CCINP 2020 - MP - Première épreuve

Objectifs L'objectif de la partie I est de montrer l'existence d'un développement ternaire propre pour certains nombres réels.
La partie II propose l'étude d'une série de fonctions où les coefficients du développement ternaire sont remplacés par une fonction continue.
La partie III étudie des développements ternaires aléatoires.
La partie IV définit et présente quelques propriétés de la fonction de Cantor-Lebesgue.
Notations On note T l'ensemble des suites réelles $(t_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ à valeurs dans $\{0;1;2\}$:

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad t_n \in \{0;1;2\} \ .$$

On désigne par ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles bornées et on pose pour $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $\|u\| = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}^*} |u_n|$.
On note $[\,y\,]$ la partie entière d'un réel y.

PARTIE I - Développement ternaire

Étude de l'application σ

Q1. Démontrer que ℓ^∞ est un espace vectoriel réel et que l'application $u \mapsto \|u\|$ est une norme sur ℓ^∞.

Q2. Pour $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ dans ℓ^∞ démontrer que la série de terme général $\frac{u_n}{3^n}$ est convergente.

On note

$$\sigma(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n} \ .$$

Q3. Démontrer que l'application σ est une forme linéaire continue sur ℓ^∞.

Q4. Démontrer que si t appartient à T, alors le réel $\sigma(t)$ est dans l'intervalle $[0;1\,]$.

Q5. On note $\tau = (\tau_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $\tau' = (\tau'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ les éléments de T définis par :

$$\tau_1 = 1 \text{ et } \forall n \geq 2\,,\ \tau_n = 0 \qquad \tau'_1 = 0 \text{ et } \forall n \geq 2\,,\ \tau'_n = 2\ .$$

Calculer $\sigma(\tau)$ et $\sigma(\tau')$. L'application σ est-elle injective sur T ?

Développement ternaire propre

On fixe x dans $[0;1\,[$. On définit une suite $(t_n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$, notée $t(x)$, par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*\,, \quad t_n(x) = [\,3^n x\,] - 3\big[\,3^{n-1}x\,\big]\ .$$

Q6. Démontrer $t(x) \in T$.

Q7. On définit deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*\,, \quad x_n = \frac{[\,3^n x\,]}{3^n} \text{ et } y_n = x_n + \frac{1}{3^n}\ .$$

Démontrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes de limite x. En déduire

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n(x)}{3^n}\ .$$

Que peut-on en conclure concernant l'application de T dans $[0;1\,]$, $t \mapsto \sigma(t)$?

La suite $t(x)$ est appelée *développement ternaire propre* de x.

Q8. Écrire en langage `Python` une fonction `flotVersTern(n,x)` d'arguments un entier naturel n et un flottant x qui renvoie sous forme de liste les n premiers chiffres $t_1(x), \ldots, t_n(x)$ définis dans la question précédente du développement ternaire de x.
Par exemple `flotVersTern(4,0.5)` renvoie `[1,1,1,1]`.

Q9. Si ℓ=[ℓ_1,...,ℓ_n] est une suite finie d'entiers de $\{0;1;2\}$, on la complète avec des 0 pour en faire un élément de T encore noté ℓ.

Écrire en langage `Python` une fonction `TernVersflot(`ℓ`)` d'argument une liste d'entiers ℓ. Cette fonction renvoie en sortie le flottant $\sigma(\ell)$.

Par exemple `TernVersflot([1,1,1,1])` renvoie `0.493827`...

Q10. Si ℓ=[ℓ_1,...,ℓ_n] est une suite finie d'entiers de $\{0;1;2\}$, on lui ajoute un élément égal à -1 si la somme $\ell_1 + \cdots + \ell_n$ est paire et un élément égal à -2 sinon. Ce dernier élément permet alors d'essayer de détecter d'éventuelles erreurs de transmission.

