CCINP 2021 - MP - Deuxième composition

On désigne par $\mathbf{K}$ le corps $\mathbf{R}$ ou le corps $\mathbf{C}$.
On note, pour n entier naturel, avec $n \geq 2$, $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ la $\mathbf{K}$-algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbf{K}$ et $D_n(\mathbf{R})$ la sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ formée des matrices diagonales.
On admet le théorème suivant, que l'on pourra utiliser librement :

> Si A est une matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbf{K}$, alors il existe un unique couple (D, N) de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ vérifiant les quatre propriétésé :
>
> (1) $A = D + N$;
>
> (2) D est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ (pas nécessairement diagonale) ;
>
> (3) N est nilpotente ;
>
> (4) $DN = ND$.
>
> De plus D et N sont des polynômes en A, et $\chi_A = \chi_D$.
> Le couple (D, N) s'appelle la décomposition de Jordan-Chevalley de A.

PARTIE I - Quelques exemples

Q1. Donner le couple de la décomposition de Jordan-Chevalley d'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque la matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est nilpotente.

Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Jordan-Chevalley.

Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est-il la décomposition de Jordan-Chevalley de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Q2. Donner un exemple d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ n'admettant pas de décomposition de Jordan-Chevalley dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

Q3. Soit la matrice A donnée par $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. Calculer son polynôme caractéristique χ_A, puis donner le couple (D, N) de la décomposition de Jordan- Chevalley de A (on utilisera le fait qu'on a $\chi_A = \chi_D$).

Q4. Application

Pour A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, l'exponentielle de la matrice A est donnée par $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

Déduire de la question précédente l'exponentielle de la matrice A définie à la question précédente.

On pourra utiliser sans démonstration que si M et N sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent, alors $\exp(M + N) = \exp(M)\exp(N)$.

Q5. Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ tel que $A^2(A - I_n) = 0$.

On pose $B = A^2$. Justifier qu'on a $B(B - I_n) = 0$.

Démontrer que le couple (D, N) de la décomposition de Jordan-Chevalley de la matrice A est donné par $D = A^2$ et $N = A - A^2$.

PARTIE II - Un exemple par deux méthodes

Soit la matrice A donnée par $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. On note Id l'application identité de $\mathbf{R}^3$.

Q6. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$?
Démontrer qu'on a la somme directe $\mathbf{R}^3 = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}((u - 2\mathrm{Id})^2)$.

Q7. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbf{R}^3$ telle que $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{V}ect\,(e_1)$, $\operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{V}ect\,(e_2)$ et $\operatorname{Ker}((u - 2\mathrm{Id})^2) = \mathrm{V}ect\,(e_2, e_3)$.
Écrire la matrice B de u relativement à la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbf{R}^3$.

Q8. Déterminer le couple de la décomposition de Jordan-Chevalley de la matrice B et en déduire le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Jordan-Chevalley de la matrice A.

Q9. Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{(X-1)(X-2)^2}$ et en déduire deux polynômes U et V de $\mathbf{R}[X]$ tels que $(X-1)U + (X-2)^2 V = 1$, $\deg(U) < 2$ et $\deg(V) < 1$.

Q10. On pose les endomorphismes $p = V(u) \circ (u - 2\mathrm{Id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \mathrm{Id})$.
Calculer $p(x) + q(x)$ pour tout vecteur x de $\mathbf{R}^3$.
Démontrer que p est le projecteur sur $\operatorname{Ker}(u-\mathrm{Id})$ parallèlement à $\operatorname{Ker}((u-2\mathrm{Id})^2)$ et q est le projecteur sur $\operatorname{Ker}((u - 2\mathrm{Id})^2)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id})$.

Q11. On pose $d = p + 2q$. Écrire la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbf{R}^3$ trouvée en question Q7.
Déterminer le couple de la décomposition de Jordan-Chevalley de la matrice A en exprimant D et N comme polynômes de la matrice A (sous forme développée).

PARTIE III - Une démonstration de l'unicité de la décomposition

Q12. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent entre eux. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et, pour tout entier i entre 1 et p, $E_{\lambda_i}(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i.
Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.
En déduire qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v.

