

EXERCICE I

Pour n entier, $n \geq 2$, on définit le déterminant de VANDERMONDE de n nombres complexes $x_1, x_2, \dots, x_n$ par :

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

L'objet de cet exercice est de démontrer par récurrence que l'on a : $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Q1. Calculer $V(x_1, x_2)$. Expliquer pourquoi il suffit de faire la démonstration pour n nombres complexes $x_1, x_2, \dots, x_n$ deux à deux distincts.

Dans la suite, $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n nombres complexes deux à deux distincts.

Q2. On considère la fonction $t \mapsto P(t) = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t)$.

Démontrer que P est une fonction polynomiale de degré au plus $n - 1$ et justifier que le coefficient de t^{n-1} est un déterminant de VANDERMONDE.

Démontrer par récurrence $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Q3. Première application

Calculer le déterminant de la matrice $A = (i^j)_{1 \leq i, j \leq n}$ en faisant apparaître le déterminant de VANDERMONDE $V(1, 2, \dots, n)$.

Q4. Deuxième application

Donner un exemple de n nombres complexes $a_1, a_2, \dots, a_n$ deux à deux distincts et tous non nuls, tels que $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 0$.

Soit n nombres complexes $x_1, x_2, \dots, x_n$ deux à deux distincts et tous non nuls, démontrer que l'une au moins des sommes $\sum_{k=1}^n x_k, \sum_{k=1}^n x_k^2, \sum_{k=1}^n x_k^3, \dots, \sum_{k=1}^n x_k^n$ est non nulle.

On pourra utiliser un déterminant de VANDERMONDE non nul.

EXERCICE II

Dans cet exercice, $\|\cdot\|$ désigne une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. c'est-à-dire une norme vérifiant, pour tout couple (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Q5. Démontrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, la série $\sum \frac{1}{k!} A^k$ converge. On notera e^A sa somme.

Q6. Démontrer que l'application $A \mapsto e^A$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Q7. Si H , dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, est une matrice non nulle de la boule de centre 0 et de rayon r avec $r > 0$,

déterminer la limite de $\frac{1}{\|H\|} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k$ lorsque H tend vers 0.

En déduire que l'application $A \mapsto e^A$ est différentiable en la matrice 0.

On précisera sa différentielle en 0.

PROBLÈME

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

Dans ce problème, on note $\mathcal{S}_n$ l'espace vectoriel des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ symétriques et $\mathcal{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques positives.

Partie I - Exponentielle d'une matrice symétrique

Pour a et b deux réels, on note :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q8. Démontrer, en détaillant les calculs, qu'on a $A \in \mathcal{S}_3^+$ si et seulement si $(a + 2b \geq 0$ et $a \geq b)$.

Q9. Calculer J^k pour tout entier k non nul. Cette relation est-elle valable pour $k = 0$?

En utilisant la relation $A = (a - b)I_3 + bJ$, calculer et expliciter e^A .

On pourra utiliser sans démonstration que, si deux matrices B et C de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ commutent alors $e^{B+C} = e^B e^C$.

Vérifier $e^A \in \mathcal{S}_3^+$.

Q10. Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Justifier que l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Si A dans $\mathcal{S}_n^+$ est semblable à une matrice diagonale D , déterminer une matrice diagonale semblable à la matrice e^A . En déduire $e^A \in \mathcal{S}_n^+$.

Partie II - Produit de HADAMARD de deux matrices

Dans cette partie, pour une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note $E(A)$ la matrice $(e^{a_{i,j}})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Nous allons démontrer $A \in \mathcal{S}_n^+ \implies E(A) \in \mathcal{S}_n^+$.

On définit le produit de HADAMARD de deux matrices $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ noté $*$ par :

$$A * B = (a_{i,j} b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

On note le produit usuel de deux matrices A et B par AB .

On confond une matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbf{R})$ avec son terme réel.

Q11. Vérifier, pour $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, que si $A \in \mathcal{S}_3^+$, alors $E(A) \in \mathcal{S}_3^+$.

Q12. Si D est une matrice diagonale dont tous les termes sont positifs ou nuls et si Y est matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, quel est le signe de $Y^T D Y$?

En déduire qu'une matrice A de $\mathcal{S}_n$ appartient à $\mathcal{S}_n^+$ si, et seulement si, pour toute matrice X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ on a $X^T A X \geq 0$.

