Deuxième composition
CCINP 2016 – MP

EXERCICE I - INFORMATIQUE

Les algorithmes demandés doivent être écrits en `Python`. On sera très attentif à la rédaction et notamment à l'indentation du code. Cet exercice étudie deux algorithmes permettant le calcul du pgcd (plus grand commun diviseur) de deux entiers naturels.

I.1. Pour calculer le pgcd de 3705 et 513, on peut passer en revue tous les entiers 1, 2, 3, ..., 512, 513 puis renvoyer parmi ces entiers le dernier qui divise à la fois 3705 et 513. Il sera alors bien le plus grand des diviseurs communs à 3705 et 513. Écrire une fonction `gcd` qui renvoie le pgcd de deux entiers naturels non nuls, selon la méthode décrite ci-dessus. On pourra éventuellement utiliser librement l'instruction `min(a,b)` qui calcule le minimum de a et b. Par exemple `gcd(3705,513)` renverra 57.

I.2. L'algorithme d'Euclide permet aussi de calculer le pgcd. Voici une fonction `Python` nommée `euclide` qui implémente l'algorithme d'Euclide.

```
def euclide(a,b):
    u = a
    v = b
    while v != 0:
    r = u % v
    u = v
    v = r
    return u
```

Écrire une fonction «récursive» `euclide_rec` qui calcule le pgcd de deux entiers naturels selon l'algorithme d'Euclide.

I.3. On note $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des nombres de Fibonacci définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

I.3.a. Écrire les divisions euclidiennes successivement effectuées lorsque l'on calcule le pgcd de $F_6 = 8$ et $F_5 = 5$ avec la fonction `euclide`.

I.3.b. Soit $n \geq 2$ un entier. Quel est le reste de la division euclidienne de F_{n+2} par F_{n+1} ? On pourra utiliser librement que la suite $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante à partir de $n = 2$. En déduire, sans démonstration, le nombre u_n de divisions euclidiennes effectuées lorsque l'on calcule le pgcd de F_{n+2} et F_{n+1} avec la fonction `euclide`.

I.3.c. Comparer pour n au voisinage de ∞, ce nombre u_n avec le nombre v_n de divisions euclidiennes effectuées pour le calcul du pgcd de F_{n+2} et F_{n+1} par la fonction `gcd`. On pourra utiliser librement que F_n est équivalent, au voisinage de ∞, à $\varphi^n/\sqrt{5}$ où $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ est le nombre d'or.

I.4. Écrire une fonction `fibo` qui prend en argument un entier naturel n et renvoie le nombre de Fibonacci F_n . Par exemple, `fibo(6)` renverra 8.

I.5. En utilisant la fonction `euclide`, écrire une fonction `gcd_trois` qui renvoie le pgcd de trois entiers naturels. Par exemple `gcd_trois(18,30,12)` renverra 6.

EXERCICE II

Pour tout entier naturel non nul n, on note $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans le corps $\mathbf{K}$.
Dans cet exercice, A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$.

II.1. Démontrer que les valeurs propres complexes de A prennent au maximum trois valeurs distinctes que l'on précisera.

II.2. Justifier que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

II.3. Démontrer que si A est inversible alors $\det(A) = 1$.

PROBLÈME III

La dernière partie du problème est indépendante du reste. La deuxième partie étudie un exemple d'interpolation de HERMITE et la troisième partie quelques propriétés d'une famille de polynômes qui portent le nom de ce même mathématicien.

On note $\mathbf{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel n, $\mathbf{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On note $\mathbf{R}(X)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients réels.

Pour tout polynôme P de $\mathbf{R}[X]$, on note P' le polynôme dérivé de P et, pour tout entier naturel n, on note $P^{(n)}$ le n-ième polynôme dérivé de P. Pour tout entier naturel non nul n, on note $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Première partie : questions préliminaires

Soit n un entier naturel non nul.

III.1. Soit P et Q deux polynômes non nuls à coefficients complexes.

III.1.a. Démontrer que si P et Q n'ont aucune racine complexe commune, alors P et Q sont premiers entre eux (on pourra raisonner par l'absurde).

