# CCINP 2017 - MP - Deuxième composition

**Notations**

- Dans tout le sujet, $\mathbf{K}$ désigne les corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, $p$ désigne un entier supérieur ou égal à 2.
- On note $\mathscr{M}_p(\mathbf{K})$ le $\mathbf{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille $p$ à coefficients dans $\mathbf{K}$.
- On note $I_p$ la matrice unité de $\mathscr{M}_p(\mathbf{K})$.
- Si $x = (x_1, \ldots, x_p)$ est un vecteur de $\mathbf{K}^p$, on note $\|x\|_\infty$ sa norme uniforme, définie par :
$$\|x\|_\infty = \max\left\{|x_i| \mid i \in [\![1;p]\!]\right\} \ .$$
- On dit que $x$ est un vecteur stochastique si ses coordonnées sont positives ou nulles et leur somme vaut 1 :
$$\forall i \in [\![1;p]\!] \ , \ x_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p} x_i = 1 \ .$$
- Une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathscr{M}_p(\mathbf{R})$ est dite stochastique si ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chacune des ses lignes vaut 1, i.e. :
$$\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2 \ , \ a_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1;p]\!] \ , \ \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = 1 \ .$$
- Une matrice $A$ est dite strictement positive si tous ses coefficients sont strictement positifs. On note alors $A > 0$.
- Si $b_1, b_2, \ldots, b_k$ sont des nombres complexes (respectivement des matrices carrées), on note $\mathrm{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ la matrice diagonale (respectivement diagonale par blocs) dont les coefficients diagonaux (respectivement blocs diagonaux) sont $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

**Objectifs**

Le problème traite de matrices stochastiques dans un contexte probabiliste de chaîne de Markov (partie I). On étudie le spectre d'une matrice stochastique $A$ (partie II) et la suite des itérés de $A$ (partie III). On introduit aussi la notion de probabilité invariante de $A$ (partie IV).

La partie I est indépendante des autres parties. La partie IV utilise les deux résultats démontrés dans les parties II et III.

## PARTIE I - Un exemple de chaîne de Markov

Une particule possède deux états possibles numérotés 1 et 2 et peut passer de son état à l'état 1 ou 2 de façon aléatoire. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel on définit pour tout $n$ dans $\mathbf{N}$ la variable aléatoire $X_n$ égale à l'état de la particule au temps $n+1$ qui dépend uniquement de son état au temps $n$ selon les règles suivantes :

- si au temps $n$ la particule est dans l'état 1, au temps $n+1$ elle passe à l'état 2 avec une probabilité $\dfrac{1}{2}$.
- si au temps $n$ la particule est dans l'état 2, au temps $n+1$ elle passe à l'état 1 avec une probabilité $\dfrac{1}{4}$.

On suppose $\mathbf{P}(X_0 = 1) = \mathbf{P}(X_0 = 2) = \dfrac{1}{2}$.

Q1. Déterminer en justifiant la loi de $X_1$.

On pose $\mu_n = (\mathbf{P}(X_n = 1), \mathbf{P}(X_n = 2))$ le vecteur ligne de $\mathbf{R}^2$ caractérisant la loi de $X_n$.

Q2. Justifier la relation matricielle suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N}\,,\ \mu_{n+1} = \mu_n A \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} .$$

Q3. Temps de premier accès à l'état 1 : on note $T$ la variable aléatoire égale au plus petit entier $n$ dans $\mathbf{N}$ tel que $X_n = 1$. Déterminer $\mathbf{P}\left(T = 1\right)$, puis $\mathbf{P}\left(T = k\right)$ pour tout entier $k \geq 2$.

Q4. Justifier que $A$ est diagonalisable, puis donner, sans détailler les calculs, une matrice $Q$ inversible à coefficients entiers telle que

$$A = Q \operatorname{diag}\left(1, \frac{1}{4}\right) Q^{-1} .$$

Q5. Justifier que les applications $M \mapsto QMQ^{-1}$ et $M \mapsto \mu_0 M$ définies sur $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ sont continues.

