CCINP 2018 - MP - Première épreuve

ESTIMATIONS NUMÉRIQUES D'INTÉGRALES

Objectifs

Le fil conducteur de ce sujet est le calcul approché d'intégrales. La partie I est indépendante des autres parties. À travers l'exemple de l'intégrale de Gauss, on utilise des suites de fonctions et on « permute limite et intégrale ». Les parties II et III peuvent être traitées de manière indépendante. La partie IV utilise des résultats des parties II et III.

Les parties II, III et IV traitent de l'utilisation de polynômes interpolateurs pour le calcul approché d'intégrales : on présente le principe des méthodes de quadrature, dite de Newton-Cotes, ainsi qu'un raffinement avec la méthode de quadrature de Gauss.

Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage `Python`.

Notations

— Si f est une fonction réelle bornée sur $[a;b]$ avec $a<b$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a;b]} |f(x)| \ .$$

— On note $\mathbf{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On pourra confondre les expressions « polynômes » et « fonctions polynomiales ».

PARTIE I - « Permutation limite-intégrale » et intégrales de Gauss

On considère l'intégrale de Gauss

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

I.A - Utilisation d'une série entière

Q1. Démontrer à l'aide d'une série entière

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$$

On pose, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}$$

Q2. Justifier pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$|I - s_n| \leq \frac{1}{(2n+3)\,(n+1)!}$$

Q3. *Informatique* : écrire une fonction récursive `factorielle` qui prend en argument un entier n et renvoie l'entier $n!$.

Q4. *Informatique* : en déduire un script qui détermine un entier N tel que $|I - s_N| \leq 10^{-6}$.

I.B - Utilisation d'une autre suite de fonctions

Pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, on définit sur $\mathbf{R}_+$ la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$$

Q5. Déterminer, en détaillant, la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

Q6. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Démontrer $\forall x \in [0;1]$, $|f_n(x)| \leq e^{-x^2}$. En déduire

$$I = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k(2k+1)} \ .$$

PARTIE II - Notion de polynôme interpolateur

Soit $f : [a; b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On se donne $n+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dans $[a; b]$, deux à deux distincts.
On appelle polynôme interpolateur de f aux points x_i, un polynôme P dans $\mathbf{R}_n[X]$ qui coïncide avec f aux points x_i, c'est-à-dire tel que pour tout i dans $[\![0; n]\!]$, $P(x_i) = f(x_i)$.

II.A - Existence du polynôme interpolateur

Pour tout entier i de $[\![0; n]\!]$, on définit le polynôme ℓ_i de $\mathbf{R}_n[X]$ par :

$$\ell_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - x_k}{x_i - x_k} .$$

On pose :

$$L_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \ell_i(X) .$$

Q7. Démontrer que $L_n(f)$ est un polynôme interpolateur de f aux points x_i, puis démontrer l'unicité d'un tel polynôme.

Un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange.

II.B - Calcul effectif du polynôme interpolateur de Lagrange

Q8. *Informatique* : si $y_0, \ldots, y_n$ sont des réels, le polynôme $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(X)$ est l'unique polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout i. Écrire en langage `Python` une fonction `lagrange` qui prend en arguments x une liste de points d'interpolations x_i, y une liste d'ordonnées y_i de même longueur que x, a un réel, et qui renvoie la valeur de P en a.

Par exemple, si `x=[-1,0,1]` et `y=[4,0,4]`, on montre que $P = 4X^2$ et donc $P(3) = 36$. Ainsi `lagrange(x,y,3)` renverra 36.

Q9. *Informatique* : chercher le polynôme interpolateur $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ de f aux points x_i revient aussi à résoudre le système linéaire suivant d'inconnues $a_0, \ldots, a_n$:

$$V \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

où V est une matrice carrée de taille $n+1$.

Déterminer la matrice V et indiquer la complexité du calcul en fonction de n, lorsque l'on résout ce système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.

