Première composition de mathématiques
CCINP 2019 – MP

EXERCICE I

On admet $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose, pour t dans $\mathbf{R}_+^*$, $f(t) = \dfrac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$.

Q1. Justifier que la fonction f est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$ puis, à l'aide d'un théorème d'intégration terme à terme, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

EXERCICE II

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ de loi de probabilité donnée par $\forall n \in \mathbf{N}\ p_n = \mathbf{P}(X = n)$, la fonction génératrice de X est donnée par $G_X(t) = \mathbf{E}\left(t^X\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

Q2. Démontrer que l'intervalle $]-1;1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de la fonction G_X.

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbf{N}$. On pose $S = X_1 + X_2$. Démontrer, pour tout t dans $]-1;1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$ par deux méthodes : l'une utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières et l'autre utilisant uniquement la définition : $G_X(t) = \mathbf{E}\left(t^X\right)$.

On généralise ce résultat, que l'on pourra utiliser dans la question suivante, à n variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbf{N}$ (on ne demande pas de preuve de cette récurrence).

Q3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.

On effectue n tirages d'une boule avec remise et on note S_n la somme des numéros tirés. Déterminer pour tout t dans $]-1;1[$, $G_{S_n}(t)$ et en déduire la loi de S_n.

PROBLÈME

Introduction

Dans ce sujet une série de fonctions L_a est une série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ où $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels telle que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ admette un rayon de convergence égal à 1.

Partie I - Propriétés

Soit une série de fonctions $L_a : \displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

Q4. Si x appartient à $]-1;1[$, donner un équivalent de $1 - x^n$ pour n au voisinage de $+\infty$.

Démontrer que pour tout x dans $]-1;1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument.

Remarque : la série L_a peut parfois converger en dehors de l'intervalle $]-1;1[$. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que la série L_a converge en au moins un x_0 n'appartenant pas à l'intervalle $]-1;1[$.

Q5. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge uniformément sur tout segment $[-b;b]$ inclus dans l'intervalle $]-1;1[$.

Q6. On pose, pour tout x dans $]-1;1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

Justifier que la fonction f est continue sur l'intervalle $]-1;1[$ et démontrer ensuite que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]-1;1[$. Donner la valeur de $f'(0)$.

Q7. Expression sous forme de série entière.

On note $A = \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$.

Lorsque $(u_{n,p})_{(n,p)\in A}$ est une famille sommable de réels, justifier $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right)$,

où $I_n = \{(k,p) \in A \,|\, kp = n\}$.

Démontrer que pour tout x dans $]-1;1[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p)\in A}$ est sommable. En déduire, pour tout x dans $]-1;1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ avec $b_n = \displaystyle\sum_{d|n} a_d$ ($d \mid n$ signifiant d divise n).

Partie II - Exemples

Q8. Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = 1$ et on note d_n le nombre de diviseurs de n. Exprimer, pour x dans $]-1;1[$, la fonction f donnée par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ comme la somme d'une série entière.

Q9. Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = \varphi(n)$ où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers naturels premiers avec n et inférieurs à n.

Justifier que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ admet 1 comme rayon de convergence.

On admet que pour $n \geq 1$, on a $n = \displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d)$. Vérifier ce résultat pour $n = 12$.

Pour x dans $]-1;1[$, exprimer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n}$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes.

Q10. En utilisant le théorème de la double limite, établir à l'aide du développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1;1[$, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Q11. Dans cette question et la suivante, pour $n \geq 1$, $a_n = (-1)^n$ et pour tout x dans $]-1;1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

En utilisant le théorème de la double limite, calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et donner un équivalent de f au voisinage de 0 à droite. Retrouver le dernier résultat de la question Q6.

Q12. Démontrer qu'au voisinage de 1, on a $f(x) \sim \dfrac{\ln(2)}{x-1}$.

On pourra remarquer, pour x dans $]0;1[$, $\dfrac{1-x}{1-x^n} = \dfrac{1}{1+x+\cdots+x^{n-1}}$.