Q6. En déduire la convergence de la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbf{N}}$, puis celle de la suite des vecteurs lignes $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Préciser les coefficients du vecteur ligne obtenu comme limite.

La suite des variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un cas particulier de variables aléatoires dont l'état à l'instant $n+1$ ne dépend que de son état à l'instant $n$ et pas des précédents. On dit alors que $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une chaîne de Markov. Plus généralement si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une chaîne de Markov prenant ses valeurs dans $[\![1;p]\!]$, la loi des variables $X_n$ est entièrement déterminée par la donnée de la loi $X_0$ et d'une matrice stochastique $A$ de $\mathscr{M}_p(\mathbf{R})$.

Si on pose maintenant $\mu_n = \left(\mathbf{P}\left(X_n = 1\right), \mathbf{P}\left(X_n = 2\right), \ldots, \mathbf{P}\left(X_n = p\right)\right)$, l'étude du comportement de la loi de $X_n$ lorsque $n$ est grand, se ramène alors à l'étude de la convergence de la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $\mu_{n+1} = \mu_n A$. Cela conduit à l'étude de la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbf{N}}$. C'est l'objet des parties suivantes.

## PARTIE II - Spectre d'une matrice stochastique

Soit $A$ une matrice stochastique de $\mathscr{M}_p(\mathbf{R})$.

Q7. Justifier que 1 est valeur propre de $A$ (on pourra considérer le vecteur colonne de $\mathbf{R}^p$ dont toutes les coordonnées valent 1).

Q8. Soit $x$ un vecteur colonne de $\mathbf{C}^p$. Démontrer $\left\|Ax\right\|_\infty \leq \left\|x\right\|_\infty$.

Q9. En déduire que si $\lambda$ dans $\mathbf{C}$ est une valeur propre de $A$, on a $|\lambda| \leq 1$.

**Localisation des valeurs propres**

Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$.

Q10. Justifier l'existence d'un vecteur colonne $x = (x_1, \ldots, x_p)$ de $\mathbf{C}^p$ tel que $\left\|x\right\|_\infty = 1$ et $Ax = \lambda x$.

Q11. Soit $i$ dans $[\![1;p]\!]$ tel que $|x_i| = 1$. Démontrer

$$|\lambda - a_{i,i}| \leq 1 - a_{i,i} .$$

**Étude d'un exemple**

Q12. Dans cette question uniquement, on prend :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} .$$

Déduire de la question précédente que les valeurs propres de $A$ sont contenues dans la réunion de trois disques, que l'on représentera en précisant leurs centres et leurs rayons.

On constate en particulier que 1 est la seule valeur propre de $A$ de module 1. On admettra, dans la suite du problème, que cette propriété reste vraie pour toute matrice stochastique **strictement positive**.

**Cas des matrices stochastiques strictement positives**

Q13. On suppose en plus pour cette question et la question suivante que la matrice $A$ est strictement positive. On pose $B = A - I_p$ et on note $B'$ la matrice de $\mathscr{M}_{p-1}(\mathbf{R})$ obtenue en supprimant la dernière colonne et la dernière ligne de $B$.
Soit $\lambda$ dans $\mathbf{C}$ une valeur propre de $B'$.
On admet qu'il existe un entier de $i$ dans $[\![1; p-1]\!]$ tel que :

$$|\lambda - (a_{i,i} - 1)| \leq 1 - a_{i,i} - a_{i,p} \ .$$

La démonstration (non demandée) de cette inégalité est similaire à celle de la question Q11.
Déduire de cette inégalité que $B'$ est inversible.

Q14. En déduire $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_p)) = 1$.

On admet sans démonstration que 1 est racine simple du polynôme caractéristique de $A$. On dit alors que 1 est une valeur propre de simple de $A$. Nous pouvons résumer les résultats de cette partie par la **Proposition 1** ci-dessous.

**Proposition 1.** *Soit $A$ une matrice stochastique de $\mathscr{M}_p(\mathbf{R})$ strictement positive. Alors 1 est valeur propre simple et les autres valeurs propres ont un module strictement inférieur à* 1.

