Concours Centrale - Supélec 2004

MATHÉMATIQUES II — Filière PC

Dans tout le problème, P désigne le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, de son repère orthonormé canonique $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ de son orientation canonique et de son repère polaire canonique.

On appellera **conique** toute partie $\mathscr{C}$ (vide ou non) de P ayant une équation de la forme

$$\left\{M_{(X,Y)} \in \mathscr{C}\right\} \Leftrightarrow \left\{AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0\right\}$$

où A, B, C, D, E, F sont six réels, avec en outre A, B, C non tous nuls.

À tout (A, B, C, D, E, F), élément de $\mathbb{R}^6$ tel que A, B, C non tous nuls correspond ainsi une conique $\mathscr{C}$, que l'on pourra noter $\mathscr{C}_{(A,B,C,D,E,F)}$.

Le but du problème est notamment l'étude de l'ensemble des points communs à certains ensembles de coniques.

Partie I - Préliminaires

I.A - Montrer que les fonctions $\theta \mapsto \cos 2\theta$; $\theta \mapsto \sin 2\theta$; $\theta \mapsto \cos\theta$; $\theta \mapsto \sin\theta$; $\theta \mapsto 1$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ forment une famille libre dans l'espace des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$.

I.B - Soit un cercle quelconque du plan P, que l'on supposera de rayon $\rho > 0$.
Montrer que si le cercle est inclus dans la conique $\mathscr{C}_{(A,B,C,D,E,F)}$, alors $A = C$ et $B = 0$.
Réciproquement, que peut-on dire d'une conique $\mathscr{C}_{(A,0,A,D,E,F)}$?

Partie II -

On note $P' = P \setminus \{Oy\}$ le plan P privé de l'axe des ordonnées. On note M_0 un point de coordonnées (X_0, Y_0) appartenant à P'.

Soit $\mathscr{E}_1$ l'ensemble des coniques $\mathscr{C}_{(A,B,C,D,E,F)}$ satisfaisant aux quatre conditions :

$$\begin{cases} M_0 \in \mathscr{C} \\ A = C \end{cases} \qquad \begin{cases} E = 0 \\ F = 0 \end{cases}$$

II.A -

II.A.1) Montrer que le seul élément, noté $(\mathscr{C}_1)$, de $\mathscr{E}_1$ qui soit un cercle a pour équation

$$x_0(X^2 + Y^2) - (x_0^2 + y_0^2)X = 0.$$

Montrer que $(\mathscr{C}_1)$ est tangent à l'axe Oy et indiquer une construction géométrique de son centre.

II.A.2) Montrer qu'il existe un seul élément, noté $(\mathscr{C}_2)$, de $\mathscr{E}_1$ qui ait une équation de la forme $BXY + CX = 0$. En indiquer une caractérisation géométrique.

II.A.3) Déterminer $(\mathscr{C}_1) \cap (\mathscr{C}_2)$. En discuter le nombre d'éléments. En déduire l'ensemble des points communs à tous les éléments de $\mathscr{E}_1$.

II.B - On appelle φ l'application de P' dans P qui, au point M de coordonnées polaires (ρ, θ), tel que $\rho \neq 0$ et que pour tout entier relatif k, $\theta \neq (2k+1)\pi/2$, associe M' de coordonnées polaires $\left(\rho\tan\theta, \dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$.

II.B.1) Montrer que cette définition de $\varphi(M)$ est *cohérente*, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du choix de (ρ, θ) parmi les coordonnées polaires possibles du point M. Montrer que $\varphi(M_0)$ appartient à toutes les coniques de $\mathscr{E}_1$. En déduire une construction géométrique de $\varphi(M_0)$ à l'aide d'un cercle et d'une droite.

II.B.2) Pour $M \in P'$, quand a-t-on $\varphi(M) \in P'$? Que dire alors de $\varphi \circ \varphi(M)$?

II.B.3) On appelle γ la courbe d'équation polaire

$$\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto \rho = 2a\sin\theta, \text{ où } a > 0 \text{ est donné.}$$

Reconnaître γ ; déterminer une représentation polaire de la courbe $\gamma' = \varphi(\gamma)$; étudier et tracer cette courbe, *avec justifications*.

II.C - Dans cette question, $M_0(x_0, y_0)$ est un point de P' tel que $|x_0| \neq |y_0|$ et on lui associe $M_0' = \varphi(M_0)$ comme ci-dessus.