Écrire en langage `Python` une fonction `ajout(`ℓ`)` qui ajoute à la liste ℓ un élément comme expliqué précédemment et qui renvoie la nouvelle liste.

Écrire en langage `Python` une fonction `verif(`ℓ`)` qui renvoie `True` si la valeur du dernier élément de ℓ est correcte et `False` sinon.

Par exemple `ajout([1,0,2,1,0])` renvoie `[1,0,2,1,0,-1]` et `verif([1,0,2,1,0,-2])` renvoie `False`.

PARTIE II - Étude d'une fonction définie par une série

Dans cette partie on définit une fonction φ à l'aide d'un développement en série analogue au développement ternaire propre d'un réel, mais où la suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est remplacée par une fonction numérique à valeurs dans l'intervalle $[0;2]$.

Pour tout réel x on pose

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\sin(nx)}{3^n} .$$

Étude de l'application φ

Q11. Démontrer que φ est définie et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

Q12. Pour tout réel x, justifier l'écriture :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right)$$

et en déduire une expression simple de $\varphi(x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

Q13. Pour x dans $\mathbf{R}$, en déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n}$ en fonction de $\cos(x)$.

Q14. À l'aide $\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ démontrer

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^{n+1}}((-1)^{n-1}+1)$$

puis en calculant la somme de la série du second membre, en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\,\mathrm{d}x .$$

Q15. Retrouver cette valeur par un calcul direct.

PARTIE III - Développements ternaires aléatoires

Dans cette partie $(T_{n,N})_{n\geq 1, N\geq 2}$ est une famille de variables aléatoires discrètes réelles, mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et vérifiant

$$\forall n \geq 1\,,\ \forall N \geq 2\,,\quad T_{n,N}(\Omega) = \{0;1;2\}$$

avec

$$\mathbf{P}\left(T_{n,N}=0\right) = \mathbf{P}\left(T_{n,N}=1\right) = \frac{1}{N} \text{ et } \mathbf{P}\left(T_{n,N}=2\right) = 1 - \frac{2}{N}\,.$$

Soit $N \geq 2$. On pose

$$X_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{T_{n,N}}{3^n}\,.$$

On admet que X_N est une variable aléatoire discrète réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Q16. Démontrer que X_N admet une espérance et une variance. Donner leurs valeurs en fonction de N.

Q17. Justifier, pour $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}\left(|X_N - \mathbf{E}\left(X_N\right)| \geq \varepsilon\right) = 0\,.$$

Q18. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer

$$\mathbf{P}\left(|X_N - 1| \geq \varepsilon\right) \leq \mathbf{P}\left(|X_N - \mathbf{E}\left(X_N\right)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbf{P}\left(|\mathbf{E}\left(X_N\right) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)\,.$$

En déduire que, pour $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}\left(|X_N - 1| \geq \varepsilon\right) = 0\,.$$

PARTIE IV - Fonction de Cantor-Lebesgue

Dans cette partie, on va définir et étudier la fonction de Cantor-Lebesgue.

Étude d'une suite de fonctions

On note f_0 la fonction définie sur $[0;1]$ par $f_0(x) = x$. Pour tout entier n dans $\mathbf{N}$, on pose

$$\forall x \in [0;1]\,,\quad f_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(3x)}{2} & \text{si } x \in \left[0;\frac{1}{3}\right] \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in \left]\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right[\\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{f_n(3x-2)}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{2}{3};1\right]\,. \end{cases}$$

Q19. Représenter l'allure graphique des fonctions f_0, f_1 et f_2 sur trois schémas différents (pour f_2 on envisagera sept sous-intervalles de $[0;1]$).

Pour tout n dans $\mathbf{N}$, démontrer que f_n est à valeurs dans $[0;1]$.

Q20. Écrire en langage `Python` une fonction récursive `cantor(n,x)` qui renvoie la valeur de $f_n(x)$.

