une limite nulle en 0, il vient $\boxed{xI_n(x) = nI_{n-1}(x+1).}$

Élements de notation : Continuité, équivalent et critère de Riemann : 1 ; Justification complète de l'IPP (régularité, intégrabilités et limites aux bornes) : 2 ; Relation : 1.

III.4.b. La formule précédente donne par itération, pour x dans $\mathbf{R}_+^*$ et n entier naturel

$$I_n(x) = \frac{n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)} I_0(x+n)$$

et donc $\boxed{I_n(x) = \frac{n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.}$

Élements de notation : 0/4

III.4.c. Par changement de variable simple on a, pour n entier naturel et x dans $\mathbf{R}_+^*$,

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \,\mathrm{d}t = n^x I_n(x) = \frac{n!\, n^x}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$$

d'après la question précédente. Le résultat de la question 3b permet d'en déduire

la formule d'Euler, que le texte attribue faussement à Gauss.

Élements de notation : 0/4

III.5. Pour $n \geq 1$ et x dans $\mathbf{R}_+^*$, on a par propriété de morphisme de l'exponentielle

$$\exp(xH_n) = \frac{1}{n^x} \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{x}{k}}$$

et la remarque de l'énoncé s'en déduit. Par continuité de l'exponentielle, il résulte de la question 2b qu'on a $\exp(xH_n) = \exp(\gamma x + \mathrm{o}\,(1)) = \exp(\gamma x) + \mathrm{o}\,(1)$. La remarque précédente fournit alors

$$\frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}{n!\, n^x} = \frac{x}{n^x} \prod_{k=1}^{n} \frac{x+k}{k} = x(e^{\gamma x} + \mathrm{o}\,(1)) \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right] .$$

D'après la formule d'Euler l'inverse du membre de gauche admet une limte égale à $\Gamma(x)$ et comme cette quantité est non nulle d'après la question 1b, le membre de gauche a lui aussi une limite et elle est égale à $\dfrac{1}{\Gamma(x)}$. Par division par xe^{xH_n}, qui est non nul, le produit dans le membre de droite admet donc aussi une limite et on en déduit, par bilinéarité de la limite, la formule de Weierstrass.

Élements de notation : Exponentielle (morphisme et continuité) : 1 ; Passage à l'inverse et non nullité : 1 ; Justification de la convergence du produit dont non nullité : 1 ; (Bi-)linéarité de la limite :1.

III.6.

III.6.a. Soit x dans $\mathbf{R}_+^*$. Par non nullité de $xe^{\gamma x}$, la question 5 montre que la suite $\left(\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right]\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ admet une limite dans $\mathbf{R}_+^*$. Par continuité du logarithme, on en déduit qu'il en va de même pour la suite $\left(\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right]\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$. Autrement dit la série de fonctions

$\boxed{\sum_{k\geq 1}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right] \text{ converge simplement sur } \mathbf{R}_+^*.}$

Élements de notation : Non nullité de $xe^{\gamma x}$: 1 ; limite dans $\mathbf{R}_+^*$: 1 ; Continuité de ln et conclusion : 0/2.

III.6.b. Pour k dans $\mathbf{N}^*$ on note g_k la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $g_k(x) = \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}$. La question précédente montre que la série de fonctions $\sum g_k$ admet une limite simple sur $\mathbf{R}_+^*$. Comme ces fonctions sont toutes de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$, on peut considérer la série $\sum g_k'$, dont le terme général est donné par $-\frac{x}{k(x+k)}$. Soit a un réel strictement positif. Pour $x \leq a$ on a $|g_k'(x)| \leq \frac{a}{k^2}$, de sorte que, par comparaison à une série de RIEMANN convergente, $\sum g_k'$ est normalement convergente sur $]0;a]$. Il résulte donc du théorème de LEIBNIZ, dit de dérivation terme à terme des séries de fonctions, que g est de classe C^1 sur $]0;a]$, de dérivée donnée par la somme de $\sum g_k'$. Comme a est arbitraire, il en résulte, pour x dans $\mathbf{R}_+^*$, que $\boxed{g \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbf{R}_+^* \text{ et } g'(x) = -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x}{k(x+k)}.}$

Élements de notation : Justification **complète** de la classe C^1 (g_k de classe C^1, restriction à un compact, convergence normale, comparaison à une série de RIEMANN) : 0/4. – Théorème de LEIBNIZ : 0/2 ; Formule pour g' : 0/2.

III.6.c. Par propriété de morphisme et continuité de l'exponentielle, la définition de g et la formule de WEIERSTRASS fournissent pour x dans $\mathbf{R}_+^*$

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}e^{g(x)}$$

et donc, puisque toutes les fonctions considérées sont de classe C^1 sur leurs domaines de définition $-\Psi(x) = \frac{1}{x} + \gamma + g'(x)$, ce qui, avec la formule précédente donne par passage à l'opposé et en remarquant $-\frac{x}{k(x+k)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}$, $\boxed{\Psi(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right).}$

Élements de notation : 0/4.

III.7.

III.7.a. La formule précédente donne, en reconnaissant une somme télescopique $\Psi(1) = -1 - \gamma + 1$, i.e. $\boxed{\Psi(1) = -\gamma}$ Comme $\Gamma(1) = 1$ en reconnaissant une primitive de l'intégrande définissant $\Gamma(1)$, donnée par $-e^{-t}$, et en utilisant la formule de la question 1c, il vient

$$\Psi(1) = \Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) \,\mathrm{d}t\,,$$

i.e. $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) \,\mathrm{d}t = -\gamma.}$

Élements de notation : $\Psi(1)$: 2 ; Le reste : 0/2.