II.C.1) a) Montrer que, quel que soit le couple λ, μ de réels non tous nuls, il existe un unique réel ν, que l'on calculera, tel que la conique $(\mathscr{C}_{\lambda,\mu})$ d'équation $\lambda\left(X^2+Y^2\right)+2\mu XY+\nu X=0$ appartienne à $\mathscr{E}_1$.

b) Lorsque $|\lambda| \neq |\mu|$, montrer que $(\mathscr{C}_{\lambda,\mu})$ a un centre $\Omega_{\lambda,\mu}$ dont on déterminera les coordonnées. [*Pour ce faire, il est possible d'effectuer une translation arbitraire de l'origine du repère puis de faire en sorte que la nouvelle origine devienne centre de symétrie de la conique* $(\mathscr{C}_{\lambda,\mu})$.]

II.C.2) Le point M_0 restant fixé, montrer que tous les points $\Omega_{\lambda,\mu}$ (où $|\lambda| \neq |\mu|$) appartiennent à la conique Γ d'équation

$$X^2 - Y^2 - \frac{x_0^2 + y_0^2}{2x_0} X + y_0 Y = 0.$$

En déterminer le genre, le centre, les sommets et les axes.

II.C.3) Déterminer les intersections de Γ avec les droites Ox, Oy, OM_0, OM_0' et M_0M_0'. On trouvera en général six points en tout, pour lesquels le centre de Γ joue un rôle particulier que l'on mettra en évidence.

II.C.4) Faire une figure d'ensemble.

II.C.5) Étudier et représenter $(\mathscr{C}_{1,1})$ et $(\mathscr{C}_{1,-1})$. On réalisera la figure en prenant $x_0 = 2$, $y_0 = 1$. Que remarque-t-on quant à leurs axes ?

On identifiera pour la suite du problème les espaces vectoriels euclidiens canoniques $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$. On désignera par i le complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

Partie III -

On admet que le déterminant de Vandermonde

$$V(z_1, z_2, z_3, z_4) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 \\ 1 & z_2 & z_2^2 & z_2^3 \\ 1 & z_3 & z_3^2 & z_3^3 \\ 1 & z_4 & z_4^2 & z_4^3 \end{vmatrix}$$

en les complexes z_1, z_2, z_3, z_4 est nul si, et seulement si, deux au moins des z_i sont égaux.

Dans cette partie et la suivante, on étudie un problème analogue à celui de la première, mais par une méthode sensiblement différente.

III.A - On s'intéresse à l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des parties de $\mathbb{R}^2$ ayant une équation de la forme $A\overline{z}z + B\left(z^2+\overline{z}^2\right) + \overline{C}z + C\overline{z} + D = 0$ où les réels A, B, D et le complexe C ne sont pas tous les quatre nuls, et qui contiennent trois points M_1, M_2, M_3 *non alignés* donnés, d'affixes respectifs z_1, z_2, z_3.

III.A.1) Vérifier que les éléments de $\mathscr{E}_2$ sont bien des coniques et donner une propriété commune de leurs axes.

III.A.2) Pour z_4 donné dans $\mathbb{C}$, on définit les matrices

$$\mathscr{M} = \begin{pmatrix} \overline{z_1}z_1 & z_1^2+\overline{z_1}^2 & z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ \overline{z_2}z_2 & z_2^2+\overline{z_2}^2 & z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ \overline{z_3}z_3 & z_3^2+\overline{z_3}^2 & z_3 & \overline{z_3} & 1 \\ \overline{z_4}z_4 & z_4^2+\overline{z_4}^2 & z_4 & \overline{z_4} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{\mathscr{M}} = \begin{pmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{pmatrix}$$

a) Établir que la matrice $\tilde{\mathscr{M}}$ est inversible. Quelle conclusion peut-on en tirer quant au rang de $\mathscr{M}$?

b) On définit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. En donner la dimension. Montrer que

$$S = \left\{(A,B,C,D), \forall i \in \{1,2,3\}, A\overline{z_i}z_i + B\left(z_i^2+\overline{z_i}^2\right) + C\overline{z_i} + \overline{C}z_i + D = 0\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de E et en donner la dimension.

c) Montrer que le point M_4 d'affixe z_4 appartient à toutes les coniques éléments de $\mathscr{E}_2$ si, et seulement si, le rang de $\mathscr{M}$ est égal à 3. [*Pour la condition nécessaire, on pourra faire intervenir un système linéaire bien choisi.*]

III.B - On suppose dans cette question que les complexes z_1, z_2, z_3 sont égaux respectivement à $a\exp(i\theta_1)$, $a\exp(i\theta_2)$ et $a\exp(i\theta_3)$, où $a > 0$ et θ_1, θ_2, θ_3 sont des réels.