Q21. Pour tout entier n dans $\mathbf{N}$, démontrer

$$\forall x \in [0;1]\,,\qquad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}\,.$$

Q22. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$.

La limite de la suite de fonctions (f_n) est notée f. On l'appelle la *fonction de Cantor-Lebesgue.*

Q23. Démontrer que la fonction f est à valeurs dans $[0;1]$ et qu'elle croissante et continue sur $[0;1]$. Démontrer enfin qu'elle est surjective de $[0;1]$ vers lui-même.

La fonction f est aussi nommé « escalier du diable ». Les développements ternaires étudiés en début de problème permettent d'obtenir une expression analytique de $f(x)$.

CCINP 2020 - MP - Première épreuve

PARTIE I - Développement ternaire

Q1. On démontre que ℓ^∞ est un sous-espace vectoriel de celui des suites réelles. Il contient la suite nulle, qui est bien bornée, et si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles bornées par U et V respectivement, en valeur absolue, et λ et μ deux réels, alors $(\lambda u_n + \mu v_n)$ est bornée en valeur absolue par $|\lambda|\,U + |\mu|\,V$ par inégalité triangulaire. Il en résulte que $\boxed{\ell^\infty \text{ est un espace vectoriel.}}$

Élements de notation : Sous-espace : 1 ; non-vide : 1 ; stabilités : 1 chacune.

L'application $u \mapsto \|u\|$ est bien définie sur ℓ^∞ par définition des suites bornées. C'est une fonction à valeur positives et on a, pour u et v dans ℓ^∞, notées $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$, et λ dans $\mathbf{R}$:

— $\|u\| = 0 \Longrightarrow \forall n \in \mathbf{N}^* \ |u_n| = 0$, i.e. $u = 0$.

— $\forall n \in \mathbf{N}^* \ |\lambda u_n| = |\lambda|\,|u_n|$ et donc, par passage au supremum et puisque $|\lambda|$ est positif, $\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|$.

— $\forall n \in \mathbf{N}^* \ |u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq \|u\| + \|v\|$ et donc, par passage au supremum, $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

On en conclut que $\boxed{u \mapsto \|u\| \text{ définit une norme sur } \ell^\infty.}$

Élements de notation : Bien définie :1 ; positivité et séparation : 1 ; homogénéité :1 ; IT :1.

Q2. La série $\sum \left|\frac{u_n}{3^n}\right|$ est à termes positifs et son terme général est majoré par celui d'une série géométrique de raison $\frac{1}{3}$, à savoir $\sum \frac{\|u\|}{3^n}$, donc positive et strictement inférieure à 1. Par comparaison entre séries à termes positifs $\sum \frac{u_n}{3^n}$ converge absolument et donc, puisque $\mathbf{R}$ est de dimension finie, $\boxed{\sum \frac{u_n}{3^n} \text{ converge.}}$

Élements de notation : Convergence absolue $\Longrightarrow$ convergence : 2 ; comparaison : 2.

Q3. La multiplication entre suites étant bilinéaire, l'application $(u_n) \mapsto (u_n/3^n)$ est linéaire. La sommation des séries convergentes étant linéaire, il en résulte par composition que σ est linéaire. Enfin par inégalité triangulaire et croissance de la somme on a

$$|\sigma(u)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|u_n|}{3^n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\|u\|}{3^n} = \frac{1}{2}\,\|u\| \ .$$

Il en résulte que σ est continu, de norme inférieure à $\dfrac{1}{2}$: $\boxed{\sigma \in \mathscr{L}_c(\ell^\infty, \mathbf{R}).}$

Élements de notation : Linéarité : 2 ; continuité : 2.

Q4. Soit $t \in T$. On a remarqué $\|\sigma\| \leq \frac{1}{2}$ lors des arguments de la question précédente. Comme $\|t\| \leq 2$, il vient $\|\sigma(t)\| \leq 1$. Comme t est à valeurs positives, la série $\sum t_n/3^n$ est à termes positifs et sa somme l'est également. On en déduit $\boxed{\sigma(t) \in [0;1].}$

Élements de notation : Positif : 2 ; inférieur à 1 : 2.