## PARTIE III - Itérées d'une matrice stochastique

On démontre dans cette partie la proposition suivante :

**Proposition 2.** *Pour toute matrice $A$ dans $\mathscr{M}_p(\mathbf{R})$, stochastique et strictement positive, la suite $(A^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathscr{M}_p(\mathbf{R})$.*

**Un contre-exemple**

Q15. On considère $s$ la symétrie orthogonale de $\mathbf{R}^2$ par rapport à la droite d'équation $y = x$. Donner, sans justification, la matrice $B$ de $s$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

Q16. La Proposition 2 reste-t-elle vraie si la matrice stochastique n'est pas strictement positive ?

**Résultat préliminaire**
Soit $\lambda$ un nombre complexe avec $|\lambda| < 1$ et $N$ une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_p(\mathbf{C})$.

Q17. Démontrer $N^p = 0$.

Q18. Soit $k \in \mathbf{N}$. Justifier que pour $n$ au voisinage de $+\infty$, $\binom{n}{k}$ est équivalent à $\dfrac{n^k}{k!}$. En déduire la limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ de $\binom{n}{k}\lambda^{n-k}$.

Q19. En déduire que la suite de matrices $((\lambda I_p + N)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers la matrice nulle.

**Convergence d'une suite de matrice**
Soit $A$ une matrice stochastique et strictement positive de $\mathscr{M}_p(\mathbf{R})$. On sait, d'après la Proposition 1, que 1 est valeur propre simple de $A$. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les autres valeurs propres complexes de $A$, on sait que $A$ est semblable sur $\mathbf{C}$ à une matrice diagonale par blocs du type

$$\mathrm{diag}(1, \lambda_1 I_{p_1} + N_1, \ldots, \lambda_r I_{p_r} + N_r)$$

avec $p_1, \ldots, p_r$ des entiers et $N_1, \ldots, N_r$ des matrices nilpotentes à coefficients complexes.

Q20. Déduire de la question Q19 que la suite $(A^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

## PARTIE IV - Probabilité invariante par une matrice stochastique

**Définition.** *Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbf{R})$ une matrice stochastique. On dit que $A$ admet une probabilité invariante s'il existe un vecteur ligne stochastique $\mu$ dans $\mathbf{R}^p$ tel que $\mu A = \mu$ (on dit alors que $\mu$ est une probabilité invariante de $A$).*

Le but de cette partie est de démontrer la Proposition 3 ci-dessous.

**Proposition 3.** *Soit $A$ dans $\mathscr{M}_p(\mathbf{R})$ une matrice stochastique strictement positive et $\mu_0$ dans $\mathbf{R}^p$ un vecteur ligne stochastique. On note $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de vecteurs lignes de $\mathbf{R}^p$ définie par la relation $\mu_{n+1} = \mu_n A$. Alors, la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un vecteur stochastique $\mu_\infty$ vérifiant $\mu_\infty = \mu_\infty A$. De plus, le vecteur $\mu_\infty$ est l'unique probabilité invariante par $A$ (il ne dépend donc pas du choix de $\mu_0$).*

Soit $A$ dans $\mathscr{M}_p(\mathbf{R})$ une matrice stochastique strictement positive et $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie ci-dessus.

Q21. Démontrer que l'ensemble des vecteurs stochastiques de $\mathbf{R}^n$ est une partie fermée de $\mathbf{R}^n$.

### Convergence de la suite

Q22. Démontrer que la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un vecteur $\mu_\infty$ vérifiant $\mu_\infty = \mu_\infty A$.

Q23. Soit $\mu = (m_1, \ldots, m_p)$ un vecteur ligne stochastique. Démontrer que $\mu A$ est encore un vecteur stochastique.

Q24. En déduire que $\mu_\infty$ est une probabilité invariante par $A$.