III.7.b. La formule de la question 6c donne, pour x dans $\mathbf{R}_+^*$, par linéarité de la limite

$$\Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1} \right) ,$$

i.e. en reconnaissant une somme télescopique $\boxed{\Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x}.}$ En particulier, pour n entier supérieur à 2,

$$\Psi(n) = \Psi(1) + \sum_{k=1}^{n-1} (\Psi(k+1) - \Psi(k))$$

et il vient $\boxed{\Psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.}$

Élements de notation : $\Psi(x+1) - \Psi(x)$: 0/2 ; $\Psi(n)$: 0/2.

III.7.c. **Une fois encore l'énoncé n'est pas correct** : les fonctions j_k dépendent de x et x n'est pas fixé dans cette question. On suppose dans la suite que la quantité x représente un réel strictement positif **fixé**. Soit alors k dans $\mathbf{N}$ et y dans $\mathbf{R}_+^*$, on a

$$|j_k(y)| = \frac{|x-1|}{(k+y+1)(k+y+x)} \leq \frac{|x-1|}{k^2}$$

et donc, par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum j_k$ est normalement convergente sur $\mathbf{R}_+^*$. En particulier elle y est $\boxed{\text{uniformément convergente.}}$ La formule de la question 6c donne, pour n entier naturel, par linéarité de la limite

$$\Psi(x+n) - \Psi(1+n) == \frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+n} + \sum_{k=1}^{+\infty} j_k(n)\,.$$

Les deux premiers termes tendent vers 0. Par ailleurs, pour tout entier k supérieur à 1, $\lim j_k(n) = 0$ et comme, par convergence uniforme sur $\mathbf{R}_+^*$, on peut intervertir limite et sommation, il vient $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(\Psi(x+n) - \Psi(1+n)) = 0.}$

Élements de notation : Convergence uniforme : 0/4 – Limite : 0/4.

III.8. D'après ce qui précède la fonction Digamma vérifie ces trois conditions. Réciproquement soit f une telle fonction. En raison des deux premiers points, elle coïncide avec Ψ sur $\mathbf{N}^*$. Le troisième point donne alors, par linéarité de la limite, pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$,

$$\lim_{n\to+\infty} (f(x+n) - \Psi(x+n)) = 0$$

et donc
$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x+k} - \Psi(x+n) \right) .$$
Comme le membre de droite ne dépend pas de f, une telle fonction est uniquement déterminée, i.e. $\boxed{\Psi \text{ est l'unique fonction vérifiant toutes ces propriétés.}}$

Élements de notation : 0/4.

Autour de la fonction Digamma

III.9.

III.9.a. Bien qu'il n'y ait aucun élément pour l'attester, on suppose tous les tirages équiprobables et donc $X \sim \mathcal{U}(⟦1;n⟧)$, i.e. $\boxed{X \text{ suit une loi uniforme sur } ⟦1;n⟧ \text{ et son espérance est } \dfrac{n+1}{2}.}$

Élements de notation : 0/4.

III.9.b. Bien qu'il n'y ait aucun élément pour l'attester, on suppose une fois encore tous les tirages équiprobables. Les événements $((X=j))_{j\in⟦1;n⟧}$ formant un système complet d'événements non-négligeables, on en déduit, par formule des probabilités totales,
$$\mathbf{P}(Y=k) = \sum_{j=1} \mathbf{P}(Y=k \,|\, X=j)\,\mathbf{P}(X=j) = \frac{1}{n}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{n+j} + \frac{k+1}{n+k} \right) ,$$
i.e. $\boxed{Y \text{ est à valeurs dans } ⟦1;n⟧ \text{ et pour } k \text{ dans } ⟦1;n⟧, \text{ on a } \mathbf{P}(Y=k) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} + \frac{k}{n(n+k)}.}$

D'après la formule obtenue en questions 7b et 8, la somme est égale à $\displaystyle\sum_{j=n+1}^{2n} (\Psi(j+1) - \Psi(j))$ et donc, en reconnaissant une somme télescopique,
$$\boxed{\text{pour } k \text{ dans } ⟦1;n⟧,\ \mathbf{P}(Y=k) = \frac{1}{n}\left(\Psi(2n+1) - \Psi(n+1) + \frac{k}{n+k}\right).}$$

Élements de notation : Système complet : 1 ; Probas totales : 1 ; Loi : 1 ; Formule : 1.

III.9.c. Comme Y prend un nombre fini de valeurs, il admet une espérance et il vient d'après ce qui précède
$$\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{n}(\Psi(2n+1) - \Psi(n+1)) \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n(n+k)}$$
et ainsi, en utilisant la formule donnée par l'énoncé et la formule de Bernoulli pour les sommes d'entiers successifs, $\boxed{\mathbf{E}(Y) = \dfrac{3n+1}{2}(\Psi(2n+1 - \Psi(n+1)) + \dfrac{1-n}{2}.}$

Élements de notation : 0/4.

Remarque : la formule admise résulte d'un calcul direct après décomposition en éléments simples de la fraction et utilisation de l'équation fonctionnelle de Digamma.