Q5. Un calcul direct donne $\boxed{\sigma(\tau) = \sigma(\tau') = \tfrac{1}{3} \text{ et donc } \sigma_{|T} \text{ n'est pas injective.}}$

Élements de notation : 0/4

Q6. Soit n dans $\mathbf{N}^*$. On a, par définition de la partie entière $\left[3^{n-1}x\right] \leq 3^{n-1}x < \left[3^{n-1}x\right] + 1$ et donc, puisque 3 est positif, $3\left[3^{n-1}x\right] \leq 3^n x < 3\left[3^{n-1}x\right] + 3$. Puisque $[3^n x]$ est le plus grand entier inférieur à $3^n x$, il vient $3\left[3^{n-1}x\right] \leq [3^n x] < 3\left[3^{n-1}x\right] + 3$ et donc $0 \leq [3^n x] - 3\left[3^{n-1}x\right] < 3$. Comme on a affaire à un entier il vient $0 \leq [3^n x] - 3\left[3^{n-1}x\right] \leq 2$ et donc $\boxed{t(x) \in T.}$

Élements de notation : 0/4

Q7. Pour n dans $\mathbf{N}^*$ on a $x_{n+1} - x_n = \dfrac{t_{n+1}(x)}{3^{n+1}} \geq 0$ et $y_{n+1} - y_n = \dfrac{t_{n+1}(x) - 2}{3^{n+1}} \leq 0$, d'après la question précédente, i.e. (x_n) est croissante et (y_n) est décroissante. Comme $y_n - x_n = 3^{-n} = \mathrm{o}(1)$ et $x_n = \dfrac{3^n x + \mathrm{O}(1)}{3^n} = x + \mathrm{o}(1)$, on en déduit que $\boxed{(x_n) \text{ et } (y_n) \text{ sont adjacentes de limite } x.}$

Élements de notation : (x_n) croissante : 1 ; (y_n) décroissante : 1 ; adjacence : 1 ; limite : 1.

On en déduit en particulier que $\boxed{\sigma_{|T}^{[0;1]} \text{ est surjective.}}$

Élements de notation : 0/4

Q8.

```
#!/usr/bin/env python3

def flotVersTern(n,x):
    l=[] # initialisation de la liste renvoyée à vide
    y=x  # y représente 3^k x, ici avec k=0
    # On itère z=[3^k x], y=3^{k+1}x et on ajoute [y]-3z à la liste
    # ce qui vaut t_{k+1}(x), pour k=0...n-1
    for k in range(n):
        z=int(y)
        y *=3
        l.append(int(y)-3*z)
    return(l) #et on renvoie [t_1(x),...,t_n(x)]
```

Élements de notation : pas d'indentation : -1 ; explications : 2 ; code correct : 2.

Q9.

```
#!/usr/bin/env python3

def TernVersflot(l):
    #on crée les itérables i et x formés des indices et valeurs de l
    #puis on somme les termes x de la liste divisés par 3^{i+1}
    return sum(x/3**(i+1) for i,x in enumerate(l))
```

Élements de notation : pas d'indentation : -1 ; explications : 2 ; code correct : 2.

Q10.

```
#!/usr/bin/env python3

def ajout(l):
    #le nombre de contrôle est en fait égal à -1 moins le reste de la division euclidienne par 2
    #de la somme de tous les termes de x
    #on ajoute ce nombre à la liste avec la méthode append
    l.append(-1-sum(l)%2)
    return(l)
```

```python
#!/usr/bin/env python3

def verif(l):
    #Le nombre de contrôle est choisi de sorte que la somme de tous les termes soit impaire
    #On teste donc si le reste de cette somme dans la division euclidienne est égal à 1
    return sum(l)%2==1
```

Élements de notation : pas d'indentation : -1 ; explications : 2 ; codes corrects : 2.

