Exercice - CCINP 2020 - MP - Deuxième composition

Dans cet exercice, il est inutile de reproduire tous les calculs sur la copie. On considère la matrice A donné par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. On note $P = \frac{1}{3}(A - I_3)$. Démontrer que P est une matrice de projection.
2. Démontrer $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Ker}(I_3 - P)$ et en déduire que la matrice P est diagonalisable.
3. En déduire que la matrice A est diagonalisable puis déterminer une matrice D diagonale réelle et une matrice Q dans $\mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ telles que $A = QDQ^{-1}$.
4. Déterminer une matrice B de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$, que l'on explicitera, vérifiant $B^2 = A$.
5. Déterminer, pour tout entier naturel non nul n, les neuf coefficients de la matrice A^n en utilisant la matrice de passage Q.

Exercice - CCINP 2020 - MP - Deuxième composition

1. On a $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ et $P^2 = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}3 & 3 & \\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix} = P$.

   $\boxed{\text{Il en résulte que } P \text{ est une matrice de pojection.}}$

2. On a $(I_3 - P)P = 0$ donc $\mathrm{Im}(P) \subset \mathrm{Ker}(I_3 - P)$. Comme P n'est pas nul et a toutes ses colonnes égal, on a $\mathrm{rg}(P) = 1$ et donc, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(P)) = 2$. Comme $\mathrm{Ker}(I_3 - P)$ est en somme directe avec $\mathrm{Ker}(P)$, il est de dimension au plus 1 et on en conclut, par inclusion et dimension $\boxed{\mathrm{Ker}(I_3 - P) = \mathrm{Im}(P).}$ Puisque les espaces propres $\mathrm{Ker}(P)$ et $\mathrm{Ker}(I_3 - P)$ sont en somme directe et que la somme de leurs dimensions est 3, d'après ce qui précède et le théorème du rang, on a $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}(P) \oplus \mathrm{Ker}(I_3 - P)$ et donc $\boxed{P \text{ est diagonalisable.}}$

3. Puisque $\mathrm{Im}(P)$ est engendré par $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ et comme $\mathrm{Ker}(P)$ admet $x + y + z = 0$ comme équation, on en déduit que $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ forment une base propre pour P et donc aussi pour A, puisqu'on a $A = 3P + I_3$. Ainsi pour $\boxed{Q = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}}$ $Q^{-1}PQ$ est la matrice diagonale de diagonale $(1, 0, 0)$ et donc $A = QDQ^{-1}$ avec $\boxed{D = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$.

4. En prenant Δ la matrice diagonale de diagonale $(2, 1, 1)$ on a $\Delta^2 = D$ et donc avec $B = Q\Delta Q^{-1}$, on a $B^2 = A$. Ainsi on peut prendre $\boxed{B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}}$.

5. Pour n entier on a $A = QD^nQ^{-1}$ et donc $\boxed{A^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1\\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1\\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2\end{pmatrix}}$.