### Unicité de la probabilité invariante

Q25. Lien avec le spectre de la transposée de $A$ : soit $\mu$ dans $\mathbf{R}^p$ un vecteur ligne stochastique. Justifier que $\mu$ est une probabilité invariante pour $A$, si et seulement si le vecteur colonne $\mu^{\mathrm{T}}$ est un vecteur propre de $A^{\mathrm{T}}$ associé à la valeur propre 1.

Q26. Justifier, en utilisant la question Q14, que $\dim(\mathrm{Ker}\left(A^{\mathrm{T}} - I_p\right)) = 1$.

Q27. En déduire que $A$ admet une unique probabilité invariante.

# CCINP 2017 - MP - Deuxième composition

## PARTIE I

Un exemple de chaîne de Markov

Q1. Par définition $X_0(\Omega) = X_1(\Omega) = [\![1;2]\!]$. La formule des probabilités totales donne, pour $k$ dans $[\![1;2]\!]$, $\mathbf{P}(X_1 = k) = \sum_{j=1}^{2} \mathbf{P}(X_1 = k \,|\, X_0 = j)\,\mathbf{P}(X_0 = j)$, soit $\mathbf{P}(X_1 = k) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} \mathbf{P}(X_1 = k \,|\, X_0 = j)$. On en déduit que $\boxed{\text{la loi de } X_1 \text{ est donnée par } \mathbf{P}(X_1 = 1) = \dfrac{3}{8},\ \mathbf{P}(X_1 = 2) = \dfrac{5}{8}.}$

Q2. D'après la modélisation, pour tout entier $n$ dans $\mathbf{N}$, on a $X_n(\Omega) = X_{n+1}(\Omega) = [\![1;2]\!]$. La formule des probabilités totales donne, pour $k$ dans $[\![1;2]\!]$, $\mathbf{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{j=1}^{2} \mathbf{P}(X_{n+1} = k \,|\, X_n = j)\,\mathbf{P}(X_n = j)$, avec la convention $\mathbf{P}(A \,|\, B)\,\mathbf{P}(B) = 0$ si $\mathbf{P}(B) = 0$. Autrement dit $\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 1) + \dfrac{1}{4}\mathbf{P}(X_n = 2)$ et $\mathbf{P}(X_{n+1} = 2) = \dfrac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 1) + \dfrac{3}{4}\mathbf{P}(X_n = 2)$, ce qui s'écrit aussi $\boxed{\mu_{n+1} = \mu_n A.}$

Q3. On a $(T = 0) = (X_0 = 1)$ et, pour $k \geq 1$, $(T = k) = (X_0 = \cdots = X_{k-1} = 2, X_k = 1)$ et donc, par formule des probabilités composées

$$\mathbf{P}(T = k) = \mathbf{P}(X_0 = 2)\,\mathbf{P}(X_1 = 2 \,|\, X_0 = 2) \cdots \mathbf{P}(X_k = 1 \,|\, X_{k-1} = \cdots = X_0 = 2)\ .$$

Comme l'état à l'instant $p$ ne dépend que de celui à l'instant $p - 1$, il vient

$$\mathbf{P}(T = k) = \mathbf{P}(X_0 = 2)\,\mathbf{P}(X_1 = 2 \,|\, X_0 = 2) \cdots \mathbf{P}(X_k = 1 \,|\, X_{k-1} = 2)\ ,$$

soit $\mathbf{P}(T = k) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-1}\dfrac{1}{4}$, i.e. $\boxed{\mathbf{P}(T = k) = \dfrac{3^{k-1}}{2^{2k+1}}.}$.

Q4. Le polynôme caractéristique de $A$ est $X^2 - \dfrac{5}{4}X + \dfrac{1}{4}$, de discriminant $\dfrac{21}{16}$. Ce discriminant étant strictement positif, $\chi_A$ admet deux racines réelles distinctes. Autrement dit $\chi_A$ est simplement scindé sur $\mathbf{R}$ et donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$ On peut prendre $\boxed{Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.}$

Q5. L'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ est de dimension finie et les deux applications considérées sont linéaires. Il en résulte qu' $\boxed{\text{elles sont continues.}}$

