Première composition
CCINP 2017 – MP

EXERCICE 1

Le nombre réel λ étant donné, vérifiant $0 < |\lambda| < 1$, on considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(\theta) = \frac{1}{1 - 2\lambda\cos(\theta) + \lambda^2} .$$

Pour n dans $\mathbf{N}$ on pose $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(\theta)\cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Q1. a) Calculer a_1 en fonction de a_0 et λ.

b) Après avoir linéarisé, pour $n \geq 1$, l'expression $(1 - 2\lambda\cos(\theta) + \lambda^2)\cos(n\theta)$, démontrer qu'il existe entre trois termes a_n d'indices consécutifs une relation du type :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad \alpha a_{n+1} + \beta a_n + \gamma a_{n-1} = 0$$

où α, β, γ sont trois nombres réels ne dépendant que de λ.

Q2. a) Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs réelles ou complexes, dépendant du paramètre λ, satisfaisant aux deux relations obtenues à la question précédente.

b) Calculer a_0 et en déduire, en fonction de n et de λ, l'expression de a_n.

EXERCICE 2

On admet $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose $A = \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$.

Q3. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ est sommable et calculer sa somme.

Q4. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ n'est pas sommable.

PROBLÈME – Séries trigonométriques

Il est utile en physique, notamment pour étudier des spectres d'énergie ou pour décomposer un signal périodique en harmoniques, de pouvoir écrire une fonction périodique en somme d'une série de fonctions trigonométriques.
Nous allons nous intéresser à l'aspect mathématique de cette décomposition pour les fonctions de période 2π.
Dans ce qui suit, on appelle « série trigonométrique » une série de fonctions du type

$$\sum (a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

où (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels.
Dans la première partie, on étudie quelques exemples. Dans la deuxième partie, on s'intéresse plus particulièrement aux séries trigonométriques qui convergent normalement sur $\mathbf{R}$.
On notera $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Pour $f \in C_{2\pi}$ et $n \in \mathbf{N}$, on notera

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x$$

PARTIE I - Exemples

Q5. Démontrer que la série trigonométrique $\sum \left(\dfrac{1}{2^n}\cos(nx) + \dfrac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$ converge normalement sur $\mathbf{R}$.

Pour tout entier $p \geq 2$, déterminer la somme de la série $\sum_{n\geq 0} \left(\dfrac{e^{ix}}{p}\right)^n$ puis en déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$$

(il n'est pas utile de réduire au même dénominateur).

Q6. Écrire la fonction $\varphi : x \mapsto \exp(\cos(x))\cos(\sin(x))$ comme la somme d'une série trigonométrique. On pourra écrire la fonction $x \mapsto \exp(e^{ix})$ comme somme de série de fonctions.

Q7. Donner un exemple de suite (a_n) de limite nulle telle que la série trigonométrique $\sum a_n \cos(nx)$ ne converge pas simplement sur $\mathbf{R}$.

Q8. On admet que la série trigonométrique $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbf{R}$. Converge-t-elle normalement sur $\mathbf{R}$?

PARTIE II - Propriétés

II.A - Une condition suffisante

Q9. Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbf{R}$.

II.B - Une condition nécessaire

Q10. Soit a et b dans $\mathbf{R}$ quelconques. Démontrer que le maximum de la fonction $x \mapsto |a\cos(x) + b\sin(x)|$ est $\sqrt{a^2+b^2}$.

Q11. Démontrer que si la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbf{R}$, alors les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0 et les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

II.C - Autres propriétés

Q12. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbf{R}$. Justifier $f \in C_{2\pi}$.

Q13. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x$ pour $n \neq 0$ et donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$ pour k et n entiers.

Q14. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbf{R}$: pour tout réel x, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\alpha_n(f) = a_n$ puis exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0. On pourra utiliser sans démonstration que pour $k \neq n$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0$.

On admettra, pour la suite du problème, que pour tout entier naturel n non nul $\beta_n(f) = b_n$ et $\beta_0(f) = 0$ (la démonstration n'est pas demandée).

Q15. Soit $f \in C_{2\pi}$. Pour tout réel x, on pose $u_0(x) = \dfrac{\alpha_0(f)}{2}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = \alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx)$. On suppose ici que la série trigonométrique $\sum(u_n(x))$ converge normalement sur $\mathbf{R}$ vers une fonction notée g :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ g(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha_k(f)\cos(kx) + \beta_k(f)\sin(kx))$$

Quelles relations a-t-on dans ce cas entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?