PARTIE II - Étude d'une fonction définie par une série

Q11. On note, pour n dans $\mathbf{N}^*$ et x dans $\mathbf{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1+\sin(nx)}{3^n}$. Par composition de fonctions usuelles, f_n est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, dont la dérivée est donnée par $f_n'(x) = \dfrac{n}{3^n}\cos(nx)$. On a donc, pour tout x réel, $|f_n'(x)| \leq \dfrac{n}{3^n}$. Or, par croissance comparée, on a $\dfrac{n}{3^n} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ et la série $\sum \dfrac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente, car $0 \leq \frac{1}{2} < 1$; il en résulte que $\sum f_n'$ est normalement convergente sur $\mathbf{R}$. La série $\sum f_n$ est également normalement, donc simplement, convergente sur $\mathbf{R}$ puisque, pour x réel, $|f_n(x)| \leq \dfrac{2}{3^n} \leq \dfrac{1}{2^n}$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions et ainsi $\boxed{\varphi \text{ est définie et de classe } C^1 \text{ sur } \mathbf{R}.}$

Élements de notation : Sans convergence uniforme pour $\sum f_n'$: 0 ; régularité f_n : 1 ; CS f_n : 1.

Q12. Soit x réel. La série $\sum \dfrac{e^{inx}}{3^n}$ est absolument convergente puisque la série géométrique $\sum \dfrac{1}{3^n}$ est convergente, de somme $\dfrac{1}{2}$. La partie imaginaire de sa somme est donc, par définition, la somme des parties imaginaires de ses termes, i.e. $\mathrm{Im}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n}$. La somme de deux séries convergentes l'étant et puisqu'on a $\sum \dfrac{1}{3^n} + \sum \dfrac{\sin(nx)}{3^n} = \sum f_n$, il vient $\boxed{\varphi(x) = \dfrac{1}{2} + \mathrm{Im}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right)}.$

Élements de notation : Convergence absolue : 3 ; somme de séries convergentes : 1.

Comme la série $\sum \dfrac{e^{inx}}{3^n}$ est géométrique, on obtient sa somme directement $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n} = \frac{e^{ix}}{3-e^{ix}}$ et cette dernière expression se simplifie en $\dfrac{3e^{ix}-1}{(3-\cos(x))^2+\sin^2(x)}$. On en déduit $\boxed{\varphi(x) = \dfrac{1}{2} + 3\dfrac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}}.$

Élements de notation : 0/4

Q13. Soit x réel. L'expression étudiée est celle de $\varphi'(x)$ d'après le théorème de dérivation terme à terme des séries. Comme on a

$$\varphi'(x) = 3\frac{10\cos(x) - 6\cos^2(x) - 6\sin^2(x)}{(10-6\cos(x))^2} = \frac{30\cos(x)-18}{(6\cos(x)-10)^2} = \frac{3}{2}\,\frac{5\cos(x)-3}{(5-3\cos(x))^2}\,,$$

il vient $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n} = \frac{3}{2}\,\frac{5\cos(x)-3}{(3\cos(x)-5)^2}}.$

Élements de notation : φ' : 1 ; calcul 0/3.

Q14. On a

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^\pi (\varphi(x)-\frac{1}{2})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^\pi \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{3^n}\,\mathrm{d}x$$

Puisque la série définissant φ et aussi celle sous l'intégrale convergent normalement sur $\mathbf{R}$, en particulier elles convergent uniformément sur $[0;\pi]$. Le théorème d'intégration terme à terme permet d'obtenir $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{3^n}\,\mathrm{d}x$ puis $\boxed{\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n3^{n+1}}((-1)^{n-1}+1).}$

Élements de notation : Convergence uniforme : 3 ; calcul 0/1.