Q6. On munit $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ d'une norme quelconque. Par équivalence des normes en dimension finie, la convergence d'une suite de matrices équivaut à la convergence des suites de leurs coefficients. D'après la question Q4, pour tout entier $n$ on a $A^n = Q\mathrm{diag}(1, 4^{-n})Q^{-1}$ et donc, par continuité de la conjugaison par $Q$, $\boxed{\lim A^n = Q\mathrm{diag}(1,0)Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.}$ D'après la question Q2, pour tout entier naturel $n$ on a $\mu_n = \mu_0 A^n$. Par continuité de la multiplication à gauche par $\mu_0$, on en déduit $\boxed{\lim \mu_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.}$

## PARTIE II

Q7. Si on note $e$ le vecteur dont toutes les coordonnées valent 1, alors $e$ est non nul et on a $Ae = e$, de sorte que $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } A.}$

Q8. On écrit $x = (x_1, \dots, x_n)$ et il vient par inégalité triangulaire et positivité des coefficients de $A$, pour $i$ dans $[\![1;p]\!]$,

$$\left|\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\left|x_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right)\|x\|_\infty \leq \|x\|_\infty$$

puisque $A$ est stochastique. Par passage au maximum, il vient $\boxed{\|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty.}$

Q9. Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ dans $\mathbf{C}$ et $x$ un vecteur propre associé. On a donc $x \neq 0$ et $Ax = \lambda x$. Il résulte de la question précédente qu'on a $|\lambda|\,\|x\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ et donc, puisque $x$ est non nul, $\boxed{|\lambda| \leq 1.}$

Q10. Puisque $\lambda$ est valeur propre, on dispose de $y$ non nul tel que $Ay = \lambda y$. On dispose également de $x$ unitaire pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ tel que $y = \|y\|_\infty x$. On a alors $Ay = \|y\|_\infty Ax$ et $\lambda y = \|y\|_\infty \lambda x$. Comme $\|y\|_\infty$ est non nul, il en découle $\boxed{Ax = \lambda x.}$

Q11. On tire de $Ax = \lambda x$, en considérant les $i^{\text{e}}$ coordonnées, $\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$ et donc $(\lambda - a_{i,i})x_i = \sum_{j\neq i} a_{i,j}x_j$.

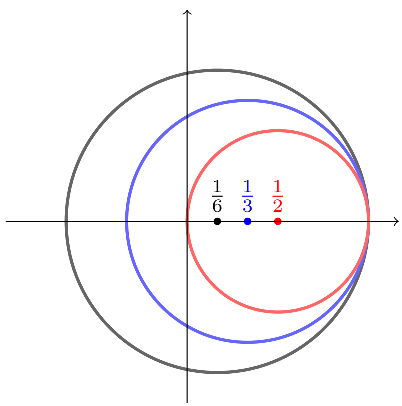
Par inégalité triangulaire et positivité des coefficients de $A$, il vient

$$|\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{j\neq i} a_{i,j}\left|x_j\right| \leq \left(\sum_{j\neq i} a_{i,j}\right)\|x\|_\infty \ .$$

Puisque $x$ est unitaire et $A$ stochastique, il en découle $\boxed{|\lambda - a_{i,i}| \leq 1 - a_{i,i}.}$

Q12. La matrice $A$ est bien stochastique et donc, d'après la question précédente, pour toute valeur propre $\lambda$ de $A$, l'une des trois conditions $\left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$, $\left|\lambda - \frac{1}{6}\right| \leq \frac{5}{6}$ et $\left|\lambda - \frac{1}{3}\right| \leq \frac{2}{3}$, est vérifiée. Autrement dit

$\boxed{\lambda \text{ est contenu dans la réunion des disques de centres respectifs } \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3} \text{ et } \tfrac{1}{6}, \text{ de rayons respectifs } \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3} \text{ et } \tfrac{5}{6}.}$




Q13. Si 0 est valeur propre de $B'$, on dispose d'un entier dans $[\![1;p-1]\!]$ tel que $|1 - a_{i,i}| \leq 1 - a_{i,i} - a_{i,p} < 1 - a_{i,i}$ puisque $a_{i,p}$ est strictement positif. Comme c'est impossible, $B'$ n'admet pas 0 comme valeur propre et donc $\boxed{B' \text{ est inversible.}}$

Q14. On écrit un élément du noyau de $B$ par blocs : $X = \begin{pmatrix} X' \\ a \end{pmatrix}$, et on écrit $B$ par blocs : $B = \begin{pmatrix} B' & U \\ V^{\mathrm{T}} & b \end{pmatrix}$.