Q16. Il est admis que si une fonction h dans $C_{2\pi}$ vérifie : pour tout entier naturel n, $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$, alors h est la fonction nulle. Démontrer que pour tout réel x, $g(x) = f(x)$.

En résumé, lorsque la série trigonométrique $\sum(\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx))$ d'une fonction f dans $C_{2\pi}$ converge normalement sur $\mathbf{R}$ alors pour tout réel x, on a

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx)) \ .$$

Q17. Si f dans $C_{2\pi}$ est une fonction paire, que vaut $\beta_n(f)$? Exprimer, sans démonstration, $\alpha_n(f)$ en fonction de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

Q18. Exemple. Soit f dans $C_{2\pi}$ définie ainsi : pour tout $x \in [\,-\pi;\pi\,]$, $f(x) = x^2$ et f est 2π-périodique sur $\mathbf{R}$. Construire la courbe de cette fonction paire f sur l'intervalle $[\,-3\pi;3\pi\,]$ puis déterminer, pour tout entier naturel, les coefficients $\alpha_n(f)$ et $\beta_n(f)$. Donner une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbf{R}$ vers f.

Q19. En déduire les sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \ .$$

Déduire alors de la seconde somme la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \ .$$

Q20. Application. Justifier que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ est intégrable sur l'intervalle $]0;1[$ puis démontrer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$.

Q21. La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbf{R}$ est-elle nécessairement une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$?

Proposer une condition suffisante sur les séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ pour que la somme de la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$, qui converge normalement sur $\mathbf{R}$ soit une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$.

Q22. Déterminer la somme de la série trigonométrique $\sum \dfrac{n}{3^n}\cos(nx)$.

Première composition – CCINP 2017 – MP

EXERCICE 1

Q1. Remarquons que pour θ réel, on a $0 < \left|\lambda - e^{i\theta}\right|^2 = 1 - 2\lambda\cos(\theta) + \lambda^2$ et donc f est bien définie et continue sur $\mathbf{R}$. Il en résulte que la suite (a_n) est bien définie.

a) On a

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1 - 2\lambda\cos(\theta) + \lambda^2}{1 - 2\lambda\cos(\theta) + \lambda^2}\,\mathrm{d}\theta = (1+\lambda^2)a_0 - 2\lambda a_1$$

et donc $\boxed{a_1 = \frac{1+\lambda^2}{2\lambda}a_0 - \frac{1}{2\lambda}.}$

b) Pour $n \geq 1$, on a $(1 - 2\lambda\cos(\theta) + \lambda^2)\cos(n\theta) = (1+\lambda^2)\cos(n\theta) - \lambda(\cos((n-1)\theta) + \cos((n+1)\theta))$ et donc

$$0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta = (1+\lambda^2)a_n - \lambda(a_{n-1} + a_{n+1}) \ .$$

D'où la relation cherchée avec $\boxed{\alpha = \gamma = 1 \text{ et } \beta = -\lambda - \lambda^{-1}.}$

Q2. a) Le polynôme caractéristique associé à la suite récurrente linéaire précédente est $X^2 - (\lambda + \lambda^{-1})X + 1$, dont les racines sont λ et λ^{-1}. Comme on a $0 < |\lambda| < 1$, ces deux racines sont distinctes et donc toute suite (u_n) vérifiant cette relation de récurrence linéaire est de la forme $\alpha\lambda^n + \beta\lambda^{-n}$ avec α et β des scalaires. On a donc $\alpha + \beta = a_0$ et $\alpha\lambda + \beta\lambda^{-1} = a_1$ et la relation obtenue en question 1a fournit $1 = \alpha(1-\lambda^2) + \beta(\lambda^2 - 1)$, i.e. $\alpha = \beta + \frac{1}{1-\lambda^2}$. On en déduit que les suites cherchées sont de la forme $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \frac{\lambda^n}{1-\lambda^2} + \beta(\lambda^n + \lambda^{-n}), \text{ avec } \beta \text{ un scalaire.}}$

b) On effectue le changement de variable donné par $\theta = 2\arctan(t)$, puis $u = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}t$, et il vient

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1-\lambda)^2 + (1+\lambda)^2 t^2} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{(1-\lambda)^2}\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

et donc $\boxed{a_0 = \frac{1}{1-\lambda^2}.}$ En identifiant avec les notations précédentes, on en déduit $\beta = 0$ et donc, pour $n \in \mathbf{N}$, $\boxed{a_n = \frac{\lambda^n}{1-\lambda^2}.}$

Remarque : on peut montrer, en utilisant les techniques du lemme de Riemann-Lebesque, $\lim a_n = 0$, ce qui impose $\beta = 0$ et évite de calculer a_0. Mais ce n'est pas ce qui est demandé par le sujet.