Pour t dans $[-1;1[$ on a $-\ln(1-t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{t^n}{n}$ et donc en appliquant ce résultat pour $t=-\frac{1}{3}$ et $t=\frac{1}{3}$, on obtient $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{3}\right)\right)$, ce qui permet de conclure $\boxed{\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln(2).}$

Élements de notation : ln : 2 ; résultat : 0/2.

Q15. Un changement de variable $t=-\cos(x)$ permet d'écrire

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{10+6t} = \frac{1}{6}\left[\ln(10+6t)\right]_{-1}^1 .$$

On obtient $\dfrac{1}{6}\ln(4)$ soit $\dfrac{1}{3}\ln(2)$. On retrouve bien $\boxed{\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln(2).}$

Élements de notation : 0/4

PARTIE III - Développements ternaires aléatoires

Q16. Pour tout n dans $\mathbf{N}$, $T_{n,N}(\Omega)$ est fini et il en va donc de même pour $X_N(\Omega)$ en tant que somme finie. Il en résulte que $T_{n,N}$ et X_N admettent des moments de tous ordres. On a $\mathbf{E}(T_{n,N})=2-\frac{3}{N}$ et $\mathrm{V}(T_{n,N})=4-\frac{7}{N}-\mathbf{E}(T_{n,N})^2=\frac{5N-9}{N}^2$ et donc $\mathbf{E}\left(\frac{T_{n,N}}{3^n}\right)=\frac{2N-3}{3^nN}$ et $\mathrm{V}\left(\frac{T_{n,N}}{3^n}\right)=\frac{5N-9}{9^nN^2}$. Par linéarité de l'espérance et additivité de la variance dans le cas de variables mutuellement indépendantes, on en déduit que $\boxed{X_N \text{ admet une espérance et une variance, et } \mathbf{E}(X_N)=\frac{(2N-3)(1-3^{-N})}{2N} \text{ et } \mathrm{V}(X_N)=\frac{(5N-9)(1-9^{-N})}{8N^2}.}$

Élements de notation : Existences : 2 ; espérance : 0/1 ; variance : 0/1.

Q17. Puisque X_N admet un moment d'ordre 2 on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour $\varepsilon>0$ on a $0\leq \mathbf{P}(|X_N-\mathbf{E}(X_N)|\geq\varepsilon)\leq\dfrac{\mathrm{V}(X_N)}{\varepsilon^2}$ et comme le membre de droite est équivalent, à ε fixé, à $\frac{5}{8N}$, on en déduit par encadrement des limites $\boxed{\lim_{N\to+\infty}\mathbf{P}(|X_N-\mathbf{E}(X_N)|\geq\varepsilon)=0.}$

Élements de notation : Hypothèses sur X_N et ε : 2 ; inégalité : 1 ; encadrement : 1.

Q18. Par inégalité triangulaire on a $|X_N-1|\leq|X_N-\mathbf{E}(X_N)|+|\mathbf{E}(X_N)-1|$ et donc si le membre de gauche est supérieur à ε, l'un au moins des deux termes du membres de droite est supérieur à $\varepsilon/2$, i.e.

$(|X_N - 1| \geq \varepsilon) \subset \left(\left|X_N - \mathbf{E}(X_N) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right|\right) \cup \left(|\mathbf{E}(X_N) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Par sous-additivité de la probabilité on en conclut $\boxed{\mathbf{P}(|X_N - 1| \geq \varepsilon) \leq \mathbf{P}\left(|X_N - \mathbf{E}(X_N)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbf{P}\left(|\mathbf{E}(X_N) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right).}$