III.1.b. On suppose que P et Q sont premiers entre eux. En utilisant le théorème de GAUSS, démontrer que si P et Q divisent un troisième polynôme R à coefficients complexes, alors il en est de même du polynôme PQ.

III.2. Soit $(P_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de polynômes non nuls de $\mathbf{R}[X]$. On considère le polynôme P de $\mathbf{R}[X]$ et la fraction rationnelle Q de $\mathbf{R}(X)$ définis par $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} P_i$ et $Q = \dfrac{P'}{P}$. Démontrer par récurrence $Q = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i'}{P_i}$.

Deuxième partie : interpolation de HERMITE

Soit I un intervalle non vide de $\mathbf{R}$, p un entier naturel non nul, $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille d'éléments de I distincts deux à deux et $(a_i)_{1\leq i\leq p}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq p}$ deux familles de réels quelconques.

III.3. **Définition du polynôme interpolateur de HERMITE**

III.3.a. Soit P dans $\mathbf{R}[X]$ et a dans $\mathbf{R}$. En utilisant la formule de TAYLOR, démontrer : si $P(a) = P'(a) = 0$ alors $(X-a)^2$ divise P.

III.3.b. En utilisant la question préliminaire III.1, démontrer que l'application φ de $\mathbf{R}_{2p-1}[X]$ vers $\mathbf{R}^{2p}$ définie par

$$\varphi(P) = (P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_p), P'(x_1), P'(x_2), \dots, P'(x_p))$$

est une application linéaire bijective de $\mathbf{R}_{2p-1}[X]$ sur $\mathbf{R}^{2p}$.

III.3.c. Démontrer qu'il existe un unique polynôme P_H dans $\mathbf{R}_{2p-1}[X]$ tel que, pour tout entier i vérifiant $1 \leq i \leq p$, on a $P_H(x_i) = a_i$ et $P_H'(x_i) = b_i$.

Le polynôme P_H est appelé polynôme d'interpolation de HERMITE.

III.4. **Étude d'un exemple**

Déterminer le polynôme d'interpolation de HERMITE (défini à la question III.3) lorsque $p = 2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $b_1 = -1$ et $b_2 = 2$.

III.5. **Une formule explicite**

Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq p$, on considère le polynôme $Q_i = \displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} \left(\frac{X-x_j}{x_i-x_j}\right)^2$.

III.5.a. Soit i un entier vérifiant $1 \leq i \leq p$. Calculer $Q_i(x_k)$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$ et démontrer qu'on a

$$Q_i'(x_k) = 0 \text{ si } k \neq i \text{ et } Q_i'(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} \frac{2}{x_i - x_j}$$

On pourra utiliser la question préliminaire III.2.

III.5.b. Démontrer que le polynôme P défini par la formule

$$P = \sum_{i=1}^{p} \left[(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i))\, a_i + (X - x_i) b_i \right] Q_i$$

est le polynôme d'interpolation de HERMITE défini à la question III.3.

III.5.c. Retrouver le polynôme de la question III.4 en utilisant cette formule.

Troisième partie : polynômes de HERMITE

Soit $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la famille de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout n dans $\mathbf{N}$, $H_{n+1} = XH_n - H_n'$.

III.6. Démontrer que, pour tout n dans $\mathbf{N}$, H_n est un polynôme unitaire de degré n.

III.7. Démontrer que, pour tout n dans $\mathbf{N}$, $H_{n+1}' = (n+1)H_n$.

Pour tous polynômes P et Q à coefficients réels, on pose

$$\langle P \,|\, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

la fonction f étant définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$. On pourra utiliser librement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

III.8. **Un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$**

III.8.a. Justifier, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbf{R}[X]$, l'existence de l'intégrale qui définit $\langle P \,|\, Q \rangle$.

III.8.b. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

III.9. **Une famille orthogonale**

Dans la suite, $\mathbf{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\|\cdot\|$.

III.9.a. Démontrer que, pour tout P dans $\mathbf{R}[X]$ et pour tout n dans $\mathbf{N}$, $\langle P \,|\, H_n \rangle = \left\langle P^{(n)} \,\middle|\, H_0 \right\rangle$.

III.9.b. En déduire que, pour tout n dans $\mathbf{N}$, la famille $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}_n[X]$.