Q13. Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{S}_n^+$ et α, β deux réels positifs, démontrer, en utilisant la question Q12, que $\alpha A + \beta B$ est une matrice de $\mathcal{S}_n^+$.

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{S}_n^+$ a-t-on nécessairement $AB \in \mathcal{S}_n^+$?

Q14. Si $A \in \mathcal{S}_n^+$, démontrer qu'il existe une matrice R dans $\mathcal{S}_n^+$ telle que $A = R^2$.

Q15. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{S}_n^+$. On pose $A = U^2$ et $B = V^2$ avec $U = (u_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+$ et $V = (v_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+$, et $A * B = (c_{i,j})$. Vérifier, pour tout couple (i, j) dans $\llbracket 1; n \rrbracket^2$, $c_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^n u_{k,i} u_{k,j} \right) \left(\sum_{\ell=1}^n v_{\ell,i} v_{\ell,j} \right)$.

En déduire $A * B \in \mathcal{S}_n^+$.

Q16. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et pour tout entier naturel p tel que $p \geq 2$, on note A^{*p} la matrice $A * A * \dots * A$ (p fois).

On note $A^{*0} = (1)$ la matrice dont tous les termes sont égaux à 1 et $A^{*1} = A$.

Soit une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, déterminer la limite de la suite de matrices (T_N) définie pour tout

entier naturel N non nul par $T_N = \sum_{p=0}^N \frac{1}{p!} A^{*p}$.

Q17. Pour X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, justifier que l'application $M \mapsto X^T M X$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, puis démontrer que $\mathcal{S}_n^+$ est une partie fermée de $\mathcal{S}_n$. En déduire $A \in \mathcal{S}_n^+ \implies E(A) \in \mathcal{S}_n^+$.

DEUXIÈME ÉPREUVE – CCINP 2022 – MP

EXERCICE I

Q1. Par définition $V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, donc $V(x_1, x_2) = x_2 - x_1$. Puisque le déterminant est alterné, si deux des x_i sont égaux, deux colonnes de la matrice dont $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est le déterminant sont égales et donc $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, ce qui coïncide avec la formule proposée puisqu'un des termes du produit est alors nul : il suffit de faire la démonstration pour n nombres complexes deux à deux distincts.

Q2. En développant le déterminant par rapport à la dernière colonne (formule de LAPLACE) on obtient que P est une fonction polynomiale de degré au plus $n - 1$ dont le coefficient de degré $n - 1$ est le cofacteur principal d'indice (n, n) , i.e. $V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, c'est donc un déterminant de VANDERMONDE.

On pose, pour m entier supérieur à 2, le prédicat $(\mathbf{H}_m)$ donné par : $V(x_1, x_2, \dots, x_m) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_j - x_i)$.

La question Q1 montre que $(\mathbf{H}_2)$ est vrai. Soit m entier vérifiant $3 \leq m \leq n$ et tel que $(\mathbf{H}_{m-1})$ soit vrai. On note P_m la fonction donnée par $P_m(t) = V(x_1, \dots, x_{m-1}, t)$. Puisque n est quelconque, le début de la question s'applique pour m , i.e. P_m est polynomiale de degré au plus $m - 1$, de coefficient dominant $V(x_1, \dots, x_{m-1})$, i.e. $\prod_{1 \leq i < j \leq m-1} (x_j - x_i)$ d'après $(\mathbf{H}_{m-1})$, et le polynôme associé admet $x_1, \dots, x_{m-1}$

comme racines, par caractère alterné du déterminant. Puisque les x_i sont deux à deux distincts, ce coefficient dominant est non nul et ces racines sont toutes distinctes. Puisqu'on a affaire à une fonction polynomiale de degré au plus $m - 1$, il vient $\forall y \in \mathbf{C} \ P_m(t) = \prod_{1 \leq i < j \leq m-1} (x_j - x_i) \prod_{k=1}^{m-1} (t - x_k)$. En évaluant en x_m , on obtient $V(x_1, x_2, \dots, x_m) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_j - x_i)$ et donc $(\mathbf{H}_m)$ est vrai. Par récurrence

finie, on en déduit $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Q3. Par multilinéarité du déterminant, en mettant 1 en facteur dans la première colonne, 2 dans la deuxième colonne etc. jusqu'à n dans la dernière colonne, on a $\det(A) = n! V(1, 2, \dots, n)$. Or $V(1, 2, \dots, n) = \prod_{j=2}^n \prod_{i=1}^{j-1} (j - i)$, i.e. $V(1, 2, \dots, n) = \prod_{j=2}^n (j - 1)!$. Il en résulte $\det(A) = \prod_{k=1}^n k!$.