EXERCICE 2

Q3. Puisqu'on a affaire à une famille de réels positifs, on peut appliquer le théorème de Fubini-Tonelli et calculer dans $\mathbf{R}_+ \cup +\infty$

$$\sum_{(p,q)\in A} \frac{1}{p^2q^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p^2}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} = \frac{\pi^4}{36} < +\infty$$

et donc $\boxed{\text{la famille } \left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in A} \text{ est sommable de somme } \frac{\pi^4}{36}.}$

Q4. Puisqu'on a affaire à une famille de réels positifs, on peut appliquer le théorème de Fubini-Tonelli et calculer dans $\mathbf{R}_+ \cup +\infty$. On minore p^2+q^2 par $(p+q)^2$ et on pose $n = p+q$:

$$\sum_{(p,q)\in A} \frac{1}{p^2+q^2} \geq \sum_{(p,q)\in A} \frac{1}{(p+q)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{\substack{(p,q)\in A \\ p+q=n}} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2} = +\infty$$

puisque $\dfrac{n-1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n}$ et par comparaison entre séries à termes positifs avec la série harmonique, divergente. On en conclut que $\boxed{\text{la famille } \left(\dfrac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in A} \text{ n'est pas sommable.}}$

Remarque : on a $\dfrac{n-1}{n^2} \geq \dfrac{1}{n+2}$ et on peut conclure directement.

PROBLÈME – Séries trigonométriques

PARTIE I - Exemples

Q5. Pour x réel et n entier, on a

$$\left|\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \leq \frac{2}{2^n}$$

et donc, par comparaison entre séries à termes positifs avec une série géométrique convergente, car de raison $\dfrac{1}{2}$, $\boxed{\text{la série trigonométrique } \sum \left(\dfrac{1}{2^n}\cos(nx) + \dfrac{1}{3^n}\sin(nx)\right) \text{ converge normalement sur } \mathbf{R}.}$

Soit p un entier avec $p \geq 2$ et x réel. Comme on a affaire à une série géométrique de raison de module strictement inférieur à 1, donc convergente, on a $\boxed{\sum_{n\geq 0}\left(\dfrac{e^{ix}}{p}\right)^n = \dfrac{p}{p-e^{ix}}.}$ En particulier pour $p=2$ et $p=3$, on obtient respectivement $\dfrac{4-2e^{-ix}}{5-4\cos(x)}$ et $\dfrac{9-3e^{-ix}}{10-6\cos(x)}$. En prenant les parties réelle et imaginaire respectivement, il vient $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}\cos(nx) + \dfrac{1}{3^n}\sin(nx)\right) = 2\dfrac{2-\cos(x)}{5-4\cos(x)} + 3\dfrac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}.}$

Q6. Pour tout complexe z on a $\exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ et donc, en particulier, pour tout réel x, on a $\exp(e^{ix}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n!}$. Or, pour x réel, on a $\exp(e^{ix}) = \exp(\cos(x))\exp(i\sin(x))$ et donc, en prenant la partie réelle, il vient $\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ \varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}.}$

Q7. On pose $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbf{N}$. Pour $x=0$ la série trigonométrique $\sum a_n \cos(nx)$ est la série harmonique et donc est divergente. Ainsi

$\boxed{(a_n) \text{ est un exemple de suite de limite nulle telle que la série trigonométrique } \sum a_n\cos(nx) \text{ ne converge pas simplement sur } \mathbf{R}.}$

Q8. Pour n dans $\mathbf{N}^*$ et x réel on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin(nx)$. On a donc $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et la série $\sum \|f_n\|_\infty$ est une série de Riemann divergente. On en conclut que

$$\boxed{\text{la série trigonométrique } \textstyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin(nx) \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbf{R}.}$$

PARTIE II - Propriétés

II.A - Une condition suffisante

Q9. Pour x réel et n entier, on a

$$|a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|$$

et donc, par comparaison entre séries à termes positifs avec la somme de deux séries convergentes, $\boxed{\text{la série trigonométrique } \sum(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) \text{ converge normalement sur } \mathbf{R}.}$