III.9.c. Calculer $\|H_n\|$ pour tout n dans $\mathbf{N}$.

III.9.d. Soit $P = X^3 + X^2 + X + 1$. Préciser les polynômes H_1, H_2 et H_3 puis déterminer quatre réels a_i $(0 \leq i \leq 3)$ tels que $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} a_i H_i$. En déduire la distance d du polynôme P au sous-espace $\mathbf{R}_0[X]$ des polynômes constants, c'est-à-dire la borne inférieure de $\|P - Q\|$ quand Q décrit $\mathbf{R}_0[X]$.

III.10. **Étude des racines des polynômes H_n**

Soit $n \in \mathbf{N}$. On note p le nombre de racines réelles (distinctes) d'ordre impair du polynôme H_n, a_1, a_2, …, a_p ces racines et S le polynôme défini par $S = 1$ si $p = 0$ et $S = \displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X - a_i)$ sinon.

III.10.a. Démontrer : si $p < n$, alors $\langle S \,|\, H_n \rangle = 0$.

III.10.b. Démontrer, pour tout x dans $\mathbf{R}$, $S(x)H_n(x) \geq 0$.

III.10.c. En déduire que H_n a n racines réelles distinctes.

DEUXIÈME COMPOSITION – CCINP 2016 – MP

EXERCICE I

I.1.

```
def gcd(a,b):
    """Donn\'ees : a et b deux entiers naturels
       R\'esultat : le pgcd de a et b, calcul\'e par inspection
       On initialise g \`a 1, plus petit diviseur commun connu"""
    g=1
    """On utilise ensuite que i|a si et seulement si le reste
    de la division de a par i est nul, i.e. n'est pas non nul
    On teste tous entiers entre 2 et min(a,b) par ordre croissant"""
    for i in range(2,min(a,b)+1):
        if not(a%i) and not(b%i): g=i
    """Le dernier diviseur commun trouv\'e est alors le plus grand
    pour l'ordre naturel et on le renvoie"""
    return g
```

Élements de notation : Code correct : 0/2 ; Explications : 1 ; Écriture du code : 1.

Remarque : cette question est un contresens ! L'ordre utilisé pour ordonner les diviseurs est bien entendu celui fourni par la divisibilité (ordre multiplicatif) et non l'ordre issu de le structure additive.

I.2.

```
def euclide_rec(a,b):
    """Donn\'ees : a et b deux entiers naturels
       R\'esultat : le pgcd de a et b, calcul\'e r\'ecursivement
       Si a et b sont non nuls, i.e. ab est non nul,
       on renvoie la m\^eme fonction calcul\'ee sur (b,r) o\`u a=bq+r"""
    if a*b: return euclide_rec(b,a%b)
    """Si l'un des deux est nuls, on renvoie le plus grand
       pour l'ordre naturel"""
    return max(a,b)
```

Élements de notation : Code récursif et correct : 0/2 ; Explications : 1 ; Écriture du code : 1.

I.3.

I.3.a. On écrit pour chaque division, apparaissant dans le code sous la forme `r = u % v`, les variables u, v, la division euclidienne de u par v, et r. On a ainsi

$(u, v) = (8, 5)$, $8 = 1 \times 5 + 3$, $r = 3$; $(u, v) = (5, 3)$, $5 = 1 \times 3 + 2$, $r = 2$; $(u, v) = (3, 2)$, $3 = 1 \times 2 + 1$, $r = 1$; $(u, v) = (2, 1)$, $2 = 2 \times 1 + 0$, $r = 0$.

Élements de notation : Nombre d'itérations correct : 0/2 ; -1 par division incorrecte : entre 2 et 0.

I.3.b. Par croissance de la suite de FIBONACCI, tous ses termes sont positifs et ainsi $0 \leq F_n < F_{n+1}$ puisqu'elle est strictement croissante à partir du rang 2. Par définition on en déduit que

$\boxed{\text{le reste de la division euclidienne de } F_{n+2} \text{ par } F_{n+1} \text{ est } F_n.}$ et donc $\boxed{u_n = \max(n, 1).}$

Élements de notation : F_n : 0/2 ; u_n : 0/2.