Première composition de mathématiques – CCINP 2019 – MP

EXERCICE I

Q 1. En tant que composée algébrique de fonctions de référence, f est continue là où elle est bien définie, i.e. sur $\mathbf{R}_+^*$, et y est donc localement intégrable. Au voisinage de 0, on a $f(t) \sim \dfrac{t}{1-1+t+\mathrm{o}\,(t)} \sim 1$ et donc f est prolongeable par continuité en 0 et y est localement intégrable. Enfin au voisinage de $+\infty$, $f(t) = \mathrm{o}\left(e^{-t/2}\right)$ et donc par comparaison à une fonction de référence positive et intégrable en $+\infty$, f l'est aussi. Il en résulte que $\boxed{f \text{ est intégrable sur } \mathbf{R}_+^*.}$

Pour t dans $\mathbf{R}_+^*$, on a $0 < e^{-t} < 1$ et donc $\dfrac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}$ et donc $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} te^{-nt}$. On remarque que pour n dans $\mathbf{N}^*$, on a, par changement de variable et puisque la fonction donnée par $-(t+1)e^{-t}$ est une primitive de l'intégrande,

$$\int_0^{+\infty} te^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}\ .$$

Les fonctions f_n définies sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f_n(t) = te^{-nt}$ sont donc positives et la série $\sum \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n|$ converge, on peut donc intégrer terme à terme et il vient $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. En multipliant l'intégrande au numérateur et au dénominateur par e^t, il vient $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6}.}$

EXERCICE II

Q 2. Puisqu'une probabilité appartient à $[\,0;1\,]$, on a $p_n = \mathrm{O}\,(1)$ et donc, par comparaison, le rayon de convergence de $\sum p_n t^n$ est supérieur ou égal à 1. Étant inclus dans l'intervalle ouvert de convergence, $\boxed{]-1;1\,[\text{ est inclus dans le domaine de définition de } G_X.}$

On note pour n dans $\mathbf{N}$, $p_n = \mathbf{P}\,(X_1 = n)$ et $q_n = \mathbf{P}\,(X_2 = n)$, de sorte que le terme général de la série entière obtenue comme produit de Cauchy de $\sum p_n t^n$ et de $\sum q_n t^n$ est donné par $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}$, i.e. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}\,(X_1 = k)\,\mathbf{P}\,(X_2 = n-k)$. Par indépendance de X_1 et X_2, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}\,(X_1 = k)\,\mathbf{P}\,(X_2 = n-k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}\,(X_1 = k, X_2 = n-k)\ .$$

Par formule des probabilités totales cette dernière somme est égale à $\mathbf{P}\,(S = n)$, i.e. $\sum p_n t^n \cdot \sum q_n t^n = \sum \mathbf{P}\,(S = n)\,t^n$. Comme les deux séries entières dont on effectue le produit de Cauchy ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, on en déduit $\boxed{\forall t \in\,]-1;1\,[,\ G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t).}$

Par ailleurs, pour t dans $]-1;1\,[$, on a $t^S = t^{X_1}t^{X_2}$ et donc $G_S(t) = \mathbf{E}\left(t^{X_1}t^{X_2}\right)$. Par indépendance de X_1 et X_2, il résulte du lemme des coalitions qu'on a $G_S(t) = \mathbf{E}\left(t^{X_1}\right)\mathbf{E}\left(t^{X_2}\right)$, i.e.

$\boxed{\forall t \in\,]-1;1\,[,\ G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t).}$

Q 3. On note $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ la suite de variables aléatoires telle que X_i soit le résultat du i^{e} tirage. On peut supposer que c'est une suite de variables i.i.d. de loi donnée par $\mathbf{P}(X_i=0)=\mathbf{P}(X_i=2)=\frac{1}{4}$ et $\mathbf{P}(X_i=1)=\frac{1}{2}$, i.e. $X_i\sim\mathcal{B}\left(2,\frac{1}{2}\right)$. On a donc, pour tout i dans $[\![1;n]\!]$ et tout t dans $]-1;1[$, $G_{X_i}(t)=\frac{1}{4}(1+2t+t^2)=\left(\frac{t+1}{2}\right)^2$ et, d'après la question précédente, on a donc $\boxed{G_{S_n}(t)=\left(\frac{t+1}{2}\right)^{2n}.}$ Il en résulte, pour k dans $[\![0;2n]\!]$, $\mathbf{P}(S_n=k)=\binom{2n}{k}2^{-n}$ et donc $\boxed{S_n \text{ suit une loi binomiale de paramètres } 2n \text{ et } \frac{1}{2}.}$