II.C - Expression de l'erreur d'interpolation

On suppose, en plus dans cette sous-partie, que f est de classe C^{n+1} sur $[a; b]$. On rappelle que $L_n(f)$ est son unique polynôme interpolateur aux points x_i.
On note $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des points d'interpolations et π_σ le polynôme de $\mathbf{R}_{n+1}[X]$ défini par

$$\pi_\sigma = \prod_{i=0}^{n} (X - x_i) .$$

On veut démontrer pour tout réel x dans $[a; b]$, la propriété suivante notée $\mathcal{P}_x$:

$$\exists c_x \in \,]a; b[\,, \ f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \pi_\sigma(x) .$$

Q10. Résultat préliminaire : soit $p \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que si $\phi : [a; b] \to \mathbf{R}$ est une fonction p-fois dérivable qui s'annule $p+1$ fois, alors il existe c dans $]a; b[$ tel que $\phi^{(p)}(c) = 0$.

Q11. Justifier que pour tout x dans σ, la propriété $\mathcal{P}_x$ est vraie.

On fixe x un réel de $[a; b]$ qui n'est pas dans σ. Soit λ un réel. On définit sur $[a; b]$ une application F par

$$F(t) = f(t) - L_n(f)(t) - \lambda \pi_\sigma(t) \ .$$

Q12. Déterminer un réel λ de sorte que $F(x) = 0$. On choisira alors λ de cette façon.

Q13. Démontrer que F s'annule $n+2$ fois et en déduire que $\mathcal{P}_x$ est vraie.

Q14. Justifier que la fonction $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[a; b]$ et en déduire un réel positif K indépendant de n tel que

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leq \frac{K^{n+1}}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty \ .$$

Q15. En déduire que si f est la fonction sinus, la suite $(L_n(f))_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0; 2\pi]$.

Q16. On définit f sur $[-1; 1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Démontrer à l'aide d'une série entière

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \left\| f^{(2k)} \right\|_\infty \geq (2k)! \ .$$

Cette dernière inégalité montre que la quantité $\left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty$ peut être grande et cela peut empêcher parfois la convergence de la suite de polynômes interpolateurs. Ceci est appelé le phénomène de Runge.

PARTIE III - Famille de polynômes orthogonaux

On munit $\mathbf{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels du produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ défini par : pour tous polynômes P et Q de $\mathbf{R}[X]$,

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t) Q(t) \, \mathrm{d}t \ .$$

On applique le procédé d'orthonomalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2, \dots)$ de $\mathbf{R}[X]$. On obtient donc une famille orthonormée de polynômes $(P_0, P_1, P_2, \dots)$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbf{N}^* \ \ \mathrm{V}ect\left(1, X, \dots, X^k\right) = \mathrm{V}ect\left(P_0, P_1, \dots, P_k\right) \ .$$

Le polynôme P_n s'appelle le polynôme de Legendre d'indice n.

Q17. Calculer P_0 et P_1.

Q18. Justifier que pour $n \geq 1$, le polynôme P_n est orthogonal à $\mathbf{R}_{n-1}[X]$. Démontrer que le polynôme P_n est de degré n.

On prend $n \geq 1$. On veut démontrer que P_n admet n racines simples dans $[-1; 1]$.

Q19. Justifier $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t) \, \mathrm{d}t = 0$ et en déduire que P_n admet au moins une racine dans $[-1; 1]$.

On suppose par l'absurde que P_n admet strictement moins de n racine simples. Si P_n admet des racines $t_1, \dots, t_p$ de multiplicité impaire avec $p < n$, on pose $Q = (X - t_1) \dots (X - t_p)$; sinon, on pose $Q = 1$. On considère enfin le polynôme $H = Q P_n$.

Q20. Justifier $\displaystyle\int_{-1}^{1} H(t) \, \mathrm{d}t = 0$, puis conclure (on pourra remarquer que H est de signe constant sur $[-1; 1]$).