I.3.c. Pour n supérieur à 2, la fonction `gcd` utilise entre $\min(F_{n+2}, F_{n+1})$ et le double de ce nombre car, lors de chaque itération, si le nombre testé ne divise pas le premier des deux nombres proposés, la seconde division n'est pas effectuée. On en déduit que v_n est de l'ordre de grandeur de φ^n et donc, puisque φ est strictement supérieur à 1, par croissance comparée, on a $\boxed{u_n = o(v_n).}$

Élements de notation : Ordre de grandeur de v_n : 1 ; nombre de divisions par itération : 1 ; $u_n = o(v_n)$: 0/2.

I.4.

```
def fibo(n):
    """Donn\'ee : n un entier naturel
       R\'esultat : F_n
       Si n<=1, on renvoie n"""
    if n<=1: return n
    """Sinon on initialise a \`a F_0, b \`a F_1
       puis on it\`ere n-1 fois (a,b) --> (b,a+b)
       de sorte qu'\`a la k-\`eme it\'eration a=F_k et b=F_{k+1}"""
    a,b = 0,1
    for _ in range(1,n): a,b = b,a+b
    return b
```

Élements de notation : Idée de l'algorithme correcte : 1 ; Algorithme correct : 1 ;Explications : 1 ; Écriture du code : 1.

I.5. On utilise l'associativité du pgcd.

```
def gcd_trois(a,b,c):
    """Donn\'ees : a, b, c deux entiers naturels
       R\'esultat : le pgcd de a, b et c, par associativit\'e"""
    return euclide(a,euclide(b,c))
```

Élements de notation : Justification : 0/3 ; Code correct, expliqué et bien écrit : 1.

EXERCICE II

II.1. Le polynôme $X^3 + X^2 + X$ est un polynôme annulateur de A et il en résulte que le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de ce polynôme. Comme on a

$$X^3 + X^2 + X = X(X - j)(X - j^2)$$

avec $j = \exp(2i\pi/3)$, on en déduit que

les valeurs propres complexes de A prennent au plus 0, j et j^2 comme valeurs.

Élements de notation : Mot clef « annulateur » : 1 ; Propriété racines/spectre : 2 ; Factorisation sur $\mathbf{C}$: 1.

II.2. Puisque A est annulé par un polynôme simplement scindé, son polynôme minimal est simplement scindé et donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{C}.}$

Élements de notation : Mots clefs « annulateur ou minimal » et « simplement scindé » : 0/4.

II.3. Le polynôme caractéristique χ_A de A a toutes ses racines parmi 0, j et j^2. Comme il est réel, car A l'est, j et j^2 ont même multiplicité dans χ_A et comme A est inversible, 0 n'est pas racine de χ_A. Il en résulte $\chi_A = (X^2+X+1)^m$ pour un certain entier m. Il est donc de degré pair et de coefficient constant égal à

1, et ce coefficient est alors aussi le déterminant de A, i.e. $\boxed{\det(A) = 1.}$ Aternativement : le polynôme minimal π_A de A sur $\mathbf{R}$ est un diviseur de $X^3 + X^2 + X$. Si A est inversible, alors X est premier à π_A (car pour tout polynôme P de $\mathbf{R}[X]$, $P(A)$ est inversible si et seulement si $P \wedge \pi_A = 1$) et donc π_A est un diviseur de $X^2 + X + 1$. Comme π_A est de degré au moins 1 et que $X^2 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbf{R}[X]$ (car sinon il admettrait un facteur de degré 1 et donc une racine réelle), on a $\pi_A = X^2 + X + 1$. Comme les facteurs irréductibles du polynôme caractéristique χ_A de A sont les mêmes que ceux de π_A, χ_A est une puissance de π_A. On conclut de même.

Élements de notation : χ_A : 2 ; $\det(A)$: 0/2.

PROBLÈME III

Première partie : questions préliminaires

III.1.

III.1.a. Soit R le pgcd de P et Q. Si R n'est pas constant, il admet d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, dit théorème fondamental de l'algèbre, une racine complexe. Cette racine est alors commune à P et Q. Donc $P \wedge Q$ est constant et comme ces deux polynômes ne sont pas nuls, leur pgcd ne l'est pas non nul et ainsi $\boxed{P \text{ et } Q \text{ sont premiers entre eux.}}$

Élements de notation : $P \wedge Q$ constant : 0/2 ; $P \wedge Q \neq 0$: 0/2.

