Deuxième composition de mathématiques
Concours Communs Polytechniques – PC

La partie II peut être abordée après la question 1 de la partie I.

Dans tout le problème, G_0 désigne le groupe multiplicatif des matrices carrées à coefficients réels, d'ordre deux et inversibles.
A tout élément x de $\mathbf{R}^2$, avec $x = (x_1, x_2)$, on associe le carré de sa norme euclidienne, c'est-à-dire le nombre réel $x_1^2 + x_2^2$ et noté $\|x\|^2$.

PARTIE I

1) Si g est un élément de G_0, avec $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et x est un élément de $\mathbf{R}^2$, avec $x = (x_1, x_2)$, on note $g(x)$ le couple (y_1, y_2) défini par

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

et on désigne par $m(g)$ la borne inférieure de l'ensemble $\left\{ \|g(x)\|^2 \;\middle|\; x \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\} \right\}$; préciser pourquoi cette borne existe.

2) On se propose de montrer la proposition (P) suivante : $m(g)$ est un minimum, c'est-à-dire il existe un élément x de $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\|g(x)\|^2 = m(g)$.

a) On examine d'abord le cas où g est triangulaire supérieure (i.e. $c = 0$).
Montrer que l'ensemble des éléments x de $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tels que $\|g(x)\|^2$ soit inférieur ou égal à un nombre positif donné est un ensemble fini. En déduire que la proposition (P) est vérifiée dans ce cas.

b) On examine le cas général. Montrer qu'il existe un nombre réel α tel que la matrice g_1 définie par $g_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} g$ soit triangulaire supérieure ; montrer qu'on a $m(g_1) = m(g)$ et achever la démonstration de la proposition (P).
En déduire que $m(g)$ est strictement positif.

3) Désignant par a un nombre réel non nul, on étudie dans cette question le cas particulier où $g = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}a \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. Soit (x_1, x_2) un élément de $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$; examinant successivement les cas où x_2 est nul, impair, pair non nul, montrer qu'on a : $m(g) = \inf \left(a^2, \dfrac{4}{a^2}, \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{1}{a^2} \right)$.

Tracer sur un même graphique les courbes représentatives, pour $u > 0$, des fonctions $u \mapsto u$, $u \mapsto \dfrac{4}{u}$ et $u \mapsto \dfrac{u}{4} + \dfrac{1}{u}$ et en déduire $m(g) \leq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ en précisant les valeurs de a pour lesquelles $m(g) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

PARTIE II

Soit G l'ensemble des éléments de G_0 de déterminant égal à 1 ; G est un sous-groupe de G_0.
On se propose de montrer que, pour toute matrice g de G, on a :

$$m(g) \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \, .$$

4) Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire (notée Im) est strictement positive : $\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

   a) Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de G et soit z un nombre complexe tel que $cz + d \neq 0$. Montrer qu'on a

$$\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

   et en déduire que l'on peut définir une application, notée T_g, de $\mathcal{H}$ dans lui-même par :

$$T_g(z) = \frac{az+b}{cz+d}\ .$$

   b) Montrer que, si g_1 et g_2 sont des éléments de G, on a :

$$T_{g_1 g_2} = T_{g_1} T_{g_2}\ .$$

5) Soit Γ l'ensemble des éléments de G dont les quatre coefficients sont dans $\mathbf{Z}$. Vérifier que Γ est un sous-groupe de G.

On pose :

$$s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

6) Soit z un élément donné de $\mathcal{H}$.

   a) Montrer que l'ensemble $\{\mathrm{Im}\,(T_\gamma(z)) \,|\, \gamma \in \Gamma\}$ ne comporte qu'un nombre fini (éventuellement nul) d'éléments strictement supérieurs à $\mathrm{Im}(z)$. En déduire que cet ensemble admet un maximum. On note ce maximum $M(z)$.

   b) Soit γ_0 un élément de Γ tel que $\mathrm{Im}\,(T_{\gamma_0}(z)) = M(z)$.
   Montrer, en considérant $T_{s\gamma_0}$, qu'on a $|T_{\gamma_0}(z)| \geq 1$.
   Montrer, en considérant $T_{t\gamma_0}$, qu'il existe un élément γ_1 de Γ tel que $T_{\gamma_1}(z)$ ait sa partie imaginaire égale à $M(z)$ et sa partie réelle dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.
   En déduire qu'on a $M(z) \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

7) Soit g un élément de G. Montrer, en appliquant le dernier résultat ci-dessus au nombre complexe $T_{{}^t g}(i)$ (où ${}^t g$ désigne la transposée de g), qu'on a : $m(g) \leq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

8) Proposer, en se ramenant au cas précédent, un majorant de $m(g)$ lorsque g appartient à G_0.