PARTIE IV - Méthodes de quadrature

Dans cette partie, nous allons voir comment les polynôme interpolateurs de Lagrange peuvent être utilisés pour estimer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pour $f : [\,a;b\,] \to \mathbf{R}$ continue.
Pour cela, on choisit d'abord une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ de l'intervalle $[\,a;b\,]$. À cause du phénomène de Runge, si N est grand, le polynôme interpolateur de f aux points x_i n'est pas forcément une bonne approximation de f. Approximer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par $\displaystyle\int_a^b L_N(f)(x)\,\mathrm{d}x$ n'est donc pas forcément pertinent…
Nous allons en fait approximer f par un polynôme d'interpolation sur chaque petit intervalle $[\,x_k;x_{k+1}\,]$. D'après la relation de Chasles, on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Q21. Justifier

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x_{k+1}-x_k}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ avec } g(t) = f\left(x_k + (t+1)\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)\ .$$

On est donc ramené à estimer $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t$ où $g : [\,-1;1\,] \to \mathbf{R}$ est une fonction continue.
On se donne $n+1$ points $t_0, t_1, \ldots, t_n$ dans $[\,-1;1\,]$, deux à deux distincts.
On rappelle que $L_n(g) = \sum_{i=0}^{n} g(t_i)\ell_i(X)$ est le polynôme interpolateur de g aux points t_i et on pose

$$J(g) = \int_{-1}^{1} L_n(g)(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i g(t_i) \text{ avec } \alpha_i = \int_{-1}^{1} l_i(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Lorsqu'on approxime $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t$ par $J(g)$, c'est-à-dire :

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{i=0}^{n} \alpha_i g(t_i)\,,$$

on dit que J est une méthode de quadrature associée aux points $t_0, \ldots, t_n$ et aux poids $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$.

Q22. Justifier que pour tout polynôme P dans $\mathbf{R}_n[X]$, on a $J(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t$.

On dit que la méthode de quadrature J est d'ordre au moins n car la formule approchée est exacte pour les polynômes de dégré inférieur ou égal à n.

Q23. Exemple : on prend $n = 1$, $t_0 = -1$ et $t_1 = 1$. Déterminer α_0 et α_1. Expliquer à l'aide d'un graphique en prenant g positive pourquoi, dans ce cas, la méthode J s'appelle la « méthode des trapèzes ».

Quadrature de Gauss

Dans les deux questions suivantes, on prend pour points d'interpolation $t_0, t_1, \ldots, t_n$ les $(n+1)$ racines du polynôme de Legendre P_{n+1} introduit dans la partie III.
Nous allons démontrer que, dans ce cas, la formule de quadrature J est d'ordre au moins $2n+1$.
Soit P dans $\mathbf{R}_{2n+1}[X]$. On fait la division euclidienne de P par P_{n+1}, on note respectivement Q le quotient et R le reste de cette division :

$$P = QP_{n+1} + R\ .$$

Q24. Démontrer $J(QP_{n+1}) = \displaystyle\int_{-1}^{1} Q(t)P_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t$, puis conclure $J(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t$.

Q25. Démontrer que les poids $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ associés à la quadrature de Gauss sont strictement positifs et calculer leur somme.

CCINP 2018 - MP - Première épreuve

PARTIE I - « Permutation limite-intégrale » et intégrales de Gauss

I.A - Utilisation d'une série entière

Q1. Puisque le rayon de convergence de la série définissant l'exponentielle est infini, on a

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

et la convergence de la série est normale sur tout compact de $\mathbf{R}$. En particulier il y a convergence uniforme sur $[0;1]$ et il vient

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{n!}\,\mathrm{d}x$$

i.e. $\boxed{I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.}$

Q2. Le terme général de la série $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$ est alterné, décroissant et tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. $\boxed{\text{L'assertion résulte donc du théorème de Leibniz pour les séries alternées.}}$

Q3.

```
#!/usr/bin/env python3

def factorielle(n):
    # Si n <= 1, on renvoie 1
    if n<=1: return 1
    # Sinon on renvoie (n − 1)! × n
    return factorielle(n-1)*n
```