III.1.b. Soit R un tel polynôme. Puisque P divise R, on dispose de S tel que $R = PS$. Comme Q est premier à P et divise PS, il résulte du lemme de Gauss qu'il divise S et donc on dispose de T tel que $S = QT$ et donc $R = PQT$, i.e. $\boxed{PQ \text{ divise } R.}$

Élements de notation : 0/4.

III.2. La fonction rationnelle associée à Q est définie sur $\mathbf{R}$ privé des racines de P et à cet endroit est égale à la dérivée de la fonction $\ln|P|$, donc aussi à celle de la fonction $\sum_{i=1}^n \ln|P_i|$, i.e. à $\sum_{i=1}^n \dfrac{P_i'}{P_i}$. Ces fonctions rationnelles étant égales sur un nombre infini de valeurs, les fractions rationnelles associées sont égales. Mais ce n'est pas une démonstration par récurrence.

Par formule de Leibniz, on a

$$PQ = P' = \sum_{i=1}^n P_i' \prod_{j \neq i} P_j = \sum_{i=1}^n P_i' \frac{P}{P_i}$$

et le résultat s'ensuit. Mais ce n'est toujours pas une démonstration par récurrence.

Soit donc le prédicat $(\mathbf{P}_k)$ donné pour k dans $[\![1; n]\!]$ par : en posant $\tilde{P}_k = \prod_{i=1}^k P_i$, $Q_k = \dfrac{\tilde{P}_k{}'}{\tilde{P}_k}$, on a l'égalité dans $\mathbf{R}(X)$: $Q_k = \sum_{i=1}^k \dfrac{P_i'}{P_i}$. Le prédicat étant vrai pour tout k d'après ce qui précède, il est vrai pour $k = 1$ et est héréditaire, mais ce n'est pas vraiment une démonstration par récurrence.

Pour $k = 1$, le prédicat est tautologiquement vrai. S'il est vrai pour un certain k dans $[\![1; n-1]\!]$, avec les mêmes notations que dans le prédicat, il vient $\tilde{P_{k+1}} = \tilde{P}_k P_{k+1}$, puis $\tilde{P_{k+1}}{}' = \tilde{P}_k{}' P_{k+1} + \tilde{P}_k P_{k+1}'$ et $Q_{k+1} = Q_k + \dfrac{P_{k+1}'}{P_{k+1}}$, ce qui permet de montrer l'hérédité et de conclure, par récurrence, que $(\mathbf{P}_n)$ est vrai et donc qu'on a $\boxed{Q = \sum_{i=1}^n \frac{P'}{P}.}$

Élements de notation : Démonstration : 1 ; Démonstration par récurrence : 1 ; Prédicat correct : 2.

Deuxième partie : interpolation de Hermite

III.3.

III.3.a. La formule de TAYLOR étant exacte pour les polynômes, si P n'est pas nul, on a en notant n son degré

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

et donc, si on a $P(a) = P'(a) = 0$, il vient

$$P = (X-a)^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-2},$$

ce qui montre que $(X-a)^2$ divise P. Si P est nul, il est divisible par tout polynôme donc par $(X-a)^2$. Ainsi, dans tous les cas, $\boxed{\text{si on a } P(a) = P'(a) = 0, \text{ alors } (X-a)^2 \text{ divise } P.}$

Élements de notation : $P = 0$: 0/2 ; P quelconque : 0/2.

III.3.b. La dérivation et l'évaluation en un point étant linéaires, φ l'est aussi. Elle est à valeurs dans $\mathbf{R}^{2p}$ par définition. Si P est dans son noyau, il résulte de la question précédente qu'il est divisible par $(X-x_j)^2$ pour tout indice j dans $[\![1;p]\!]$. Comme ces polynômes n'ont pas de racine complexe en commun (deux à deux), d'après la question III.1.a, ils sont premiers entre eux deux à deux. Une récurrence immédiate donne alors, d'après la question III.1.b, que leur produit divise P. Comme ce produit est de degré $2p$ et que P est de degré strictement inférieur, il en résulte que P est nul, donc φ est injective. Comme $\mathbf{R}_{2p-1}[X]$ est de dimension $2p$, donc égale à celle de $\mathbf{R}^{2p}$, φ est également bijective, i.e. $\boxed{\varphi \text{ est linéaire bijective.}}$

Élements de notation : Linéarité : 1 ; III.1.a : 1 ; III.1.b : 1 ; Dimensions : 1.