Deuxième composition – ENSI Physique Méca 1982

PARTIE I

1) L'ensemble $\left\{\|g(x)\|^2 \;\middle|\; x \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}\right\}$ est une partie non vide de $\mathbf{R}$, minorée par 0. Il admet donc une borne inférieure : $\boxed{m(g) \text{ existe}}$.

2)

a) Soit x dans $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)$ avec $x = (x_1, x_2)$, et g est un élément de G_0, avec $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a $\|g(x)\|^2 = (ax_1 + bx_2)^2 + (dx_2)^2$. Soit alors A un réel strictement positif et $\alpha = \sqrt{A}$. On remarque

$$\|g(x)\|^2 \leq A \implies (|dx_2| \leq \alpha \text{ et } |ax_1 + bx_2| \leq \alpha) \ .$$

Or $\det(g) = ad$, donc ni a, ni d ne sont nuls. Il vient donc, si $\|g(x)\|^2 \leq A$, $|x_2| \leq \left[\dfrac{\alpha}{|d|}\right]$ où $[x]$ est la partie entière de x.
Par inégalité triangulaire, on a aussi :

$$|ax_1| \leq |ax_1 + bx_2| + |bx_2| \leq \alpha\left(1 + \frac{|b|}{|d|}\right)$$

et donc, a étant non nul, $|x_1| \leq \left[\dfrac{\alpha}{|a|}\left(1 + \dfrac{|b|}{|d|}\right)\right]$.

En conséquence, $\boxed{\text{le nombre de } x \text{ dans } \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0) \text{ tels que } \|g(x)\|^2 \leq A \text{ est fini.}}$

Or, par définition d'une borne inférieure, il existe un élément x_0 de $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\|g(x_0)\|^2 \leq m(g) + 1$. Comme $m(g)$ est une borne inférieure d'une partie de $\mathbf{R}_+$, il est positif et donc $m(g) + 1$ est strictement positif. On peut donc utiliser ce qui précède avec $A = m(g) + 1$: l'ensemble $\mathcal{S}$ défini par $\mathcal{S} = \left\{x \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\} \;\middle|\; \|g(x)\|^2 \leq m(g) + 1\right\}$ est fini. Comme il est aussi non vide, on a $\inf \mathcal{S} = \min \mathcal{S}$. Soit donc x_1 dans $\mathcal{S}$ qui réalise ce minimum. Pour x élément de $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ n'appartenant pas à $\mathcal{S}$, on a

$$\|g(x)\|^2 \geq m(g) + 1 \geq \|g(x_1)\|^2$$

et donc $m(g) = \inf \mathcal{S}$, i.e. $m(g) = \|g(x_1)\|^2$ et $\boxed{\text{la proposition } (P) \text{ est vérifiée dans ce cas.}}$

b) Avec les notations de l'énoncé, g_1 est de la forme donnée par

$$g_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ -a\sin\alpha + c\cos\alpha & * \end{pmatrix}$$

et donc g_1 est triangulaire supérieure si et seulement si $-a\sin\alpha + c\cos\alpha = 0$.
Si a est nul, on pose $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ et sinon on pose $\alpha = \arctan\left(\dfrac{c}{a}\right)$. Et donc

$\boxed{\text{il existe un nombre réel } \alpha \text{ tel que la matrice } g_1 \text{ soit triangulaire supérieure.}}$

Soit r définie par $r = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$; alors r est la matrice d'une rotation et donc, pour tout élément y de $\mathbf{R}^2$, on a $\|r(y)\|^2 = \|y\|^2$; en particulier pour tout élément x de $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$, en posant $y = g(x)$ il vient

$$\|g_1(x)\|^2 = \|r(y)\|^2 = \|y\|^2 = \|g(x)\|^2 \ .$$

Comme $\det(r) = 1$, $\det(g_1) = \det(g) = 1$ et g_1 appartient à G. On peut appliquer ce qui précède à g_1 et on a $\boxed{m(g_1) = m(g).}$

Or, d'après la question précédente,il existe x dans $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $m(g_1) = \|g_1(x)\|^2$ et donc

$$m(g) = m(g_1) = \|g_1(x)\|^2 = \|g(x)\|^2 \ ,$$

et donc $m(g)$ est un minimum, i.e. $\boxed{\text{la proposition } (P) \text{ est vraie.}}$.