Il vient $B'X' + aU = 0$ et donc $X' = -a(B')^{-1}U$, de sorte que $X$ est un multiple de $\begin{pmatrix} -(B')^{-1}U \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc $\mathrm{Ker}(B)$ est de dimension inférieure à 1. Comme 1 est valeur propre d'après la question Q7, on a $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(A - I_p)) = 1.}$

## PARTIE III

Q15. $\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$

Q16. On a, pour tout entier naturel $n$, $B^{2n} = I_2$ et $B^{2n+1} = B$, donc la suite $(B^n)$ possède deux valeurs d'adhérence et diverge. Pourtant $B$ est stochastique, donc

$\boxed{\text{la proposition 2 est en défaut si on ne suppose pas la matrice stochastique strictement positive.}}$

Q17. Puisque $N$ est nilpotente, $N$ est annulée par un polynôme de la forme $X^k$. Son spectre complexe est donc inclus dans les racines de ce polynôme, i.e. toutes les valeurs propres de $N$ sont nulles. Comme $\mathbf{C}$ est algébriquement clos, on en déduit que $\chi_N$ admet uniquement 0 comme racine et est donc égal à $X^p$, puisque $\chi_N$ est unitaire. Le théorème de Cayley-Hamilton assure alors $\boxed{N^p = 0.}$

Q18. Pour $n$ dans $\mathbf{N}$ avec $n \geq k$, on a $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$. Comme chacun des termes du produit au numérateur est équivalent à $n$ en $+\infty$, il en résulte $\boxed{\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}.}$ On en déduit $\binom{n}{k}\lambda^{n-k} \sim \dfrac{1}{\lambda^k k!} n^k \lambda^n$. Par croissance comparée et puisqu'on a $|\lambda| < 1$, il vient $\boxed{\lim \binom{n}{k}\lambda^{n-k} = 0.}$

Q19. Puisque $\lambda I_p$ et $N$ commutent, pour tout entier $n$ supérieur à $p$, on a

$$(\lambda I_p + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k\,,$$

et donc, par inégalité triangulaire, en munissant $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ d'une norme quelconque,

$$\|(\lambda I_p + N)^n\| \leq \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} |\lambda|^{n-k} \left\|N^k\right\| \,.$$

D'après la question précédente et par linéarité de la limite, le membre de droite tend vers 0 et donc, par encadrement (et équivalence des normes en dimension finie), $\boxed{\lim(\lambda I_p + N)^n = 0.}$

Q20. On dispose de $Q$ dans $\mathrm{GL}_p(\mathbf{R})$ tel que $A = Q\mathrm{diag}(1, \lambda_1 I_{p_1} + N_1, \ldots, \lambda_r I_{p_r} + N_r)Q^{-1}$ et donc, pour tout entier naturel $n$ on a $A^n = Q\mathrm{diag}(1, (\lambda_1 I_{p_1} + N_1)^n, \ldots, (\lambda_r I_{p_r} + N_r)^n)Q^{-1}$, puisque la conjugaison par $Q$ est un automorphisme d'algèbre. On munit les espaces de matrices de normes arbitraires, équivalentes car on a affaire à des espaces de dimension finie, de sorte que la convergence des matrices est équivalente à celle de leurs coefficients. La question Q19 montre que tous les blocs diagonaux ont une limite et donc on a $\lim \mathrm{diag}(1, (\lambda_1 I_{p_1} + N_1)^n, \ldots, (\lambda_r I_{p_r} + N_r)^n) = \mathrm{diag}(1, 0 \ldots, 0)$. Par continuité de la conjugaison vue en question Q5, on en déduit que $\boxed{(A^n) \text{ converge vers } Q\mathrm{diag}(1, 0, \ldots, 0)Q^{-1}.}$