Q13. Soit A et B deux matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent entre elles. Démontrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable.

Q14. Soit A et B deux matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent entre elles. Démontrer que la matrice $A - B$ est nilpotente.

Q15. Déterminer les matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ qui sont à la fois diagonalisables et nilpotentes.

Q16. Dans cette question, on admet, pour toute matrice carrée A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ à polynôme caractéristique scindé, l'existence d'un couple (D, N) vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4) et tel que D et N soient des polynômes en A.
Établir l'unicité du couple (D, N) dans la décomposition de Jordan-Chevalley.

CCINP 2021 - MP - Deuxième composition

PARTIE I - Quelques exemples

Q1. Par unicité, si A est diagonalisable, sa décomposition de Jordan-Chevalley est $\boxed{(A, 0).}$

Toujours par unicité, si A est nilpotente, sa décomposition de Jordan-Chevalley est $\boxed{(0, A).}$
Une matrice est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. ainsi
$\boxed{\text{elle vérifie les hypothèses du théorème.}}$
Le polynôme caractéristique de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ est $(X-1)(X-2)$. Il est donc simplement scindé sur $\mathbf{R}$ et donc cette matrice est diagonalisable. Il en résulte que

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ n'est pas sa décomposition de Jordan-Chevalley.}}$$

Q2. La matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ admet X^2+1 comme polynôme caractéristique et celui-ci n'est pas scindé sur $\mathbf{R}$. Ainsi $\boxed{\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \text{ admet } X^2+1 \text{ n'admet pas de décomposition de Jordan-Chevalley dans } \mathscr{M}2(\mathbf{R}).}$

Q3. En développant par rapport à la deuxième colonne, on trouve $\chi_A = (X+1)(X^2+2X+1)$, i.e. $\boxed{\chi_A = (X+1)^3.}$ Comme D est diagonalisable et admet -1 comme valeur propre triple, elle est semblable à $-I_3$. Elle lui est donc égale car $-I_3$ commute à toute matrice. On a donc $D = -I_3$ et

$$N = A + I_3, \text{ i.e. } \boxed{D = -I_3,\ N = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}}.$$

Q4. Comme $-I_3$ commute à N, on a $\exp(A) = \exp(-I_3)\exp(N)$. On a $\exp(-I_3) = e^{-1}I_3$ et, comme

$$N^2 = 0, \text{ on a } \exp(N) = I_3 + N. \text{ Il en résulte } \boxed{\exp(A) = e^{-1}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}}.$$

Q5. On a $B(B-I_n) = A^2(A-I_n)(A+I_n)$ et donc, puisque $A^2(A-I_n) = 0$, $\boxed{B(B-I_n) = 0.}$ On en déduit que B est un projecteur et donc diagonalisable. Par ailleurs $(A-A^2)^2 = A^2(A-I_n)^2 = 0$ puisque A et $A - I_n$ commutent entre elles. Comme A^2 et $A - A^2$ sont des polynômes en A, par unicité de la décomposition de Jordan-Chevalley, celle-ci est donnée par $\boxed{(A^2, A-A^2).}$

PARTIE II - Un exemple par deux méthodes

Q6. En calculant, on a $\chi_A = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ et donc $\chi_A = (X-1)(X-2)^2$. La matrice A est donc diagonalisable si et seulement $\mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ est de dimension 2, ou encore si $A - 2I_3$ est de rang 1. Comme les colonnes de $A - 2I_3$ ne sont pas proportionnelles entre elles, par exemple parce que la dernière ligne n'est pas entière nulle alors la dernière colonne n'est pas nulle et admet une dernière coordonnée nulle, on en déduit que $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathscr{M}3(\mathbf{R}).}$ Le théorème de Cayley-Hamilton entraîne $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}(\chi_A(u))$ et donc, d'après le théorème de décomposition des noyaux il vient $\boxed{\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}((u - 2\mathrm{Id})^2).}$