Q4. Soit $(a_k)_{1 \leq k \leq n-1}$ des réels non nuls tous distincts et S la somme de leurs carrés. Alors S est un réel strictement positif et on pose $a_n = i\sqrt{S}$, de sorte que a_n est un imaginaire pur non nul. Donc on a affaire à des nombres complexes non nuls distincts deux à deux dont la somme des carrés est, par construction, nulle, i.e.

$$a_1, a_2, \dots, a_n \text{ sont deux à deux distincts, tous non nuls et vérifient } \sum_{k=1}^n a_k^2 = 0.$$

Puisque $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts et tous non nuls, $V(0, x_1, \dots, x_n)$ est non nul d'après la formule démontrée en question Q2. La matrice associée est donc inversible. En particulier l'image

du vecteur $\begin{pmatrix} -n \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nulle puisque ce vecteur ne l'est pas. Comme la première coordonnée de son image est nulle par construction, c'est que l'une de ses autres coordonnées ne l'est pas, i.e.

$$\text{l'une au moins des sommes } \sum_{k=1}^n x_k, \sum_{k=1}^n x_k^2, \sum_{k=1}^n x_k^3 \dots \sum_{k=1}^n x_k^n \text{ est non nulle.}$$

EXERCICE II

Q5. Puisqu'on a affaire à une norme d'algèbre, on a $\|I_n\| \leq 1$ en appliquant la définition à $A = B = I_n$ et en simplifiant par le réel strictement positif $\|I_n\|$. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On a donc $\|A^0\| = \|I_n\| \leq 1 = \|A\|^0$ et, par récurrence immédiate, $\forall k \in \mathbf{N}^* \quad \|A^k\| \leq \|A\|^k$. On peut alors écrire, en tant que sommes de séries à termes positifs, i.e. dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\| \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k = \exp(\|A\|)$$

et donc la série $\sum \frac{1}{k!} A^k$ converge absolument. Puisque $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie il en résulte que $\sum \frac{1}{k!} A^k$ converge.

Q6. Soit R un réel strictement positif et A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tel que $\|A\| < R$. La démonstration précédente donne $\forall k \in \mathbf{N} \quad \|A^k\| \leq R^k$ et donc la série de fonctions $\sum f_k$ donnée par $f_k(A) = \frac{1}{k!} A^k$ est normalement convergente sur $B(0, R)$. Comme les fonctions polynomiales sont continues et que $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est de dimension finie, la somme de cette série normalement convergente est continue, i.e. l'exponentielle est continue sur l'ouvert $B(0, R)$. Comme c'est vrai pour tout R strictement positif l'application $A \mapsto e^A$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Q7. D'après la démonstration précédente, la série $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k!} H^k$ est absolument convergente et on a

$$\left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k \right\| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|H\|^k \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|H\|^2 r^{k-2}$$

et donc

$$\frac{1}{\|H\|} \left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k \right\| \leq \|H\| \frac{e^r - 1 - r}{r^2}.$$

Il en résulte $\lim_{H \rightarrow 0} \frac{1}{\|H\|} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k = 0$. On a donc $e^H = I_n + H + o(H)$, i.e.

$A \mapsto e^A$ est différentiable en la matrice 0, de différentielle l'identité.

PROBLÈME

Partie I - Exponentielle d'une matrice symétrique

Q8. Par construction A est symétrique réelle et on a $A = (a - b)I_3 + bJ$. La matrice J est de rang 1 et symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable, par théorème spectral, admet 0 comme valeur propre de multiplicité 2 et sa dernière valeur propre est obtenue par la trace. On en déduit que J est conjuguée à la matrice diagonale $\text{diag}(0, 0, 3)$ et donc, puisque la conjugaison est un automorphisme d'algèbre, A est conjuguée à $\text{diag}(a - b, a - b, a + 2b)$. Son spectre est donc $\{a - b, a + 2b\}$ et ainsi

$$A \in \mathcal{S}_3^+ \iff (a + 2b \geq 0 \wedge a \geq b).$$

Q9. On a $J^2 = 3J$ et donc, par récurrence immédiate, $J^k = 3^{k-1}J$ pour tout entier k non nul. Comme

$$J^0 = I_3, \quad \text{cette relation n'est pas valable pour } k = 0. \quad \text{On en déduit } e^{bJ} = I_3 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^{k-1}b^k}{k!} J = I_3 +$$