III.3.c. La bijectivité de φ entraîne directement $\boxed{\text{l'existence et l'unicité de } P_H.}$

Élements de notation : 0/4

III.4. Soit P le polynôme de HERMITE cherché. Puisque a_2 est nul, $X-1$ divise P et on dispose de Q tel que $P = (X-1)Q$. Les conditions sur P s'écrivent alors $-2Q(-1) = 1$, $Q(-1) - 2Q'(-1) = -1$ et $Q(1) = 2$. On cherche alors Q de degré au plus 2 comme combinaison linéaire de $X-1$, $X+1$ et X^2-1, ce qui est licite car les deux premiers polynômes ne sont pas colinéaires et engendrent donc $\mathbf{R}_1[X]$ et le dernier est de degré 2. Le coefficient de $X-1$ est donné par $Q(-1) = -\dfrac{1}{2}$ et vaut donc $\dfrac{1}{4}$. Celui de $X+1$ est donné par $Q(1) = 2$ et vaut donc 1. Celui de X^2-1 est donné par $Q'(-1) = \dfrac{1}{4}$ et vaut $-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} - 1\right)$, i.e. $Q = \dfrac{1}{4}(X-1) + X + 1 + \dfrac{1}{2}(X^2-1)$ et donc $\boxed{P = \dfrac{X-1}{4}(2X^2+5X+1).}$

Élements de notation : Explications : 2 ; Résultat (forme développée : $\dfrac{1}{2}X^3 + \dfrac{3}{4}X^2 - X - \dfrac{1}{4}$) : 0/2.

Remarque : on pourrait utiliser la formule donnée ensuite, mais le résultat seul n'est pas suffisant pour obtenir les points.

III.5.

III.5.a. Par définition, en notant $\delta_{i,k}$ le symbole de KRONECKER, on a $\boxed{Q_i(x_k) = \delta_{i,k}.}$ De plus si k est distinct de i, x_k est racine double de Q_i et ainsi $\boxed{Q_i'(x_k) = 0.}$ Enfin, en utisant la formule III.2, il vient

$$Q_i'(x_i) = \frac{Q_i'}{Q_i}(x_i) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} \frac{2(X-x_j)}{(X-x_j)^2}(x_i)\,,$$

i.e. $\boxed{Q_i'(x_i) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} \frac{2}{x_i - x_j}.}$

Élements de notation : $Q_i(x_k)$: 1 ; $Q_i'(x_k)$: 1 ;$Q_i'(x_i)$: 0/2.

III.5.b. Pour tout i dans $[\![1;p]\!]$, Q_i est de degré $2p-2$ et donc P est de degré au plus $2p-1$ car les facteurs devant les Q_i sont de degrés au plus 1. On a de plus, en utilisant la question précédente

$$P(x_i) = \sum_{k=1}^{p} a_k Q_k(x_i) = a_i$$

et

$$P'(x_i) = \sum_{k=1}^{p} (a_k Q_k'(x_i) + (b_k - a_k Q_k'(x_k))Q_k(x_i)) = a_i Q_i'(x_i) + (b_i - a_i Q_i'(x_i)) = b_i$$

et donc, par unicité de ce polynôme, $\boxed{P \text{ est le polynôme d'interpolation de HERMITE.}}$

Élements de notation : Degré : 1 ; $P(x_k)$: 1 ; $P'(x_k)$: 1 ; Unicité : 1.