III.B.1) Montrer qu'il existe un unique cercle dans $\mathscr{E}_2$ et que si le point M_4 d'affixe z_4 appartient à toutes les coniques éléments de $\mathscr{E}_2$, alors z_4 est de la forme $a\exp(i\theta_4)$.

III.B.2) Soit le déterminant

$$\mathscr{D} = \begin{vmatrix} z_1^2 & z_1^4 + a^4 & z_1^3 & z_1 \\ z_2^2 & z_2^4 + a^4 & z_2^3 & z_2 \\ z_3^2 & z_3^4 + a^4 & z_3^3 & z_3 \\ z_4^2 & z_4^4 + a^4 & z_4^3 & z_4 \end{vmatrix}$$

Montrer que $\mathscr{D}$ est de la forme $(z_1 z_2 z_3 z_4 - a^4)\mathscr{V}$, où $\mathscr{V}$ s'exprime très simplement à l'aide de $V(z_1, z_2, z_3, z_4)$.

III.B.3) Montrer que la condition énoncée en III.A.2-c) est équivalente à la nullité de $\mathscr{D}$.

III.B.4) a) En déduire l'ensemble des points communs aux coniques de $\mathscr{E}_2$. Discuter soigneusement le nombre d'éléments de cet ensemble.

b) Lorsque ce nombre est égal à 4, que peut-on dire des directions des bissectrices du couple de droites (M_1M_2, M_3M_4) ?

III.C -

III.C.1) Généraliser les résultats de III.B.4 au cas où l'on ne fait plus l'hypothèse III.B. [*On montrera comment on peut se ramener à ce cas.*]

III.C.2) Soit trois points A, B, C non alignés dans P et (Δ) une droite. Par A, resp. B, resp. C, on mène la parallèle à la symétrique de la droite BC, resp. CA, resp. AB, par rapport à (Δ). Montrer que ces trois droites concourent. [*On pourra commencer par le cas où* (Δ) *est l'axe* Ox *; dans ce cas, il suffit d'utiliser les résultats de la partie III.*]

Partie IV -

On considère dans cette partie des équations de la forme

$$\overline{A}z^2 + A\overline{z}^2 + \overline{B}z + B\overline{Z} + C = 0 \qquad (1)$$

où $A \neq 0$ et B sont deux complexes et C un réel.

IV.A -

IV.A.1) Soit θ un réel et Φ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $z\exp i\theta$.

Montrer que, si $(\Gamma) \subset P$ a une équation de la forme (1), alors on peut choisir θ pour que $\Phi(\Gamma)$ ait une équation de la forme

$$\frac{A'}{2}\left(z^2 + \overline{z}^2\right) + \overline{B'}z + B'\overline{z} + C' = 0$$

où l'on ait de plus $A' \in \mathbb{R}^{+*}$.

IV.A.2) En déduire la nature d'une telle partie (Γ) de P. [*On pourra revenir en coordonnées cartésiennes.*]

IV.B - Soit trois points M_1, M_2, M_3 *non alignés* donnés, d'affixes respectifs z_1, z_2, z_3. On appelle $\mathscr{E}_3$ l'ensemble des coniques de P contenant ces trois points et ayant une équation de la forme (1). Soit M_4 un point de P, d'affixe z_4. Montrer que toutes les coniques de $\mathscr{E}_3$ passent par M_4 si, et seulement si, le rang de la matrice

$$\mathscr{M}' = \begin{pmatrix} z_1^2 & \overline{z_1^2} & z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2^2 & \overline{z_2^2} & z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3^2 & \overline{z_3^2} & z_3 & \overline{z_3} & 1 \\ z_4^2 & \overline{z_4^2} & z_4 & \overline{z_4} & 1 \end{pmatrix}$$

est égal à une valeur que l'on précisera.

IV.C - Dans cette question, on suppose que de plus z_1, z_2 et z_3 sont de même module $a > 0$ et ont a^3 pour produit.

IV.C.1) Déterminer deux complexes u et v tels que z_1, z_2 et z_3 soient solutions de $Z^3 - uZ^2 + vZ - a^3 = 0$.