PROBLÈME

Partie I - Propriétés

Q 4. Pour x dans $]-1;1[$, on a $x^n=\mathrm{o}(1)$ et donc $\boxed{1-x^n\sim 1.}$ On en déduit $a_n\dfrac{x^n}{1-x^n}\sim a_nx^n$ et donc les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1}a_n\frac{x^n}{1-x^n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1}a_nx^n$ convergent absolument simultanément. Par définition du rayon de convergence on en déduit que $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 1}a_n\frac{x^n}{1-x^n} \text{ converge absolument.}}$ La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}x^n$ converge en 1, car c'est alors une série de Riemann convergente mais pas pour $x>1$, car par croissances comparées elle est alors grossièrement divergente. Pour $x>1$, on a $\dfrac{1}{n^2}\dfrac{x^n}{1-x^n}\sim-\dfrac{1}{n^2}$ et donc L_a converge absolument pour $x>1$ et $a_n=\dfrac{1}{n^2}$. En particulier $\boxed{L_a \text{ converge en un point extérieur à }]-1;1[.}$

Q 5. Soit b dans $]0;1[$ et x dans $[-b;b]$, on a donc pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, $|x^n|\leq b^n$, $|1-x^n|\geq 1-|x|^n\geq 1-b^n$ et donc $\left|a_n\dfrac{x^n}{1-x^n}\right|\leq|a_n|\dfrac{b^n}{1-b^n}$. La convergence absolue de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}a_n\frac{x^n}{1-x^n}$ en b assure donc

$$\boxed{\text{la convergence uniforme de }\sum_{n\geq 1}a_n\frac{x^n}{1-x^n}\text{ sur }[-b;b].}$$

Q 6. La question précédente, jointe au fait que les fonctions $x\mapsto a_n\dfrac{x^n}{1-x^n}$ sont rationnelles donc continues là où elles sont définies, et donc en particulier sur $]-1;1[$, assure que f est somme d'une série de fonctions continues convergeant uniformément sur tout segment de $]-1;1[$, et donc $\boxed{f \text{ est continue sur }]-1;1[.}$ Pour n dans $\mathbf{N}$ on note $f_n(x)=a_n\dfrac{x^n}{1-x^n}$. Comme on a affaire à des fractions rationnelles définies sur $]-1;1[$, elles y sont de classe C^∞. En particulier f_n' est donnée par $f_n'(x)=na_n\dfrac{x^{n-1}}{(1-x^n)^2}$. Soit b dans $]0;1[$ et x dans $[-b;b]$, on a donc $|f_n'(x)|\leq n|a_n|\dfrac{b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$. Comme on a $n|a_n|\dfrac{b^{n-1}}{(1-b^n)^2}\sim n|a_n|b^{n-1}$ et comme le rayon de convergence de la série dérivée $\displaystyle\sum_{n\geq 1}na_nx^{n-1}$ est identique à celui de la série d'origine, i.e. égal à 1, on en déduit successivement que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}na_nb^{n-1}$ converge absolument, que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}f_n'(b)$ converge absolument puis que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}f_n'$ converge uniformément sur $[-b;b]$. Le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions de classe C^1 s'applique donc puisque la série des dérivées converge uniformément sur tout segment de $]-1;1[$ et la série initiale converge simplement. Il en résulte que $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]-1;1[}$ et que sa dérivée est donnée par $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \dfrac{x^{n-1}}{(1-x^n)^2}$. En particulier $\boxed{f'(0) = a_1.}$

Q 7. On a $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{n\} \times \mathbf{N}^*$ et $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$, puisque tout couple dans A s'écrit (n,p) avec n dans $\mathbf{N}^*$ et (n,p) dans $\{n\} \times \mathbf{N}^*$, et appartient à I_k avec $k = np$, donc k dans $\mathbf{N}^*$. De plus ces réunions sont disjointes par construction. Puisque $(u_{n,p})_{(n,p)\in A}$ est sommable et qu'on a affaire à des réunions dénombrables d'ensembles au plus dénombrables, le théorème de Fubini, dit de sommation par paquets dans le cas général, permet de conclure $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right).}$ Pour x dans $]-1;1[$ et n dans $\mathbf{N}^*$ la famille $(a_n x^{np})_{p\in\mathbf{N}^*}$ est sommable car c'est une série géométrique de raison x^n. On a de plus $\sum_{p=1}^{+\infty} |a_n x^{np}| = |a_n| \dfrac{|x|^n}{1-|x|^n}$. Comme cette famille est sommable puisque la série associée converge absolument, d'après la question Q4, il résulte du théorème de Fubini-Tonelli dit de sommation par paquets dans le cas positif, que $\boxed{\text{la famille } (a_n x^{np})_{(n,p)\in A} \text{ est sommable.}}$ Comme on a, pour n dans $\mathbf{N}^*$, $\sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np} = a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ et $\sum_{(k,p)\in I_n} a_k x^{kp} = b_n x^n$, l'égalité justifiée en début de question permet de conclure $\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n.}$