III.5.c. On a $Q_1 = \dfrac{(X-1)^2}{4}$ et $Q_2 = \dfrac{(X+1)^2}{4}$, $Q_1'(-1) = -1$ et $Q_2'(1) = 1$, d'où

$$\begin{aligned} P &= ((1 + (X+1)) - (X+1))\,\frac{(X-1)^2}{4} + (2(X-1))\,\frac{(X+1)^2}{4} \\ &= \frac{1}{4}\left((X-1)^2 + 2(X-1)(X+1)^2\right) = \frac{X-1}{4}(2X^2+5X+1) \end{aligned}$$

et donc $\boxed{\text{on a retrouvé le même polynôme.}}$

Élements de notation : 0/4.

Troisième partie : polynômes de HERMITE

III.6. Soit $(\mathbf{P}_n)$ le prédicat sur $\mathbf{N}$ donné par : H_n est unitaire de degré n. Comme $H_0 = 1$, $(\mathbf{P}_0)$ est vrai. Si H est un polynôme unitaire, il est non nul, donc XH est de degré strictement supérieur à celui de H et donc aussi de H', et ainsi $XH + H'$ n'est pas nul et son coefficient dominant est celui de XH, donc de H. Il en résulte que $(\mathbf{P}_n)$ est un prédicat héréditaire et donc, par principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout entier } n,\ H_n \text{ est unitaire de degré } n.}$

Élements de notation : Prédicat correct : 0/2 ; Démonstration : 2.

III.7. Soit, pour n entier naturel, on a donc pour tout x réel

$$H_{n+1}(x) = e^{x^2/2}(xH_n(x) - H_n'(x))e^{-x^2/2} = -e^{x^2/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(H_n(x)e^{-x^2/2})$$

de sorte qu'une récurrence immédiate donne, puisque $H_0 = 1$,

$$H_n(x)e^{-x^2/2} = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2/2} .$$

En particulier, en utilisant le formule de dérivation de LEIBNIZ,

$$H_{n+2}(x)e^{-x^2/2} = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(-xe^{-x^2/2}) = xH_{n+1}e^{-x^2/2} - (n+1)H_n e^{x^2/2}$$

de sorte qu'on a $H_{n+2} = XH_{n+1} - (n+1)H_n$ puisque l'exponentielle ne s'annule pas et que donc les fontions polynomiales associées coïncident sur $\mathbf{R}$. En comparant à la formule de définition des polynômes, il vient $\boxed{H'_{n+1} = (n+1)H_n.}$

Élements de notation : 0/4

Remarque : on peut aussi démontrer le résultat par récurrence en utilisant la formule de définition et en la dérivant.

III.8.

III.8.a. L'intégrande est continu sur $\mathbf{R}$ car les fonctions polynomiales et f le sont. De plus au voisinage de l'infini, par croissance comparée, l'intégrande est dans $\mathrm{o}\left(e^{-x^2/3}\right)$ et est donc localement intégrable sur $\mathbf{R}$ et en l'infini. $\boxed{\text{L'intégrale est bien définie.}}$

Élements de notation : Intégrabilité locale sur $\mathbf{R}$: 0/2 ; Intégrabilité locale en l'infini : 2.

III.8.b. Le produit étant bilinéaire symétrique, la multiplication linéaire et l'intégration aussi, la formule définit une forme bilinéaire symétrique. Si P est dans $\mathbf{R}[X]$, $\langle P \mid P \rangle$ admet un intégrande continu, positif et n'est identiquement nul que si P l'est, car l'exponentielle ne s'annule pas, donc $\langle P \mid P \rangle$ est positif et n'est nul que si P l'est. Autrement dit on a bien défini $\boxed{\text{un produit scalaire.}}$

Élements de notation : Continuité pour l'aspect défini positif : 0/2 ; Reste de l'argument : 2.

III.9.

III.9.a. La relation de définition des polynômes H_n donne pour n entier naturel et x réel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[H_n(x)P(x)e^{-x^2/2}] = P'(x)H_n(x)e^{-x^2/2} - P(x)H_{n+1}(x)e^{-x^2/2}$$

et $\lim_{\pm\infty} H_n(x)P(x)e^{-x^2/2} = 0$, par croissances comparées. Il en résulte, par intégration $\langle H_n \mid P' \rangle = \langle H_{n+1} \mid P \rangle$. On en déduit par récurrence immédiate $\boxed{\langle H_n \mid P \rangle = \left\langle H_0 \;\middle|\; P^{(n)} \right\rangle.}$

Élements de notation : Intégration par parties : 2 ; Récurrence : 2.