Q7. On calcule l'image de $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ par $(A-2I_3)(A-I_3)$ et on obtient $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Le théorème de Cayley-Hamilton assure que c'est un vecteur de $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})$ et donc que $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ est un vecteur de $\mathrm{Ker}((u-2\mathrm{Id})^2)$. Pour la même raison, en prenant l'image de $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$par $(A - 2I_3)^2$, on obtient que $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ est un vecteur de

$\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})$. On peut donc choisir $\boxed{e_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ et } e_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.}$ On a $u(e_3) = e_2 + 2e_3$ et donc

$$\boxed{B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}.}$$

Q8. On vérifie que $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ commutent entre elles et qu'elles sont respectivement diagonale (donc diagonalisable) et nilpotente. Par unicité on en déduit que la décomposition de Jordan-Chevalley de B est donnée par $\boxed{\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right).}$ Si Q est la matrice $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ alors $A = QBQ^{-1}$. En notant (D,N) la décomposition de Jordan-Chevalley de B, on a donc $A = QDQ^{-1} + QNQ^{-1}$. La matrice QDQ^{-1} est semblable à D, donc diagonalisable. La matrice QNQ^{-1} admet le même polynôme caractéristique que N, à savoir X^3 puisque N est nilpotente, et donc elle-même nilpotente. Enfin $QDQ^{-1}QNQ^{-1} = QDNQ^{-1} = QNDQ^{-1} = QNQ^{-1}QDQ^{-1}$. Il en résulte, par unicité, que la décomposition de Jordan-Chevalley de B est (QDQ^{-1}, QNQ^{-1}). Ces deux matrices représentent dans la base canonique les endomorphismes envoyant (e_1, e_2, e_3) respectivement sur $(e_1, 2e_2, 2e_3)$ et $(0, 0, e_2)$. On obtient $\boxed{\left(\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & -1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & -1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right).}$

Q9. Puisqu'on a affaire à des pôles simples, on obtient directement $\dfrac{1}{(X-1)(X-2)} = \dfrac{1}{X-2} - \dfrac{1}{X-1}$ et donc $\dfrac{1}{(X-1)(X-2)^2} = -\dfrac{1}{(X-1)(X-2)} + \dfrac{1}{(X-2)^2}$ soit $\boxed{\dfrac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \dfrac{1}{X-1} - \dfrac{1}{X-2} + \dfrac{1}{(X-2)^2}.}$ En multipliant par $(X-1)(X-2)^2$, il vient $(X-2)^2 + (X-1)(-X+2+1) = 1$. On peut donc poser $\boxed{U = 3 - X \text{ et } V = 1.}$

Q10. Par commutativité des polynômes en u, on a $p + q = 1(u) = \mathrm{Id}$ et donc, pour x dans $\mathbf{R}^3$, on a $\boxed{p(x) + q(x) = x.}$ D'après le théorème de Cayley-Hamilton on a $(u - 2\mathrm{Id})^2 \circ (u - \mathrm{Id}) = 0$ et donc, puisque les polynômes en u commutent entre eux, $p \circ q = q \circ p = 0$. On en déduit $p^2 = (\mathrm{Id} - q) \circ p = p - p \circ q = p$ et $q^2 = (\mathrm{Id} - p) \circ q = q$. Donc p et q sont des projecteurs. D'après le théorème de Cayley-Hamilton l'image de p est incluse dans $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et celle de q dans $\mathrm{Ker}((u - 2\mathrm{Id})^2)$. Pour x dans $\mathbf{R}^3$ on a $x = p(x) + q(x)$ et, par unicité de la décomposition de x relativement à la somme directe obtenue en question Q6, on en conclut que $p(x)$ est le projeté de x sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}((u - 2\mathrm{Id})^2)$ et $q(x)$ est le projeté de x sur $\mathrm{Ker}((u - 2\mathrm{Id})^2)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$. Autrement dit

$\boxed{p \text{ est le projecteur sur } \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}) \text{ parallèlement à } \mathrm{Ker}((u-2\mathrm{Id})^2) \text{ et } q \text{ est le projecteur sur } \mathrm{Ker}((u-2\mathrm{Id})^2) \text{ parallèlement à } \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}).}$

Q11. On a donc $d = \mathrm{Id} + q = 2p - \mathrm{Id}$. Comme e_2 et e_3 sont dans $\mathrm{Ker}((u - 2\mathrm{Id})^2)$, ils sont fixes par q. Inversement e_1 est fixe par p, et on en déduit $d(e_1) = e_1$, $d(e_2) = 2e_2$ et $d(e_3) = e_3$, i.e.