Q4.

```
#!/usr/bin/env python3

# On pose e_n = 1/((2n+3)(n+1)!) et on cherche n tel que e_n ≤ 10^(-6)
# On initialise n = 0 et e_0 = 1/3
n,e = 0,1/3
# Tant que e_n est strictement supérieur à 10^(-6)
# On calcule e_{n+1} = e_n (2n+3)/((2n+5)(n+2)) et on augmente n de 1
while e>10**(-6):
   e *= (2*n+3)/((2*n+5)*(n+2))
   n +=1
# Quand la boucle s'arrête on a trouvé n et on l'imprime à l'écran
print(n)
```

```python
#!/usr/bin/env python3

# Variante gourmande en calculs
# On initialise n=0
n=0
# Puis on teste si e_n <= 10^-6 ou plutôt 1/e_n >= 10^6
# Si tel n'est pas le cas, on augmente n de 1
while (2*n+3)*factorielle(n+1)<10**6:
    n+=1
# Quand c'est le cas on arrête la boucle et on imprime n à l'écran
print(n)
```

I.B - Utilisation d'une autre suite de fonctions

Q5. Soit x dans $\mathbf{R}_+$. Pour n supérieur strictement à x^2, on a $1 - \frac{x^2}{n} > 0$ et on peut écrire $f_n(x) = \exp(n \ln(1 - \frac{x^2}{n}))$. Comme on a $\frac{x^2}{n} = \mathrm{o}\,(1)$, il vient $n \ln(1 - \frac{x^2}{n}) \sim -n\frac{x^2}{n} \sim -x^2$ (y compris pour $x = 0$) et donc, par continuité de l'exponentielle, $\boxed{\lim f_n(x) = e^{-x^2}.}$

Q6. Soit x dans $[0; 1]$. Sauf si $n = x = 1$, auquel cas $0 = |f_1(1)| \leq e^{-1}$, on a par concavité du logarithme $\ln(1 - \frac{x^2}{n}) \leq -\frac{x^2}{n}$. Par positivité de n et croissance et positivité de l'exponentielle on en déduit $0 \leq f_n(x) \leq e^{-x^2}$ et donc $\boxed{|f_n(x)| \leq e^{-x^2}.}$ Toutes les fonctions considérées étant continues et donc intégrables sur $[0; 1]$, il résulte du théorème de convergence dominée qu'on a

$$I = \lim \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x$$

et donc, par linéarité de l'intégrale et formule du binôme de Newton,

$$I = \lim \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 \binom{n}{k} \frac{x^{2k}}{n^k} \mathrm{d}x$$

et donc $\boxed{I = \lim \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k(2k+1)}.}$

PARTIE II

II.A - Existence du polynôme interpolateur

Q7. Par consstruction pour i et j dans $[\![0; n]\!]$, on a $\ell_i(x_j) = \delta_{i,j}$ et donc $L_n(f)(x_j) \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\delta_{i,j} = f(x_j)$.

Il en résulte que $\boxed{L_n(f) \text{ est un polynôme interpolateur de } f \text{ aux points } x_i.}$ Si P est un tel polynôme, $L_n(f) - P$ s'annule en tous les x_i et est de degré inférieur ou égal à n. C'est donc le polynôme nul, i.e. $P = L_n(f)$. $\boxed{\text{Un tel polynôme est donc unique.}}$

II.B - Calcul effectif du polynôme interpolateur de Lagrange

Q8.

```
#!/usr/bin/env python3

def lagrange(x,y,a):
    l=0   # ℓ sera la valeur interpolée
    # On énumère x pour obtenir i et x_i
    for (i,xi) in enumerate(x):
        xc=x.copy() # on crée une copie de x pour ne pas la modifier
        xc.remove(xi) # on retire la valeur x_i de la liste copiée
        li=1 # ℓi sera la valeur de ℓ_i(a)
        # On multiplie par (a - x_j)/(x_i - x_j) pour les x_j dans xc
        for t in xc:
            li *= (a-t)/(xi-t)
        # ℓi vaut maintenant ℓ_i(a) et on ajoute y_i ℓ_i(a) à ℓ
        l+=li*y[i]
    # À la fin de la boucle ℓ vaut sum_{i=0}^{n} y_i ℓ_i(a)
    return l
```