Comme g est bijective et x est non nul, $g(x)$ est non nul donc il en va de même de sa norme. D'où $\boxed{m(g) > 0.}$

3) Soit x dans $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)$ avec $x = (x_1, x_2)$. On distingue trois cas :

$x_2 = 0$**.** Alors $x_1 \neq 0$ et on a $g(x) = (ax_1, 0)$, donc $\|g(x)\|^2 = a^2 x_1^2 \geq a^2 = \|g((1,0))\|^2$ car x_1 est non nul.

$x_2 = 2n+1$ **avec** n **entier.** Alors $\|g(x)\|^2 = a^2(x_1 + n + \frac{1}{2})^2 + \underbrace{\frac{(2n+1)^2}{a^2}}_{\geq \frac{1}{a^2}}$.

Comme $x_1 + n \in \mathbf{Z}$, on a $x_1 + n + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ ou $x_1 + n + \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}$, donc $\left(x_1 + n + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4}$.

Aussi a-t-on $\|g(x)\|^2 \geq \frac{a^2}{4} + \frac{1}{a^2} = \|g((0,1))\|^2$.

$x_2 = 2n$ **avec** n **entier non nul.** Alors $\|g(x)\|^2 = a^2(x_1 + n)^2 + \frac{4n^2}{a^2} \geq \frac{4}{a^2} = \|g((-1,2))\|^2$.

Il en résulte que pour tout élément de $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a $\|g(x)\|^2 \geq \min\left(a^2, \frac{a^2}{4} + \frac{1}{a^2}, \frac{4}{a^2}\right)$. Ce minimum étant atteint en $(1,0)$ ou $(0,1)$ ou $(-1,2)$, c'est bien $m(g)$.

$$\boxed{\text{On a } m(g) = \min\left(a^2, \frac{a^2}{4} + \frac{1}{a^2}, \frac{4}{a^2}\right).}$$

On définit trois fonctions sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f_1 : u \mapsto u$, $f_2 : u \mapsto \frac{u}{4} + \frac{1}{u}$ et $f_3 : u \mapsto \frac{4}{u}$.

Pour u dans $\mathbf{R}_+^*$, on a :

$$f_1(u) - f_2(u) = \frac{3u}{4} - \frac{1}{u} = \frac{3}{4u}\left(u^2 - \frac{4}{3}\right)$$

$$f_2(u) - f_3(u) = \frac{u}{4} - \frac{3}{u} = \frac{1}{4u}(u^2 - 12)$$

et

$$f_1\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = f_2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad f_2\left(2\sqrt{3}\right) = f_3\left(2\sqrt{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \ .$$

Soit f la fonction $\min(f_1, f_2, f_3)$. On a donc

— sur $\left]0; \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$, $f = f_1$. Comme f_1 est strictement croissante, il vient $f \leq f_1\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ sur cet intervalle et ce maximum est atteint en une unique valeur, à savoir $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

— sur $\left[\dfrac{2}{\sqrt{3}};2\sqrt{3}\right]$, $f=f_2$. Comme f_2 est strictement convexe, ses valeurs maximales sont aux bornes. Il vient $f\leq \max\left(f_2\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right),f_2\left(2\sqrt{3}\right)\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ et ce maximum est atteint en exactement deux valeurs, à savoir $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ et $2\sqrt{3}$.

— sur $\left[2\sqrt{3};+\infty\right[$, $f=f_3$. Comme f_3 est strictement décroissante, il vient $f\leq f_3\left(2\sqrt{3}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ sur cet intervalle et ce maximum est atteint en une unique valeur, à savoir $2\sqrt{3}$.

On a donc $f\leq\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ et ce maximum est atteint uniquement en $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ et $2\sqrt{3}$.