$$\frac{e^{3b} - 1}{3} J. \text{ Puisque } I_3 \text{ et } J \text{ commutent, il en va de même pour } (a-b)I_3 \text{ et } bJ \text{ et il vient } e^A = e^{(a-b)I_3} e^{bJ} =$$

$$e^{a-b} \left(I_3 + \frac{e^{3b} - 1}{3} J \right), \text{ i.e. } e^A = e^{a-b} I_3 + \frac{e^{a+2b} - e^{a-b}}{3} J = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{a+2b} + 2e^{a-b} & e^{a+2b} - e^{a-b} & e^{a+2b} - e^{a-b} \\ e^{a+2b} - e^{a-b} & e^{a+2b} + 2e^{a-b} & e^{a+2b} - e^{a-b} \\ e^{a+2b} - e^{a-b} & e^{a+2b} - e^{a-b} & e^{a+2b} + 2e^{a-b} \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que e^A est conjuguée à $\frac{1}{3} \text{diag}(e^{a-b}, e^{a-b}, e^{a+2b})$. Comme les exponentielles sont positives, le spectre de e^A est inclus dans $\mathbf{R}_+$. Comme e^A est symétrique réelle, il vient $e^A \in \mathcal{S}_3^+$.

Q10. La conjugaison par P est un automorphisme d'algèbre. En particulier il est linéaire. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Soit Q inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tel que $A = Q^{-1}DQ$. Puisque la conjugaison est un automorphisme d'algèbre, on a, pour tout entier N ,

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k = Q^{-1} \left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} D^k \right) Q.$$

Par continuité de la conjugaison, il vient $e^A = Q^{-1}e^DQ$. De plus si $D = \text{diag}(a_i)$ alors $e^D = \text{diag}(e^{a_i})$ et en particulier e^D est diagonale, i.e. e^A est semblable à la matrice diagonale e^D . De plus la transposition est également linéaire, donc continue, et un passage à la limite montre comme précédemment qu'on a $(e^A)^T = e^{(A^T)} = e^A$, i.e. e^A est symétrique réelle. Comme son spectre est celui de e^D , i.e. est constitué d'exponentielles, il est inclus dans $\mathbf{R}_+$ et donc $e^A \in \mathcal{S}_n^+$.

Partie II - Produit de HADAMARD de deux matrices

Q11. On a $E(A) = \begin{pmatrix} e^a & e^b & e^b \\ e^b & e^a & e^b \\ e^b & e^b & e^a \end{pmatrix}$ et il résulte de la question Q8 que $E(A)$ est symétrique positive si et seulement si $e^a + 2e^b \geq 0$ et $e^a \geq e^b$. La première condition est automatique par positivité de l'exponentielle. La seconde résulte de la croissance de l'exponentielle et du fait qu'on a $a \geq b$, puisque A est dans $\mathcal{S}_3^+$ et en utilisant la question Q8. Par conséquent $E(A) \in \mathcal{S}_3^+$.

Q12. On note $D = \text{diag}(a_i)$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On a alors $Y^T D Y = \sum_{i=1}^n a_i y_i^2$ et donc si D est diagonale à

termes positifs, alors $Y^T D Y$ est positif. Soit A dans $\mathcal{S}_n$. D'après le théorème spectral on dispose de P dans $\mathcal{O}(n)$ et D diagonale tels que $A = P^T D P$. Les valeurs propres de A forment, avec multiplicité, la diagonale de D et donc : si l'une de ces valeurs propres est strictement négative, l'un des éléments diagonaux de D est strictement négatif, disons le i^e . On note $X = P^T e_i$, où e_i est le i^e vecteur de la base canonique. Il vient $X^T A X = e_i^T D e_i < 0$. Réciproquement si toutes les valeurs propres de A sont positives, D est à diagonale positive et pour X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on note $Y = P X$ et il vient $X^T A X = Y^T D Y \geq 0$, d'après ce qui précède. Ainsi $A \in \mathcal{S}_n^+ \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \quad X^T A X \geq 0$.