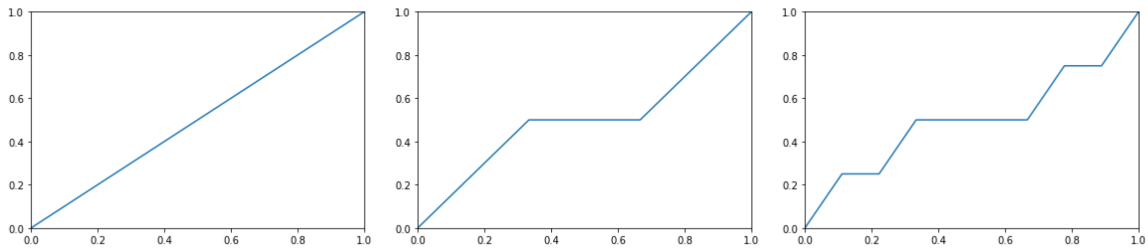
Élements de notation : Inégalité triangulaire : 1 ; inclusion : 1 ; sous-additivité : 2.

Comme $\mathbf{E}(X_N) = \frac{(2N-3)(1-3^{-N})}{2N} \sim \frac{2N}{2N} = 1$, on dispose d'un rang à partir duquel $|\mathbf{E}(X_N) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ et donc $\mathbf{P}\left(|\mathbf{E}(X_N) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$, puisqu'il s'agit d'une inégalité entre variables déterministes. La question précédente permet donc de conclure $\boxed{\lim_{N \to +\infty} \mathbf{P}(|X_N - 1| \geq \varepsilon) = 0.}$

Élements de notation : Variables déterministes : 3 ; conclusion : 1.

PARTIE IV - Fonction de Cantor-Lebesgue

Q19.



Élements de notation : Graphes de f_0 : 1 ; f_1 : 1 ; f_2 : 2.

On démontre par récurrence sur n le prédicat $(\mathbf{H}_n)$: la fonction f_n est à valeurs dans $[0;1]$. Puisque f_0 est l'identité, $(\mathbf{H}_0)$ est vrai. Soit maintenant n dans $\mathbf{N}$ tel que $(\mathbf{H}_n)$ soit vrai. Soit x dans $[0;1]$. On a alors $0 \leq f_{n+1}(x) \leq \frac{1}{2}$ si $x \leq \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2} \leq f_{n+1}(x) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ si $x \geq \frac{2}{3}$ et $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}$ sinon. Le prédicat est donc héréditaire et on conclut que $\boxed{\text{pour tout entier } n,\ f_n \text{ est à valeurs dans } [0;1].}$

Élements de notation : 0/4

Q20.

```
#!/usr/bin/env python3

def cantor(n,x):  #n entier naturel, x est un flottant dans [0;1]
    if n==0: return x  # f_0 est l'identité
    if x<= 1/3: return cantor(n-1,3*x)/2  # valeur de f_n(x) si x ≤ 1/3
    if x>= 2/3: return (1+cantor(n-1,3*x-2))/2  # valeur de f_n(x) si x ≥ 2/3
    return 1/2  # valeur de f_n(x) si 1/3 < x < 2/3
```

Élements de notation : pas d'indentation : -1 ; explications : 2 ; code correct : 2.

Q21. On démontre par récurrence sur n le prédicat $(\mathbf{H}_n)$: $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \dfrac{1}{3 \times 2^{n+1}}$, où $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme de la convergence uniforme sur $[0;1]$.

Pour x dans $[0;1]$, selon qu'on a $x \leq \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ ou $\frac{2}{3} \leq x$, on a respectivement $f_1(x) - f_0(x) = \frac{1}{2}x \in \left[0;\frac{1}{6}\right]$, $f_1(x) - f_0(x) = \frac{1}{2} - x \in \left[-\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right]$ ou $f_1(x) - f_0(x) = \frac{1}{2}(x-1) \in \left[-\frac{1}{6};0\right]$ et donc, dans tous les cas, $|f_1(x) - f_0(x)| \leq \frac{1}{6}$. Il en résulte que $(\mathbf{H}_0)$ est vrai.