II.B - Une condition nécessaire

Q10. On écrit $a + ib$ sous forme trigonométrique : $a + ib = \sqrt{a^2+b^2}e^{i\varphi}$, i.e. $a = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\varphi)$ et $b = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\varphi)$. Il vient, pour x réel, $a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\varphi)$ et donc

$$\boxed{\max_{x\in\mathbf{R}} |a\cos(x) + b\sin(x)| = \sqrt{a^2+b^2}.}$$

Q11. D'après ce qui précède si la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbf{R}$ la série $\sum\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ converge. Comme, pour n dans $\mathbf{N}$, on a $0 \leq |a_n|, |b_n| \leq \sqrt{a_n^2+b_n^2}$ et, par convergence, on a $\sqrt{a_n^2+b_n^2} = \mathrm{o}(1)$, on en déduit que $\boxed{\text{les suites } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ convergent vers } 0}$ et que $\boxed{\text{les séries } \sum a_n \text{ et } \sum b_n \text{ sont absolument convergentes.}}$

II.C - Autres propriétés

Q12. Pour n dans $\mathbf{N}$ la fonction $x \mapsto a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$ est continue et 2π-périodique. Par convergence simple, la somme de ces fonctions est également 2π-périodique. Par convergence normale sur $\mathbf{R}$, la somme est continue et donc $\boxed{f \in C_{2\pi}.}$

Q13. Pour k et n entiers et x réel, on a $\cos^2(nx) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2nx)$ et $\sin(kx)\cos(nx) = \dfrac{1}{2}\sin((k+n)x) + \dfrac{1}{2}\sin((k-n)x)$. En intégrant ces relations, il vient $\boxed{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\,\mathrm{d}x = \pi \text{ pour } n \neq 0}$ et $\boxed{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0.}$

Q14. D'après la question 11 les séries $\sum a_k$ et $\sum b_k$ sont absolument convergentes. On en déduit que, pour $n \in \mathbf{N}$, les séries $\sum a_k\cos(kx)\cos(nx)$ et $\sum b_k\sin(kx)\cos(nx)$ sont normalement convergentes sur $\mathbf{R}$, donc aussi sur $[\,-\pi;\pi\,]$. On peut donc échanger la sommation et l'intégration sur cet intervalle, et il vient

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\ .$$

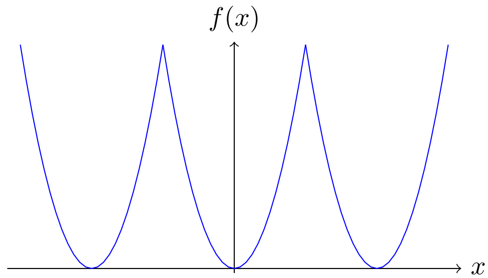
D'après ce qui précède et la relation admise, on a donc $\boxed{\alpha_n(f) = a_n \text{ si } n > 0, \text{ et } \alpha_0(f) = 2a_0.}$

Q15. On peut appliquer la question précédente à g et il vient directement, pour tout entier naturel n, $\boxed{\alpha_n(g) = \alpha_n(f) \text{ et } \beta_n(g) = \beta_n(f).}$

Q16. On pose $h = f - g$, de sorte que h appartient également à $C_{2\pi}$. De plus, par linéarité de l'intégrale, on a pour tout entier n, $\alpha_n(h) = \alpha_n(f) - \alpha_n(g) = 0$ et $\beta_n(h) = \beta_n(f) - \beta_n(g) = 0$. Il résulte de la propriété admise qu'on a $h = 0$ et donc $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ g(x) = f(x).}$

Q17. Soit n dans $\mathbf{N}$. Le changement de variable $t = -x$ donne $\beta_n(f) = -\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(-t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = -\beta_n(f)$ et donc $\boxed{\beta_n(f) = 0.}$ Avec le même changement de variable, on obtient $\boxed{\alpha_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x.}$

Q18.