IV.C.2) En déduire des complexes α, α', β, β' tels que z_1, z_2 et z_3 soient solutions de

$$\begin{cases} H_1(Z) = Z^2 + \alpha Z + \beta - a\overline{Z} = 0 \\ H_2(Z) = Z + \alpha' + \beta'\overline{Z} - \dfrac{1}{a}\overline{Z^2} = 0 \end{cases}$$

IV.C.3) Grâce à des combinaisons linéaires bien choisies sur les rangées de $\mathscr{M}'$, montrer que toutes les coniques de $\mathscr{E}_3$ passent par M_4 si, et seulement si,

$$H_1(z_4) = H_2(z_4) = 0 \qquad (2)$$

IV.C.4) a) Montrer qu'il existe un polynôme $\varpi(Z)$ à coefficients complexes, de degré 4, tel que (2) implique $\varpi(z_4) = 0$; on donnera d'un tel polynôme les coefficients en Z^4 et en Z^3, en fonction de a, u et v.

b) Déterminer les zéros de ϖ en en discutant la multiplicité. [*On remarquera que trois zéros de ϖ sont déjà connus.*] On ne demande pas de vérifier qu'inversement tous les complexes obtenus vérifient (2).

IV.C.5) On choisit $z_4 = z_1 + z_2 + z_3$.

a) Déterminer la valeur du produit scalaire $\left\langle \overrightarrow{M_1M_4}, \overrightarrow{M_2M_3} \right\rangle$. [On pourra introduire le produit $\left(\overline{z_4 - z_1}\right)(z_3 - z_2)$.]

b) Que représente M_4 pour le triangle $M_1M_2M_3$?

IV.D - Généraliser les résultats de IV.C.5-b) au cas où l'on ne fait plus l'hypothèse du IV.C.

• • • FIN • • •

PARTIE I

I.A - Pour k dans $\mathbf{Z}$, on note γ_k, σ_k et e_k les applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ données par $\gamma_k(\theta) = \cos(k\theta)$, $\sigma_k(\theta) = \sin(k\theta)$ et $e_k(\theta) = \exp(ik\theta)$. Pour démontrer que les co-restrictions de $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \sigma_1, \sigma_2)$ sont libres dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, il suffit de le démontrer dans $\mathbf{C}^{\mathbf{R}}$ puisqu'une relation de dépendance à coefficients réels ne saurait exister s'il n'en existe pas à coefficients complexes. Or la famille $(e_k)_{-2 \leq k \leq 2}$ est libre dans $\mathbf{C}^{\mathbf{R}}$ par exemple parce que chacune de ces fonctions est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants différente. Plus directement une relation de dépendance entre ces cinq fonctions donne naissance à quatre relations par dérivation successive et l'évaluation en 0 donne naissance à un système linéaire homogène à cinq équations, qui est inversible car son déterminant est un déterminant de Vandermonde associé aux scalaires $(k)_{-2 \leq k \leq 2}$. Son unique solution est donc la solution nulle et la famille considérée est libre. Comme la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2i} & 0 & \frac{1}{2i} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2i} \end{pmatrix}$$

est inversible, de déterminant $-\dfrac{1}{4}$, les fonctions e_0, $\dfrac{1}{2}(e_{-1} + e_1)$, $\dfrac{1}{2i}(-e_{-1} + e_1)$, $\dfrac{1}{2}(e_{-2} + e_2)$, $\dfrac{1}{2i}(-e_{-2} + e_2))$ forment une famille libre, i.e.

$\boxed{\theta \mapsto 1,\ \theta \mapsto \cos(\theta),\ \theta \mapsto \cos(2\theta),\ \theta \mapsto \sin(\theta) \text{ et } \theta \mapsto \sin(2\theta) \text{ forment une famille libre dans } \mathbf{R}^{\mathbf{R}}.}$

I.B - Soit Γ un cercle. On note (x, y) son centre. L'ensemble de ses points est donc l'image de $\mathbf{R}$ par la fonction $\theta \mapsto (x + \rho\cos(\theta), y + \rho\sin(\theta))$, que l'on notera f. Soit θ dans $\mathbf{R}$. Si $f(\theta)$ appartient à $\mathcal{C}_{(A,B,C,D,E,F)}$, alors on a

$$A(x+\rho\cos\theta)^2 + B(x+\rho\cos\theta)(y+\rho\sin\theta) + C(y+\rho\sin\theta)^2 + D(x+\rho\cos\theta) + E(y+\rho\sin\theta) + F = 0$$

i.e. en linéarisant,

$$\frac{\rho^2}{2}(A - C)\cos(2\theta) + \frac{\rho^2}{2}B\sin(2\theta) + D'\cos(\theta) + E'\sin(\theta) + F' = 0$$

où les constantes D', E' et F' sont indépendantes de θ. Il résulte de la question précédente qu'on a $A = C$, $B = 0$ et $D' = E' = F' = 0$. En particulier $\boxed{A = C \text{ et } B = 0.}$