Q9. Par identification, on a $\boxed{V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}.}$ La complexité de l'algorithme du pivot de Gauss est $\boxed{\mathrm{O}\left(n^3\right).}$

II.C - Expression de l'erreur d'interpolation

Q10. On démontre par récurrence sur k dans $[\![0;p]\!]$ le prédicat $(\mathbf{H}_k)$ donné par $\varphi^{(k)}$ s'annule $p+1-k$ fois sur $[a;b]$ si $k=0$, respectivement $]a;b[$ si $k>0$.
Le prédicat $(\mathbf{H}_0)$ est l'hypothèse de l'énoncé. Soit k dans $[\![0;p-1]\!]$ tel que $(\mathbf{H}_k)$ soit vrai. On dispose de $a_0,\dots,a_{p-k}$ dans $[a;b]$ vérifiant $a_0<\cdots<a_{p-k}$ et où $\varphi^{(k)}$ s'annule. Comme $\varphi^{(k)}$ est continue et dérivable sur les intervalles $[a_{i-1};a_i]$ pour i dans $[\![1;p-k]\!]$, le théorème de Rolle assure que $\varphi^{(k+1)}$ s'annule sur chacun des intervalles ouverts $]a_{i-1};a_i[$. Comme ces intervalles sont disjoints et inclus dans $]a;b[$, $(\mathbf{H}_{k+1})$ est vrai. L'axiome de récurrence permet de conclure en particulier que $(\mathbf{H}_p)$ est vrai, i.e. $\boxed{\exists c\in\,]a;b[,\ \varphi^{(p)}(c)=0.}$

Q11. Pour x dans σ on a $\pi_\sigma(x)=0$. En choisissant c_x arbitrairement dans $]a;b[$, e.g. $c_x=\frac{a+b}{2}$, on a, puisque $L_n(f)$ interpole f en x, $f(x)-L_n(f)(x)=0=\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\pi_\sigma(x)$, i.e. $\boxed{\mathcal{P}_x \text{ est vrai.}}$

Q12. Puisque π_σ s'annulle exactement sur σ on a $\pi_\sigma(x)\neq 0$. On pose alors $\lambda=\dfrac{f(x)-L_n(f)(x)}{\pi_\sigma(x)}$ et il vient $\boxed{F(x)=0.}$

Q13. Pour t dans σ on a $f(t)=L_n(f)(t)$ et $\pi_\sigma(t)=0$, donc $F(t)=0$. Comme on a également $F(x)=0$ et $x\notin\sigma$, $\mathrm{Card}(\sigma\cup\{x\})=n+2$ et donc $\boxed{F \text{ s'annule } n+2 \text{ fois sur } [a;b].}$ D'après la question Q10, $F^{(n+1)}$ s'anulle sur $]a;b[$. Comme $L_n(f)$ est de degré au plus n, sa dérivée $n+1^{\text{e}}$ est nulle. Comme π_σ est de degré $n+1$ et unitaire, sa dérivée $n+1^{\text{e}}$ est constante égale à $(n+1)!$. On a donc $F^{(n+1)}=$

$f^{(n+1)} - \lambda\,(n+1)!$. On dispose donc de c dans $]a;b[$ tel que $0 = F^{(n+1)}(c)$ et donc $\lambda = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$, i.e. $\boxed{\mathcal{P}_x \text{ est vrai.}}$