Pour n entier non nul, on a

$$\int x^2 e^{inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{in}x^2e^{inx} - \frac{2}{in}\int xe^{inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{in}x^2e^{inx} + \frac{2}{n^2}xe^{inx} - \frac{2}{in^3}e^{inx}$$

et donc $\alpha_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{2}{n^2}(-1)^n\pi$. Par parité $\beta_n(f) = 0$ pour tout entier n et un calcul direct donne $\alpha_0 = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\pi^3}{3}$ et on conclut $\boxed{\alpha_0(f) = \dfrac{2\pi^2}{3},\ \alpha_n(f) = (-1)^n\dfrac{4}{n^2} \text{ pour } n > 0 \text{ et } \beta_n(f) = 0 \text{ pour } n \in \mathbf{N}.}$ Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum \alpha_n(f)$ converge absolument et il résulte donc des questions précédentes que la série trigonométrique

$$\boxed{\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2} \text{ converge normalement sur } \mathbf{R} \text{ vers } f.}$$

Q19. En prenant successivement $x = 0$ et $x = \pi$, on en déduit $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$ Comme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, on en déduit $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.}$

Q20. La fonction étudiée est continue sur $\mathbf{R}_+^*$ comme rapport de fonctions continues, le dénominateur ne s'y annulant pas. La fonction est prolongeable par continuité en 0 puisque c'est la fonction pente en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, qui est de classe C^∞ sur $]-1;+\infty[$. Par conséquent la fonction étudiée est la restriction à $]0;1[$ d'une fonction continue sur $[0;1]$, et est donc $\boxed{\text{intégrable sur l'intervalle }]0;1[.}$ On a, pour x dans $]0;1[$ et n dans $\mathbf{N}^*$, d'après la formule de Taylor-Laplace, dite avec reste intégral normalisé,

$$\left|\frac{\ln(1+x)}{x} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{k-1}}{k}\right| = x^n\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\frac{n!}{(1+xt)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

et par conséquent, par croissance de l'intégrale et puisqu'on a $0 < x < 1$, et donc $0 < x^n \leq 1$, et $1 + xt \geq 1$ pour t dans $]0;1[$, et donc $\dfrac{1}{(1+xt)^{n+1}} \leq 1$,

$$\left| \frac{\ln(1+x)}{x} - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{k-1}}{k} \right| \leq \int_0^1 (1-t)^n \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n}$$

de sorte que la série de fonctions $\sum (-1)^{k-1} \dfrac{x^{k-1}}{k}$ converge uniformément sur $]0;1[$ vers la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. On peut donc échanger intégration et série pour obtenir

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{k-1}}{k} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \,.$$

Il résulte donc de la question précédente qu'on a $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}.}$

Remarque : puisqu'on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 \left| (-1)^{k-1} \frac{x^{k-1}}{k} \right| \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$, on peut aussi utiliser le théorème d'intégration terme à terme.

Q21. L'exemple étudié en question 18 permet de répondre négativement puisque la convergence est normale, mais la fonction somme n'est pas dérivable en les multiples impairs de π :

[la somme d'une série trigonométrique convergeant normalement sur $\mathbf{R}$ n'est pas nécessairement dérivable sur $\mathbf{R}$. **]**

Si les séries $\sum n a_n$ et $\sum n b_n$ sont absolument convergentes, alors il en va de même pour $\sum a_n$ et $\sum b_n$ car $a_n = \mathrm{o}\,(n a_n)$ et $b_n = \mathrm{o}\,(n b_n)$, et la question 9 permet d'affirmer que les séries $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ et $\sum (n b_n \cos(nx) - n a_n \sin(nx))$ sont normalement convergentes sur $\mathbf{R}$. Il résulte alors du théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, que

[si les séries $\sum n a_n$ et $\sum n b_n$ sont absolument convergentes, alors la somme de la série trigonométrique, normalement convergente sur $\mathbf{R}$, $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$. **]**

De plus, dans ce cas, la dérivée de cette fonction est donnée par la somme de la série trigonométrique $\sum (n b_n \cos(nx) - n a_n \sin(nx))$.

Q22. On applique ce qui précède aux suites définies par $a_n = 0$ et $b_n = 3^{-n}$. On a alors $n b_n = \mathrm{o}\,(2^{-n})$ par croissance comparée, et donc par comparaison entre séries à termes positifs avec une série géométrique convergente, la série $\sum n b_n$ est absolument convergente. Comme il est de même pour la série nulle, en appliquant le résultat précédent, avec le complément sur la dérivée, la somme de la série étudiée est la dérivée de la somme de la série $\sum \dfrac{\sin(nx)}{3^n}$, qui a déjà été calculée en question 5, à savoir $x \mapsto \dfrac{3}{2} \dfrac{\sin(x)}{5 - 3\cos(x)}$. On obtient donc, pour x réel, $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n} \cos(nx) = \frac{3}{2} \frac{5\cos(x) - 3}{(5 - 3\cos(x))^2}.}$