PARTIE II

II.A -

II.A.1) D'après la question précédente si un cercle appartient à $\mathcal{E}_1$ il admet une équation de la forme $A(X^2 + Y^2) + DX = 0$ telle que $A(x_0^2 + y_0^2) + Dx_0 = 0$. Cette dernière condition exprime que (A, D) est colinéaire à $(x_0, x_0^2 + y_0^2)$. Puisque M_0 appartient à P', ce dernier vecteur est non nul et il en résulte qu'un cercle de $\mathcal{E}_1$ admet une équation du type

$\lambda(x_0(X^2+Y^2)-(x_0^2+y_0^2)X)=0$ avec λ réel non nul et donc aussi l'équation $x_0(X^2+Y^2)-(x_0^2+y_0^2)X=0$.
Comme cette équation est celle du cercle de centre $((x_0^2+y_0^2)/2x_0,0)$ passant par l'origine, on en déduit que

$\boxed{\text{le seul élément de } \mathcal{E}_1 \text{ qui soit un cercle a pour équation } x_0(X^2+Y^2)-(x_0^2+y_0^2)X=0.}$

L'intersection de $\mathcal{C}_1$ avec l'axe des ordonnées admet pour équations $X=0$ et $x_0Y^2=0$ et est donc réduite à l'origine, i.e. $\boxed{\mathcal{C}_1 \text{ est tangent à } (Oy).}$

Le centre de $\mathcal{C}_1$ se situe donc sur l'axe $(0x)$ et est équidistant de O et M_0. Comme $M_0\notin Oy$, (OM_0) est une droite et est distincte de (Oy). La médiatrice de (O,M_0) n'est donc pas parallèle à (Ox) et ainsi

$\boxed{\text{le centre de } \mathcal{C}_1 \text{ s'obtient comme intersection de la médiatrice de } (O,M_0) \text{ avec l'axe des abscisses.}}$

II.A.2) D'après la définition de $\mathcal{E}_1$, un tel élément admet une équation de la forme $BXY+CX=0$ avec $Bx_0y_0+Cx_0=0$ ou encore, puisque $x_0\neq 0$, $By_0+C=0$, i.e. (B,C) colinéaire à $(1,-y_0)$. De même que précédemment, on en conclut qu'il existe $\boxed{\text{un seul élément de } \mathcal{E}_1 \text{ ayant une équation de la forme } BXY+CX=0.}$

Plus précisément une équation en est $X(Y-y_0)=0$ et il s'agit donc de

$\boxed{\text{la réunion de l'axe des ordonnées avec la parallèle à l'axe des abscisses passant par } M_0.}$

II.A.3) Puisque $\mathcal{C}_1$ est tangent à l'axe des ordonnées, leur unique intersection est le point O. Quant à la droite d'équation $Y=y_0$, elle coupe $\mathcal{C}_1$ en M_0. L'équation obtenue en substituant Y par y_0 dans l'équation $x_0(X^2+Y^2)-(x_0^2+y_0^2)X=0$ est une équation du second degré en X, dont une racine est x_0 et dont la somme des racines est $(x_0^2+y_0^2)/x_0$. L'intersection des deux coniques considérée est donc formée des deux points distincts O et M_0 ainsi que du point, éventuellement confondu avec un des précédents, de coordonnées $(y_0^2/x_0,y_0)$. On en déduit que

$\boxed{\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2 \text{ comporte trois points si et seulement si } y_0 \text{ n'appartient pas à } \{0,x_0,-x_0\}, \text{ et dans ce cas ces points sont } O,\ M_0 \text{ et } (y_0^2/x_0,y_0). \text{ Dans le cas contraire l'intersection est réduite à deux points, à savoir } O \text{ et } M_0.}$

Par définition d'un élément $\mathcal{C}_{(A,B,C,D,E,F)}$ appartenant à $\mathcal{E}_1$, une équation en est

$$\frac{A}{x_0}\Big(x_0(X^2+Y^2)-(x_0^2+y_0^2)X\Big)+BX(Y-y_0)=0$$

à savoir une combinaison linéaire des équations de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, avec $(A,B)\neq(0,0)$. En particulier tous les points de $\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2$ appartiennent à tous les éléments de $\mathcal{E}_1$. Réciproquement ce sont les seuls points communs possibles, donc