Q14. Puisque f est de classe C^{n+1}, $f^{(n+1)}$ existe et est continu. Comme $[a;b]$ est compact, il résulte du théorème de Weierstrass dit des bornes atteintes que $\boxed{f^{(n+1)} \text{ est borné sur } [a;b].}$ Puisque, pour x dans $[a;b]$ on a $|x_i - x| \leq (b-a)$, on a par produit de quantités positives $|\pi_\sigma(x)| \leq (b-a)^{n+1}$ et donc en posant $K = b-a$ et en utilisant $\mathcal{P}_x$, $|f(x) - L_n(f)(x)| \leq \dfrac{K^{n+1}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$. On en déduit $\boxed{\|f - L_n(f)\|_\infty \leq \frac{K^{n+1}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty.}$

Q15. Dans ce cas pour tout entier n on a $\left\|\sin^{(n+1)}\right\|_\infty = 1$ et donc $\|\sin - L_n(\sin)\|_\infty \leq \frac{(2\pi)^{n+1}}{(n+1)!}$. Comme le membre de droite est le terme général d'une série convergente, i.e. une exponentielle, il tend vers 0 et donc, par encadrement des limites, le membre de gauche aussi, i.e. $\boxed{L_n(\sin) \text{ converge uniformément vers } \sin \text{ sur } [0;2\pi].}$

Q16. Puisque on a affaire à une série entière de rayon de convergence 1, pour $|x| < 1$, on a $\frac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ et donc aussi $\frac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$. Par unicité du développement en série entière et en identifiant à la série de Taylor, on a pour k entier $f^{(2k)}(0) = (-1)^k\,(2k)!$ et donc $\boxed{\left\|f^{(2k)}\right\|_\infty \geq (2k)!\,.}$

PARTIE III - Famille de polynômes orthogonaux

Q17. On a $\|1\|^2 = 2$, $\langle 1 \,|\, X\rangle = 0$ et $\|X\|^2 = \frac{2}{3}$ donc $\boxed{P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } P_1 = \sqrt{\tfrac{3}{2}}X.}$

Q18. Soit $n \geq 1$. Par construction P_n est orthogonal à $P_0, \ldots, P_{n-1}$ et donc à l'espace que ces polynômes engendrent, i.e. $\boxed{P_n \text{ est orthogonal à } \mathbf{R}_{n-1}[X].}$ Par construction P_n appartient à $\mathbf{R}_n[X]$ et il est non nul. N'étant pas orthogonal à lui-même, il n'appartient pas à $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ et ainsi $\boxed{P_n \text{ est de degré } n.}$

Q19. Puisque P_n est orthogonal à $\mathbf{R}_{n-1}[X]$, on a $\langle 1 \,|\, P_n\rangle = 0$, i.e. $\boxed{\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t)\,\mathrm{d}t = 0.}$ Si P_n était de signe constant, étant également continu, l'égalité précédente entrainerait la nullité de P_n sur $[-1;1]$ et donc sa nullité en tant que polynôme. Comme ce n'est pas le cas P_n n'est pas de signe constant (au sens large) sur $[-1;1]$ et s'annule donc sur $]-1;1[$. En particulier $\boxed{P_n \text{ admet une racine dans } [-1;1].}$

Q20. Par construction Q est de degré p, avec $p \leq n-1$. La question Q18 permet d'obtenir $\langle P_n \,|\, Q\rangle = 0$, i.e. $\boxed{\displaystyle\int_{-1}^{1} H(t)\,\mathrm{d}t = 0.}$ Le polynôme P_n se factorise dans $\mathbf{R}[X]$ en polynômes irréductibles. Les facteurs de degré 2 sont irréductibles donc sans racine dans $\mathbf{R}$. Ils sont donc de signe constant sur $\mathbf{R}$. Les facteurs de degré 1 sont de signe constant sur $]-1;1[$ sauf si leur unique racine appartient à cet intervalle. Par construction de Q, le polynôme H est donc produit de facteurs irréductibles soit de degré 2, soit de degré 1 ayant des racines en dehors de $]-1;1[$, soit de degré 1 ayant une racine dans $]-1;1[$ mais avec une multiplicité paire. Il en résulte que H est produit de polynômes de signe constant sur $]-1;1[$ et l'est donc lui-même. La propriété précédente, jointe à sa continuité, assure que H est nul sur $]-1;1[$ et donc sur $\mathbf{R}$. Par intégrité de $\mathbf{R}[X]$ c'est impossible et cette contradiction assure que P admet au moins