III.9.b. Soit n et m sont deux entiers naturels, on a $\langle H_n \mid H_m \rangle = \left\langle P_n^{(m)} \;\middle|\; H_0 \right\rangle = \left\langle P_m^{(n)} \;\middle|\; H_0 \right\rangle$ et donc si n et m sont distincts, l'un parmi $P_n^{(m)}$ et $P_m^{(n)}$ est nul car l'ordre de dérivation est strictement supérieur à son degré. D'après la question III.6, aucun polynôme de HERMITE n'est nul, et donc en tant que famille orthogonale ne comportant aucun vecteur nul et de cardinal la dimension de l'espace, $\boxed{(H_0, \ldots, H_n) \text{ est une base de } \mathbf{R}_n[X].}$

Élements de notation : Base : 2 ; orthogonale ; 2.

III.9.c. La formule précédente avec $n = m$ donne, pour tout entier naturel n,

$$\|H_n\|^2 = \left\langle H_n^{(n)} \;\middle|\; H_0 \right\rangle = \int_{\mathbf{R}} n!\, f(x)\,\mathrm{d}x = n!$$

puisque H_n est unitaire de degré n d'après la question III.6 et f est d'intégrale 1 sur $\mathbf{R}$. Ainsi $\boxed{\|H_n\| = \sqrt{n!}\,.}$

Élements de notation : 0/4.

III.9.d. La relation de définition donne, à partir de $H_0 = 1$, $\boxed{H_1 = X,\ H_2 = X^2 - 1,\ H_3 = X^3 - 3X.}$ Il vient $P = H_3 + H_2 + 4H_1 + 2H_0$, i.e. $\boxed{(a_i)_{0\leq i\leq 3} = (2, 4, 1, 1).}$ Puisque (H_0) est une base orthonormée de $\mathbf{R}_0[X]$, le projeté orthogonal de P sur $\mathbf{R}_0[X]$ est $\langle H_0 \,|\, P\rangle\, H_0$, i.e. $2H_0$, et donc $d^2 = \|H_3 + H_2 + 4H_1\|^2$ soit, par orthogonalité, $d^2 = \|H_3\|^2 + \|H_2\|^2 + 16\,\|H_1\|^2$ et ainsi, avec la question précédente, $d^2 = 6 + 2 + 16 = 24$, i.e. $\boxed{d = 2\sqrt{6}.}$

Élements de notation : (H_i) : -1 par erreur entre 2 et 0 ; (a_i) : -1 par erreur entre 2 et 0. – d : 0/4.

III.10.

III.10.a. Si on a $p < n$, alors S est de degré strictement inférieur à n, donc combinaison linéaire de $(H_k)_{k<n}$ d'après la question III.9.b et donc orthogonal à H_n d'après la même question :

$\boxed{\text{si } p < n, \text{ alors } \langle H_n \,|\, S\rangle = 0.}$

Élements de notation : 0/4.

III.10.b. Par construction SH_n a ses racines parmi celles de S et H_n, donc de H_n, et leur ordre est alors pair. Donc SH_n est de signe constant. Étant unitaire, car produit de tels polynômes, il est positif : $\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ S(x)H_n(x) \geq 0.}$

Élements de notation : Racines d'ordre pair : 2 ; Signe constant : 1 ; Positif : 1.

III.10.c. Par stricte positivité de l'exponentielle et positivité de l'intégrale, on en déduit $\langle H_n \,|\, S\rangle \geq 0$ avec égalité si et seulement si $H_nS = 0$, par continuité de l'intégrande. On déduit de la question III.10.a qu'on a nécessairement $p \geq n$ car ni H_n, ni S n'est nul, donc HS_n non plus, par intégrité de $\mathbf{R}[X]$, et la fonction polynomiale associée non plus. Comme les racines de S sont des racines de H_n et qu'elles sont distinctes, H_n a au moins n racines distinctes et donc, puisqu'il est de degré n, $\boxed{H_n \text{ est simplement scindé sur } \mathbf{R}.}$

Élements de notation : Positivité : 1 ; Continuité : 1 ; Conclusion : 2.