$\boxed{\text{l'ensemble des points communs à tous les éléments de } \mathcal{E}_1 \text{ est } \mathcal{C}_1 \text{ et } \mathcal{C}_2.}$

II.B -

II.B.1) Soit k dans $\mathbf{Z}$ et M dans P' de coordonnées polaires (ρ,θ). On a $\rho\tan(\theta+2k\pi)=\rho\tan(\theta)$ et $\frac{\pi}{2}-(\theta+2k\pi)\equiv\frac{\pi}{2}-\theta \pmod{2\pi}$, ainsi que $-\rho\tan(\theta+(2k+1)\pi)=-\rho\tan(\theta)$ et $\frac{\pi}{2}-(\theta+(2k+1)\pi)\equiv(\frac{\pi}{2}-\theta)+\pi \pmod{2\pi}$, et donc $\boxed{\text{la définition de } \varphi(M) \text{ est cohérente.}}$

Soit (ρ, θ) les coordonnées polaires de M_0. On a donc $\rho\cos(\theta) = x_0$ et $\rho\sin(\theta) = y_0$ de sorte que

$$\rho\tan(\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \rho\tan(\theta)\sin(\theta) = \frac{y_0^2}{x_0}$$

et

$$\rho\tan(\theta)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \rho\tan(\theta)\cos(\theta) = y_0$$

et donc d'après la question précédente $\boxed{\varphi(M_0) \text{ appartient à toutes les coniques de } \mathcal{E}_1.}$

La suite de la question me semble étrange puisque $\varphi(M_0)$ est déjà construit comme intersection de $\mathcal{C}_1$ et la droite d'équation $Y = y_0$!

Une réponse consiste à obtenir

$\boxed{\varphi(M_0) \text{ comme intersection du cercle centré en l'origine de rayon } \rho\tan(\theta) \text{ et la droite d'équation polaire } \alpha = \theta \text{ (en repérant les points du plan par des coordonnées } (r, \alpha)).}$

Voici une autre façon de faire plus constructive. On trace le cercle de centre O passant par M_0 et on note R l'intersection de ce cercle avec l'axe des abscisses. On trace ensuite la parallèle (D) à la droite joignant les projections de M_0 sur chacun des axes et passant par R. On note enfin (C) le cercle de centre O passant l'intersection de (D) avec l'axe des abscisses : c'est le cercle de centre O de rayon $\rho\tan(\theta)$. Son intersection avec la parallèle à l'axe des abscisses passant par M_0 est le point $\varphi(M_0)$.

II.B.2) Par définition de φ, $\varphi(M)$ est la droite symétrique de (OM_0) par rapport à la première bissectrice et donc

$\boxed{\varphi(M) \text{ appartient à } P' \text{ si et seulement si } M \text{ n'est pas sur l'axe des abscisses.}}$

Dans ce cas, comme $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot(\theta)$, on a $\boxed{\varphi \circ \varphi(M) = M.}$

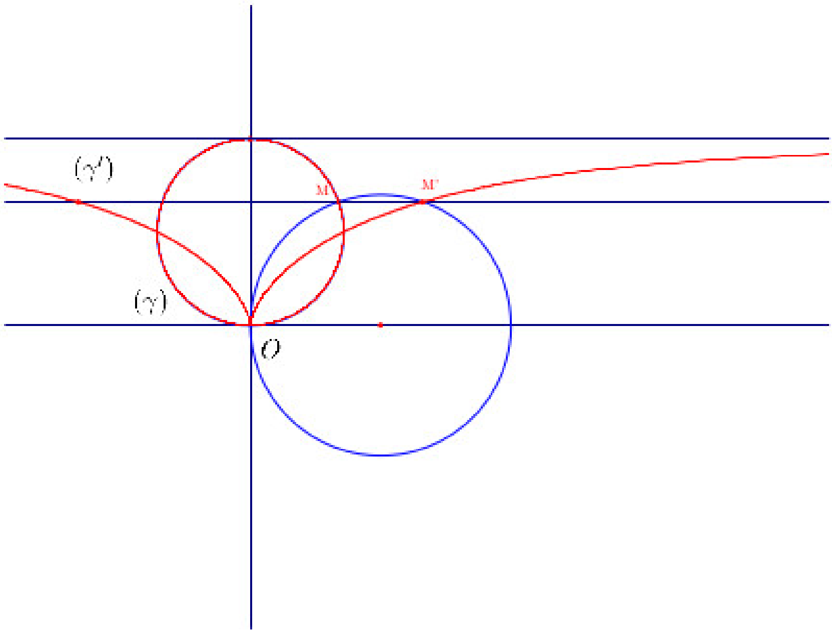
II.B.3) Si ρ est non nul, on a $\rho = 2a\sin(\theta)$ si et seulement si $\rho^2 = 2a\rho\sin(\theta)$ et donc, puisque l'origine est obtenue pour $\theta = 0$, $\boxed{\gamma \text{ est le cercle de centre } (0, a) \text{ privé du point } (0, 2a).}$

Erreur d'énoncé : φ n'est pas défini sur γ mais sur $\gamma \setminus \{O\}$.