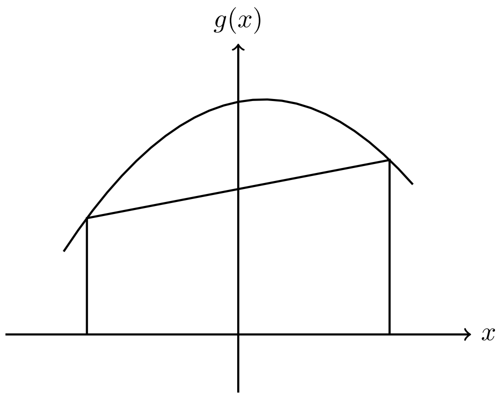
n racines de multiplicité impaire. C'est donc qu'il a exactement n racines de multiplicité 1 et aucune d'une autre multiplicité, par degré. Ainsi $\boxed{P_n \text{ est simplement scindé et ses racines sont dans } [-1;1].}$

PARTIE IV - Méthodes de quadrature

Q21. Le changement de variables affine bijectif $x(t) = x_k + (t+1)\frac{x_{k+1}-x_k}{2}$ est tel que $\mathrm{d}x = \frac{x_{k+1}-x_k}{2}\,\mathrm{d}t$, $x(-1) = x_k$ et $x(1) = x_{k+1}$, d'où $\boxed{\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x_{k+1}-x_k}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t.}$

Q22. Soit P dans $\mathbf{R}_n[X]$. Alors P est un polyôme interpolateur de lui-même en les points $t_0, \ldots, t_n$ et donc, d'après la question Q7, $P = L_n(P)$ et donc $\boxed{\displaystyle J(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t.}$

Q23. On a $\ell_0 = \dfrac{1-X}{2}$ et $\ell_1 = \dfrac{1+X}{2}$ donc $\boxed{\alpha_0 = \alpha_1 = 1.}$ On a donc $J(g) = g(-1) + g(1) = 2\frac{g(-1)+g(1)}{2}$, ce qui représente l'aire du trapèze de sommets $(-1,0)$, $(-1,g(-1))$, $(1,g(1))$ et $(1,0)$.



Q24. Puisque P est de degré inférieur à $2n+1$, donc $P-R$ aussi, Q est de degré inférieur à n. D'après la question Q18 on a donc $\langle P_{n+1} \,|\, Q\rangle = 0$. Comme pour tout i dans $[\![0;n]\!]$ on a $P_{n+1}(t_i) = 0$, on a $J(QP_{n+1}) = 0$ et ainsi $\boxed{\displaystyle J(QP_{n+1}) = \int_{-1}^{1} Q(t)P_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t.}$ D'après la question Q22 on a $J(R) = \displaystyle\int_{-1}^{1} R(t)\,\mathrm{d}t$ puisque R est de degré strictement inférieur à $n+1$. Par linéarité de l'intégrale et l'evaluation en t_i, donc de J, on en déduit $J(QP_{n+1}+R) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (Q(t)P_{n+1}(t) + R(t))\,\mathrm{d}t$, i.e. $\boxed{\displaystyle J(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t.}$

Q25. On pour tout i et j dans $[\![0;n]\!]$, $\ell_i^2(x_j) = (\delta_{i,j})^2 = \delta_{i,j}$. Comme la formule de quadrature est d'ordre au moins $2n+1$ et que ℓ_i^2 est de degré $2n$, on a $\alpha_i = J(\ell_i^2) = \|\ell_i\|^2 > 0$. On a également $\alpha_0 + \cdots + \alpha_n = J(1) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{d}t = 2$ et donc $\boxed{\alpha_0, \ldots, \alpha_n \text{ sont strictement positifs de somme } 2.}$