Il en résulte, d'après la question précédente, $\boxed{m(g)\leq\dfrac{2}{\sqrt{3}}.}$

De plus, $\boxed{m(g)=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \text{ si et seulement si } a=\pm\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{3}}} \text{ ou } a=\pm\sqrt{2\sqrt{3}}.}$

PARTIE II

4)

a) Comme $g\in G$, a, b, c et d sont réels et vérifient $ad-bc=1$. Il vient

$$\frac{az+b}{cz+d}=\frac{(az+b)(c\overline{z}+d)}{|cz+d|^2}=\frac{acz\overline{z}+bd+adz+cb\overline{z}}{|cz+d|^2}=\frac{ac\,|z|^2+bd}{|cz+d|^2}+\frac{adz+cb\overline{z}}{|cz+d|^2}\,.$$

D'où $\boxed{\mathrm{Im}\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)=\dfrac{(ad-bc)\,\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}=\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}.}$

Soit z élément de $\mathcal{H}$, alors $cz+d$ est de partie imaginaire $c\,\mathrm{Im}(z)$ et n'est donc réel que si c est nul. Dans ce cas sa partie réelle est d et, comme $ad-bc=1$, d n'est pas nul. Par conséquent $cz+d$ est non nul donc $\dfrac{az+b}{cz+d}$ est bien défini. De plus, d'après ce qui précède, sa partie imaginaire est du même signe que celle de z et est donc strictement positive :

$\boxed{\text{on peut définir une application de } \mathcal{H} \text{ dans lui-même par : } T_g(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}.}$

b) Soit g_1 et g_2 des éléments de G, avec $g_1=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}$ et $g_2=\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}$, et z un élément de $\mathcal{H}$.

Alors on a :

$$T_{g_1}T_{g_2}(z)=\frac{a_1\dfrac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}+b_1}{c_1\dfrac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}+d_1}=\frac{(a_1a_2+b_1c_2)z+a_1b_2+b_1d_2}{(c_1a_2+d_1c_2)z+c_1b_2+d_1d_2}\,.$$

Comme $g_1g_2=\begin{pmatrix}a_1a_2+b_1c_2&a_1b_2+b_1d_2\\c_1a_2+d_1c_2&c_1b_2+d_1d_2\end{pmatrix}$, on a bien $\boxed{T_{g_1}T_{g_2}=T_{g_1g_2}.}$

5) Puisque l'identité est à coefficients entiers, Γ est non vide. La formule donnée dans la question précédente montre que Γ est un sous-magma de G. Enfin puisque les éléments de G sont de déterminant 1, l'inverse d'un élément de G est la transposée de sa comatrice. Si donc g appartient à Γ, g^{-1} est aussi à coefficients entiers, i.e. Γ est stable par passage à l'inverse : $\boxed{\Gamma \text{ est un sous-groupe de } G.}$

6)

a) Soit $\gamma \in \Gamma$ avec $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a

$$\mathrm{Im}\,(T_\gamma(z)) > \mathrm{Im}(z) \iff |cz+d|^2 < 1 \iff (cx+d)^2 + (cy)^2 \leq 1\ .$$

D'où

$$\mathrm{Im}\,(T_\gamma(z)) > \mathrm{Im}(z) \Rightarrow \left(|c| < \frac{1}{y} \text{ et } |d| \leq |cz+d| + |cz| < 1 + |cz| \right)\ .$$

La première condition n'est vérifiée que par un nombre fini (éventuellement nul) de valeurs entières de c et, pour chaque c, la seconde ne l'est que pour un nombre fini de valeurs de d. Il en résulte que

$\boxed{\text{l'ensemble } \{\mathrm{Im}\,(T_\gamma(z))\,|\,\gamma \in \Gamma\} \text{ ne comporte qu'un nombre fini (éventuellement nul) d'éléments strictement supérieurs à } \mathrm{Im}(z).}$

Si le nombre fini précédent est nul, un maximum de $\{\mathrm{Im}\,(T_\gamma(z))\,|\,\gamma \in \Gamma\}$ est $\mathrm{Im}(z)$, qui est obtenu pour $\gamma = I_2$. Sinon le maximum de cet ensemble est le maximum de l'ensemble fini des valeurs qui sont strictement supérieures à $\mathrm{Im}(z)$, maximum qui existe par finitude.