Soit maintenant n dans $\mathbf{N}^*$ tel que $(\mathbf{H}_{n-1})$ soit vrai. Pour x dans $[0;1]$, selon qu'on a $x \leq \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{2}{3}$ ou $\dfrac{2}{3} \leq x$, on a respectivement $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{1}{2}\left(f_n\left(\dfrac{3x}{2}\right) - f_{n-1}\left(\dfrac{3x}{2}\right)\right)$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0$ ou $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{1}{2}\left(f_n\left(\dfrac{3x-2}{2}\right) - f_{n-1}\left(\dfrac{3x-2}{2}\right)\right)$ et donc $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \dfrac{1}{2}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$.

Il en résulte que $(\mathbf{H}_n)$ est vrai et on en conclut $\boxed{\forall x \in [0;1],\ |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \dfrac{1}{3 \times 2^{n+1}}.}$

Élements de notation : $n = 0$: 2 ; $n \geq 1$: 2.

Q22. La série $\sum \dfrac{1}{3 \times 2^{n+1}}$ est une série géométrique convergente puisque $0 \leq \frac{1}{2} < 1$ et donc il résulte de la question précédente que la série de fonction $\sum(f_{n+1} - f_n)$ converge normalement sur $[0;1]$ par comparaison entre séries à termes positifs. En particulier elle converge uniformément sur $[0;1]$. On note g sa somme. Puisque g est limite uniforme sur $[0;1]$ des sommes partielles, télescopiques, de la série $\sum(f_{n+1} - f_n)$, i.e. de $(f_n - f_0)$, $g + f_0$ est limite uniforme sur $[0;1]$ de (f_n) et donc $\boxed{(f_n) \text{ converge uniformément sur } [0;1].}$

Élements de notation : CN : 1 ; CN$\Longrightarrow$CU : 1 ; CU de (f_n) : 2.

Q23. On démontre par récurrence sur n le prédicat $(\mathbf{H}_n)$: la fonction f_n est croissante et continue, et 0 et 1 en sont points fixes.

Puisque f_0 est l'identité, $(\mathbf{H}_0)$ est vrai. Soit maintenant n dans $\mathbf{N}$ tel que $(\mathbf{H}_n)$ soit vrai. On a alors $f_{n+1}(0) = \frac{1}{2}f_n(0) = 0$ et $f_{n+1}(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_n(1) = 1$. Par composition de fonctions continues et croissantes au sens large, f_{n+1} est continue et croissante sur chacun des intervalles $\left[0;\frac{1}{3}\right[$, $\left]\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right[$ et $\left]\frac{2}{3};1\right]$. Pour conclure il suffit de démontrer que f_{n+1} est continue en $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, puisque la croissance sera alors acquise sur chacun des intervalles fermés $\left[0;\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$ et $\left[\frac{2}{3};1\right]$, par passage à la limite, et donc sur la réunion puisque ces intervalles ont des points en commun. Par définition de f_{n+1}, on a $\lim\limits_{\frac{1}{3}^-} f_{n+1} = f_{n+1}(\dfrac{1}{3}) = \dfrac{1}{2}f_n(1) = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{\frac{2}{3}^+} f_{n+1} = f_{n+1}(\dfrac{2}{3}) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}f_n(0) = \dfrac{1}{2}$. Comme f_{n+1} est constante égale à $\dfrac{1}{2}$ sur $\left]\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right[$, la continuité en résulte. Ceci achève de démontrer l'hérédité du prédicat de récurrence. On en conclut, en utilisant le résultat de la question 19, que $\boxed{\text{pour tout entier } n, \text{ la fonction } f_n \text{ est à valeurs dans } [0;1], \text{ croissante et continue.}}$

Élements de notation : Croissance : 2 ; continue : 2.

Par passage à la limite on a $f(0) = \lim f_n(0) = 0$ et $f(1) = \lim f_n(1) = 1$. Par croissance et continuité de f, on en déduit que $\boxed{f \text{ est surjective de } [0;1] \text{ dans lui-même.}}$

Élements de notation : 0/4