Partie II - Exemples

Q 8. Il résulte de la question Q7 que pour x dans $]-1;1[$, on a $\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n.}$

Q 9. Comme on a $1 \le a_n \le n$ pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, par comparaison, la série entière $\sum_{n\ge1} a_n x^n$ a un rayon de convergence inférieur à 1 et supérieur à 1, donc $\boxed{\text{son rayon de convergence est 1.}}$ Pour $n = 12$, les diviseurs de n sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12. On a $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(6) = 2$ et $\varphi(12) = 4$. Comme $1+1+2+2+2+4 = 12$, on a bien $\boxed{\sum_{d|12} \varphi(d) = 12.}$ Il résulte de la question Q7 que pour x dans $]-1;1[$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \dfrac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$. On reconnaît x fois la dérivée de la somme de $\sum x^n$, et il vient $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \dfrac{x^n}{1-x^n} = \dfrac{x}{(1-x)^2}.}$

Q 10. Pour x dans $]-1;1[$ on a $-\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} x^n$. On pose, pour n dans $\mathbf{N}^*$ et x dans $[0;1]$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n} x^n$. Pour x dans $[0;1]$ la série $\sum_{n\ge1} f_n(x)$ est alternée et la valeur absolue de son terme général tend en décroissant vers 0. Il résulte du critère de Leibniz, dit critère spécial pour les séries alternées, que $\sum_{n\ge1} f_n$ converge simplement et que pour tout N dans $\mathbf{N}^*$ et tout x dans $[0;1]$, on a $\left|\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x)\right| \leq \dfrac{x^N}{N} \leq \dfrac{1}{N}$. Il en résulte que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0;1]$. Comme $\displaystyle\lim_{1^-} f_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, il résulte du théorème de la double limite que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge et que sa somme est égale à $\displaystyle\lim_{1^-}(-\ln(1+x))$, i.e. $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = -\ln(2).}$

Remarque : c'est une conséquence directe du théorème d'Abel radial.

Q 11. Pour n dans $\mathbf{N}^*$ et x dans $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ on pose $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{n-1}}{1-x^n}$. On a donc $\displaystyle\lim_{0} f_n = -\delta_{n,1}$, où $\delta_{n,k}$ est le symbôle de Kronecker. Or, pour x dans $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, on a $|f_n(x)| \leq \dfrac{2^{1-n}}{1-2^{-n}} \leq 2^{2-n}$ et donc, par comparaison à une série géométrique convergente, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$. Il résulte du théorème de la double limite que $\displaystyle\lim_{0}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = -1$. Comme la somme est égale à -1 si $x=0$ et à $\dfrac{f(x)}{x}$ si $0 < |x| \leq \frac{1}{2}$, on en déduit $\boxed{\displaystyle\lim_{0} \dfrac{f(x)}{x} = -1.}$ Par conséquent, au voisinage de 0, on a $\boxed{f(x) \sim -x.}$ Par caractérisation de Weierstrass de la dérivée, i.e. par caractérisation par le développement limité à l'ordre 1, on a donc $f(0) = 0$ et $f'(0) = -1$. Comme $a_1 = -1$, $\boxed{\text{on retrouve } f'(0) = a_1.}$

Q 12. La remarque de l'énoncé résulte de l'identité remarquable de Bernoulli. On remarque également que pour x dans $]0;1[$, $(1-x)f(x)$ est somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = (-1)^n x^n \dfrac{1-x}{1-x^n}$. Il résulte de la remarque de l'énoncé qu'on a $\displaystyle\lim_{1^-} f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et que $|f_n(x)|$ tend en décroissant vers 0, puisque son numérateur x^n décroît et tend vers 0 tandis que son dénominateur $1 + x + \cdots + x^{n-1}$ croît et est minoré par 1. On peut donc appliquer le critère de Leibniz, dit critère spécial pour les séries alternées et obtenir, pour N dans $\mathbf{N}^*$ et x dans $]0;1[$,

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x)\right| \leq \frac{x^N}{1+x+\cdots+x^{N-1}} \leq \frac{x^N}{Nx^{N-1}} \leq \frac{1}{N}$$

et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $]0;1[$. Il résulte du théorème de la double limite qu'on $\displaystyle\lim_{1^-}(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$, i.e. $\boxed{f(x) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{\ln(2)}{x-1}.}$