Comme $\gamma \cap P'$ ne rencontre pas l'axe des abscisses, son image par φ non plus. Soit alors un point M dans cette image de coordonnées polaires (r, θ). Alors on peut choisir θ de sorte qu'on ait $0 < |\theta| < \dfrac{\pi}{2}$ et donc, puisque φ est une involution de $\gamma \cap P'$ sur son image, $M \in \varphi(\gamma) \cap P'$ si et seulement si $\varphi(M)$ appartient à $\gamma \cap P'$ et il vient $\rho\tan(\theta) = 2a\cos(\theta)$, i.e. une représentation polaire de $\varphi(\gamma \cap P')$ est donnée par

$$\boxed{\rho = 2a\frac{\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)}, \text{ pour } \theta \text{ dans } \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{2}\right[.}$$

Il s'agit de la cissoïde de Dioclès, obtenue par symétrie par rapport à la première bissectrice de celle construite dans l'exercice 1-42. Pour le tracé, on peut se reporter au dit exercice !



II.C -

II.C.1) a) Par le calcul effectué en II-A.3), on a

$$\lambda(X^2+Y^2)+2\mu XY+\nu X=\frac{\lambda}{x_0}\Big(x_0(X^2+Y^2)-(x_0^2+y_0^2)X\Big)+2\mu X(Y-y_0)$$

et donc il y a unicité d'un tel ν et il vient $\boxed{\nu=-\lambda\dfrac{x_0^2+y_0^2}{x_0}-2\mu y_0.}$

b) Le centre d'une conique à centre étant le lieu d'annulation du gradient de la fonction de deux variables associée, ses coordonnées x et y vérifient

$$2\lambda x+2\mu y+\nu=\lambda y+\mu x=0$$

et donc, puisque $|\lambda|\neq|\mu|$, $\boxed{(\mathcal{C}_{\lambda,\mu})\text{ est une conique à centre}}$ et $\Omega_{\lambda,\mu}$ admet pour coordonnées $-\dfrac{\lambda\nu}{2(\lambda^2-\mu^2)}$ et $\dfrac{\mu\nu}{2(\lambda^2-\mu^2)}$ ou encore

$$\boxed{\frac{\lambda^2(x_0^2+y_0^2)+2\lambda\mu x_0y_0}{2x_0(\lambda^2-\mu^2)}\text{ et }-\frac{\lambda\mu(x_0^2+y_0^2)+2\mu^2x_0y_0}{2x_0(\lambda^2-\mu^2)}.}$$

II.C.2) En notant (x,y) les coordonnées précédentes, on a $x^2-y^2=\dfrac{\nu^2}{4(\lambda^2-\mu^2)}$ et

$$-\frac{x_0^2+y_0^2}{2x_0}x+y_0y=\frac{\nu}{2(\lambda^2-\mu^2)}\left(\lambda\frac{x_0^2+y_0^2}{2x_0}+\mu y_0\right)$$

et donc, d'après II.C.1.a), $\boxed{\Omega_{\lambda,\mu} \text{ appartient à } \Gamma.}$

Par ailleurs, une équation de Γ est

$$\left(X - \frac{x_0^2+y_0^2}{4x_0}\right)^2 - \left(Y - \frac{y_0}{2}\right)^2 = \frac{(x_0^2+y_0^2)^2}{16x_0^2} - \frac{y_0^2}{4} = \frac{(x_0^2-y_0^2)^2}{16x_0^2}$$

et donc, puisque $|x_0| \neq |y_0|$,

Γ est une hyperbole équilatère de centre de coordonnées $\dfrac{x_0^2+y_0^2}{4x_0}$ et $\dfrac{y_0}{2}$, qui passe par O. Ses axes sont les parallèles aux axes de coordonnées issues de son centre, l'axe transverse étant la parallèle à l'axe des abscisses.