$\boxed{\text{L'ensemble } \{\mathrm{Im}\,(T_\gamma(z))\,|\,\gamma \in \Gamma\} \text{ admet un maximum.}}$

b) On a $s\gamma_0 = \begin{pmatrix} -c_0 & -d_0 \\ a_0 & b_0 \end{pmatrix}$ et donc

$$T_{s\gamma_0}(z) = -\frac{c_0 z + d_0}{a_0 z + b_0} = -\frac{1}{T_{\gamma_0}(z)} = -\frac{\overline{T_{\gamma_0}(z)}}{|T_{\gamma_0}(z)|^2}\ ,$$

d'où

$$\mathrm{Im}(T_{s\gamma_0}(z)) = \frac{\mathrm{Im}(T_{\gamma_0}(z))}{|T_{\gamma_0}(z)|^2} = \frac{M(z)}{|T_{\gamma_0}(z)|^2}\ .$$

Or cette quantité est majorée par $M(z)$ par définition de $M(z)$ puisque $s\gamma_0$ appartient à Γ. Il vient $\boxed{|T_{\gamma_0}(z)| \geq 1.}$

On a $T_t(z) = z+1$ et donc, pour tout entier relatif n,

$$T_{t^n\gamma_0}(z) = T_{t^n} T_{\gamma_0}(z) = T_{\gamma_0}(z) + n\ .$$

Il en résulte qu'on a, pour tout entier relatif n,

$$\begin{cases} \mathrm{Im}(T_{t^n\gamma_0}(z)) = \mathrm{Im}(T_{\gamma_0}(z)) = M(z) \\ \mathrm{Re}(T_{t^n\gamma_0}(z)) = \mathrm{Re}(T_{\gamma_0}(z)) + n \end{cases}\ .$$

En posant $n = -\left[\mathrm{Re}(T_{\gamma_0}(z)) + 1/2\right]$ et $\gamma_1 = t^n\gamma_0$, $T_{\gamma_1}(z)$ a alors une partie imaginaire égale à $M(z)$ et une partie réelle dans $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. Autrement dit

$\boxed{\text{il existe un élément } \gamma_1 \text{ de } \Gamma \text{ tel que } T_{\gamma_1}(z) \text{ ait sa partie imaginaire égale à } M(z) \text{ et sa partie réelle dans l'intervalle } \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].}$

Il vient $1 \leq |T_{\gamma_1}(z)|^2 = (\mathrm{Re}(T_{\gamma_1}(z))^2 + M(z)^2 \leq M(z)^2 + \dfrac{1}{4}$, et donc $M(z)^2 \geq \dfrac{3}{4}$. Comme $M(z)$ est positif, $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq M(z)}$

7) Soit a, b, c et d réels tels que $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Posons $z = T_{{}^t g}(i)$. On a donc $z = \dfrac{ai+c}{bi+d}$. Soit maintenant γ_0 dans Γ, avec $\gamma_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}$, tel que $\operatorname{Im}(T_{\gamma_0}(z)) = M(z)$. Alors, d'après la relation obtenue en début de partie :

$$\operatorname{Im}(T_{{}^t g}(i)) = \frac{1}{b^2+d^2} \text{ et } M(z) = \frac{1}{(b^2+d^2)\left|c_0 z + d_0\right|^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

soit $(b^2+d^2)\left|c_0 z + d_0\right|^2 \leq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Or on a $c_0 z + d_0 = c_0 \dfrac{ai+c}{bi+d} + d_0 = \dfrac{(c_0 c + d_0 d) + (c_0 a + d_0 b)i}{bi+d}$, d'où :

$$\left|g((c_0,d_0))\right|^2 = (b^2+d^2)\left|c_0 z + d_0\right|^2 = (c_0 c + d_0 d)^2 + (c_0 a + d_0 b)^2 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Comme $(c_0, d_0) \neq (0,0)$, $m(g) \leq \left|g((c_0,d_0))\right|^2$ et il vient $\boxed{m(g) \leq \dfrac{2}{\sqrt{3}}.}$

8) Soit g dans G_0 avec $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Si $\det(g) > 0$, on pose $g_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\det(g)}} g$ et alors, pour tout x de $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $g_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\det(g)}} g(x)$ et ainsi $\|g(x)\|^2 = \det(g)\,\|g_1(x)\|^2$. Il en résulte $m(g) = \det(g) m_1(g)$, d'où $m(g) \leq \dfrac{2\det(g)}{\sqrt{3}}$.

Si $\det(g) < 0$, on pose $g_2 = \begin{pmatrix} -a & -b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\det(g_2) = -\det(g) > 0$ et, pour tout x dans $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a $\|g(x)\|^2 = \|g_2(x)\|^2$. Comme g_2 est dans G_0, l'analyse précédente montre $m(g) = m(g_2) \leq \dfrac{-2\det(g)}{\sqrt{3}}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } g \text{ dans } G_0, \text{ on a } m(g) \leq \frac{2|\det(g)|}{\sqrt{3}}.}$$