Q13. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{S}_n^+$ et α, β deux réels positifs. Par linéarité de la transposition, $\alpha A + \beta B$ est symétrique réelle. Soit alors X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Il vient $X^T (\alpha A + \beta B) X = \alpha X^T A X + \beta X^T B X \geq 0$ par positivité de $\alpha, \beta, X^T A X$ et $X^T B X$, en vertu de la question Q12. En utilisant la même question on en déduit $\alpha A + \beta B \in \mathcal{S}_n^+$. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ce sont des matrices symétriques réelles dont les spectres sont $\{0, 2\}$ dans les deux cas, donc A et B sont dans $\mathcal{S}_2^+$. On a $AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, de sorte que AB n'est pas symétrique. Ainsi on n'a pas nécessairement $AB \in \mathcal{S}_n^+$.

Q14. Soit A dans $\mathcal{S}_n^+$. D'après le théorème spectral on dispose de P dans $\mathcal{O}(n)$ et D diagonale à diagonale positive tels que $A = P^T D P$. On note $D = \text{diag}(a_i)$ et on pose $\Delta = \text{diag}(\sqrt{a_i})$ et $R = P^T \Delta P$. La définition de Δ est licite car les (a_i) sont positifs et on a donc $\Delta^2 = D$. Par orthogonalité de P il vient $R^2 = P^T \Delta^2 P = A$. Enfin R est orthosemblable à une matrice diagonale à spectre positif, donc d'après le théorème spectral, $R \in \mathcal{S}_n^+$. Ainsi $\boxed{\exists R \in \mathcal{S}_n^+ \ A = R^2}$.

Q15. Soit (i, j) dans $\llbracket 1; n \rrbracket^2$. On a $a_{i,j} = \sum_{k=1}^n u_{i,k} u_{k,j}$ et comme U est symétrique on a aussi $a_{i,j} = \sum_{k=1}^n u_{k,i} u_{k,j}$.

En appliquant ce résultat à B et V , on a $b_{i,j} = \sum_{k=1}^n v_{k,i} v_{k,j}$ et il vient

$$c_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^n u_{k,i} u_{k,j} \right) \left(\sum_{\ell=1}^n v_{\ell,i} v_{\ell,j} \right).$$
 Soit X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et il vient, par commutativité des sommes,

$$X^T (A * B) X = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{k,i} v_{\ell,i} x_i u_{k,j} v_{\ell,j} x_j = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \left(\sum_{i=1}^n u_{k,i} v_{\ell,i} x_i \right)^2$$

et donc $X^T (A * B) X \geq 0$. Il résulte de la question Q12 $\boxed{A * B \in \mathcal{S}_n^+}$.

Q16. On note $A = (a_{i,j})$. Soit (i, j) dans $\llbracket 1; n \rrbracket^2$ et p dans $\mathbf{N}$. Le terme d'indice (i, j) de A^{*p} est $a_{i,j}^p$ et donc celui de T_p est $\sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} a_{i,j}^k$. La limite d'une suite de matrices s'effectuant coordonnée par coordonnée, il vient $\boxed{\lim T_N = E(A)}$.

Q17. Pour X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, l'application $M \mapsto X^T M X$ est linéaire sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, donc $\boxed{\text{elle est continue}}$. On note φ_X cette application. D'après la question Q12 on a

$$\mathcal{S}_n^+ = \mathcal{S}_n \cap \left(\bigcap_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})} \varphi_X^{-1}(\mathbf{R}_+) \right).$$

Soit X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Comme $\mathbf{R}_+$ est fermé dans $\mathbf{R}$ et que φ_X est à valeurs dans $\mathbf{R}$, la continuité de φ_X entraîne que $\varphi_X^{-1}(\mathbf{R}_+)$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Une intersection quelconque de fermés l'étant également, $\mathcal{S}_n^+$ est l'intersection de $\mathcal{S}_n$ avec un fermé, i.e. $\boxed{\mathcal{S}_n^+ \text{ est une partie fermée de } \mathcal{S}_n}$. Soit A dans $\mathcal{S}_n^+$. La matrice (1) est symétrique réelle, de rang 1 et donc de spectre $\{0; n\}$. Donc A^{*0} est dans $\mathcal{S}_n^+$. Par récurrence immédiate à partir du résultat de la question Q15, pour tout p dans $\mathbf{N}^*$, on a $A^{*p} \in \mathcal{S}_n^+$. Il résulte de la question Q13, par positivité des coefficients et récurrence immédiate, qu'on a pour tout N dans $\mathbf{N}$, $T_N \in \mathcal{S}_n^+$. La question précédente jointe au caractère fermé de $\mathcal{S}_n^+$ permet de conclure $\boxed{E(A) \in \mathcal{S}_n^+}$.