## PARTIE IV

Q21. Puisque $\mathbf{R}_+$ est fermé, il en va de même de $(\mathbf{R}_+)^n$ en tant que produit de fermés. Comme la forme linéaire $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1} x_i$ est une forme linéaire en dimension finie, elle est continue et donc l'image réciproque du singleton fermé $\{1\}$ est également fermée. L'intersection de deux fermés étant fermée, il en résulte que $\boxed{\text{l'ensemble des vecteurs stochastiques est fermé de } \mathbf{R}^n.}$

Q22. Il résulte de la convergence de $(A^n)$ vue en question Q20 et de la continuité de la multiplication à gauche par $\mu_0$ vue en question Q5, que $(\mu_0 A^n)$ converge, i.e. $\boxed{(\mu_n) \text{ converge.}}$ La multiplication à droite par $A$ est linéaire et donc continue sur $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbf{R})$. Par passage à la limite dans l'égalité $\mu_{n+1} = \mu_n A$ et par continuité de la multiplication à droite par $A$, il vient $\boxed{\mu_\infty = \mu_\infty A.}$

Q23. Pour $j$ dans $[\![1;p]\!]$, la $j^{\text{e}}$ coordonnée de $\mu A$ est donnée par $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_{i,j} m_i$ et est donc une somme de produits de termes positifs puisque $A$ et $\mu$ sont stochastiques. De plus la somme de ces coordonnées est donnée par

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} a_{i,j} m_i = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) m_i = \sum_{i=1}^{p} m_i = 1$$

puisque $A$ et $\mu$ sont stochastiques. On en déduit que $\boxed{\mu A \text{ est stochastique.}}$

Q24. Puisque $\lim \mu_n = \mu_\infty$, que $(\mu_n)$ est à valeurs dans la partie fermée des vecteurs stochastique, il en va de même pour $\mu_\infty$. Par définition $\boxed{\mu_\infty \text{ est une probabilité invariante par } A.}$

Q25. Puisque $\mu$ est supposé stochastique, $\mu$ est une probabilité invariante par $A$ si et seulement si $\mu = \mu A$, i.e., puisque la transposition est un anti-homomorphisme, $\mu^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} \mu^{\mathrm{T}}$ ou encore, puisque $\mu^{\mathrm{T}} \neq 0$, si et seulement si $\boxed{\mu^{\mathrm{T}} \text{ est propre pour } A^{\mathrm{T}} \text{ pour la valeur propre 1.}}$

Q26. Puisqu'une matrice et sa transposée ont même rang, on a $\mathrm{rg}(A^{\mathrm{T}} - I_p) = \mathrm{rg}(A - I_p)$. En utilisant le théorème du rang, on en déduit $\dim(\mathrm{Ker}(A^{\mathrm{T}} - I_p)) = \dim(\mathrm{Ker}(A - I_p))$. Il résulte donc de la question Q14 qu'on a $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(A^{\mathrm{T}} - I_p)) = 1.}$

Q27. Soit $D$ une droite et $x$ un vecteur de $D$ dont la somme des coordonnées est 1. Alors pout $\lambda$ dans $\mathbf{R}$, la somme des coordonnées de $\lambda x$ est $\lambda$. On en déduit qu'une droite contient au plus un vecteur dont la somme des coordonnées est 1 et donc, a fortiori, au plus un vecteur stochastique. C'est en particulier le cas de $\mathrm{Ker}(A^{\mathrm{T}} - I_p)$, qui est une droite d'après la question précédente. Il résulte alors des questions Q24 et Q25 que $A$ possède une probabilité invariante, qu'elle appartient à la droite $\mathrm{Ker}(A^{\mathrm{T}} - I_p)$ et est donc unique : $\boxed{A \text{ admet une unique probabilité invariante.}}$