$\boxed{\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$ Par définition, on a $p = (X-2)^2(u)$ et $q = (X-1)(3-X)(u)$ donc $d = (-X^2+4X-2)(u)$, i.e. $d = -u^2+4u-2\mathrm{Id}$. Au vu de sa matrice, d est diagonalisable. On pose $n = u-d$, i.e. $n = u^2-3u+2\mathrm{Id}$ ou encore $n = (X-1)(X-2)(u)$. On a donc $n^2 = (X-1)^2(X-2)^2(u) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Il en résulte que n est nilpotent. Et comme d et n sont des polynômes en u, il commutent entre eux. Il en résulte que leurs matrices relativement à la base canonique sont respectivement diagonalisable et nilpotente, et commutent entre elles. On en déduit $\boxed{D = -A^2+4A-2I_E \text{ et } N = A^2-3A+2I_3.}$

PARTIE III - Une démonstration de l'unicité de la décomposition

Q12. Soit λ une valeur propre de u et x dans E_λ. On a $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$ et donc $v(x) \in E_\lambda$. Il en résulte que $\boxed{\text{tout sous-espace propre de } u \text{ est } v\text{-stable.}}$ Comme v est diagonalisable, sa bi-restriction à tout sous-espace v-stable l'est aussi. On peut donc trouver, pour tout λ, une base de E_λ qui soit v-propre. Elle est donc à la fois v-propre et u-propre. En concaténant ces bases on obtient une base de E qui est propre pour u et pour v, i.e. $\boxed{\text{il existe une base commune de diagonalisation pour } u \text{ et } v.}$

Q13. On associe à A et B leurs endomorphismes canoniquement associés, notés u et v. D'après la question précédente, on dispose d'une base commune de diagonalisation pour u et v. Si P est la matrice de passage de la base canonique à cette base, on en déduit que PAP^{-1} et PBP^{-1} sont toutes deux diagonales et donc $P(A-B)P^{-1}$ aussi. Par conséquent $\boxed{A-B \text{ est diagonalisable.}}$

Q14. Puisque A et B sont nilpotentes, leur polynôme caractéristique est X^n et on a donc $A^n = B^n = 0$. La formule du binôme de Newton s'applique ici car A et B commutent entre elles et donc

$$(A-B)^{2n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} (-1)^{2n-1-k} A^k B^{2n-1-k} + \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} A^k B^{2n-1-k} \ .$$

Dans la première somme toutes les puissances de B sont nulles, car $2n-1-k \geq n$, et dans la seconde toutes les puissances de A sont nulles, car $k \geq n$. On en déduit $(A-B)^{2n-1} = 0$ et donc $\boxed{A-B \text{ est nilpotente.}}$

Q15. Une matrice nilpotente admet X^n comme polynôme caractéristique et donc son spectre est réduit à $\{0\}$. Si elle est, de plus, diagonalisable, elle est semblable à une matrice diagonale ayant une diagonale nulle, i.e. à 0. Il en résulte qu' $\boxed{\text{une telle matrice est nulle.}}$

Q16. Soit (D', N') une décomposition de Jordan-Chevalley de A. On a donc $D+N = D'+N'$ et donc $D-D' = N'-N$. Comme D' et N' commutent, elles commutent à leur somme, i.e. à A et donc aussi à tout polynôme en A. Donc D et D' sont diagonalisables et commutent. Il en résulte que $D-D'$ est diagonalisable, d'après la question Q13. De même N et N' sont nilpotentes et commutent, donc $N'-N$ est nilpotente d'après la question Q14. La matrice $D-D'$ est donc à la fois diagonalisable et nilpotente, puisqu'égale à $N'-N$. D'après la question Q15 elle est donc nulle, i.e. $D = D'$ et $N = N'$. Autrement dit $\boxed{\text{la décomposition de Jordan-Chevalley est unique.}}$