Les sommets sont les points communs avec l'axe transverse, donc admettent $y_0/2$ comme ordonnée et leur abscisse vérifie $x = \dfrac{x_0^2+y_0^2}{4x_0} \pm \dfrac{x_0^2-y_0^2}{4x_0}$, i.e.

les sommets les milieux de $[OM_0]$ et de $[OM_0']$, i.e. ont pour coordonnées $(x_0/2, y_0/2)$ et $(y_0^2/2x_0, y_0/2)$.

II.C.3) Par définition l'axe des abscisses coupe Γ en un point $(x,0)$ tel que $x\left(x - \dfrac{x_0^2+y_0^2}{2x_0}\right) = 0$,

i.e. $\boxed{\Gamma \cap (Ox) \text{ est constitué de l'origine et du centre de } \mathcal{C}_1.}$

En résolvant $Y(Y-y_0) = 0$, on obtient que

$\boxed{\Gamma \cap (Oy) \text{ est constitué de l'origine et du centre de } \mathcal{C}_2.}$

Puisque les sommets de l'hyperbole sont les milieux de $[OM_0]$ et de $[OM_0']$, on en déduit que

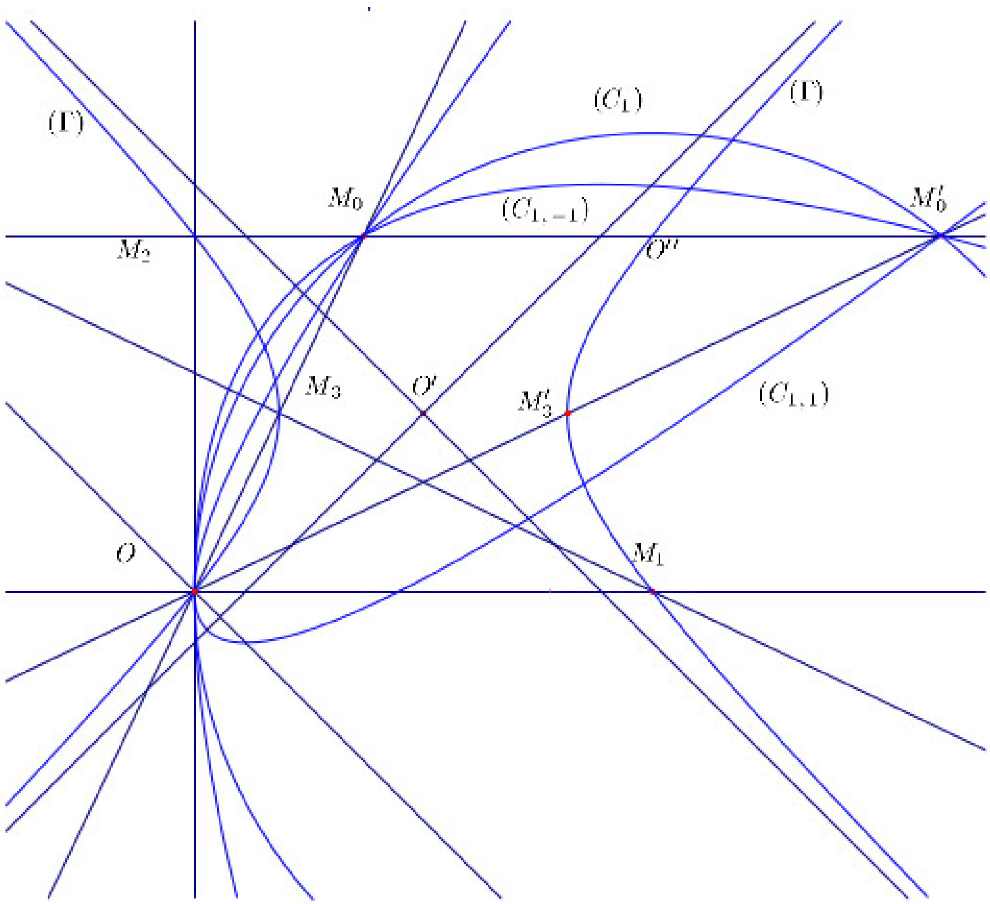
$\Gamma \cap (OM_0)$ est constitué de l'origine et du milieu de $[OM_0]$ et $\Gamma \cap (OM_0')$ est constitué de l'origine et du milieu de $[OM_0']$

Enfin la droite (M_0M_0') est celle d'équation $Y = y_0$ et son intersection avec Γ sont les points d'abscisses solutions de $x = \dfrac{x_0^2+y_0^2}{4x_0} \pm \dfrac{x_0^2+y_0^2}{4x_0}$, i.e.

$\boxed{\Gamma \cap (M_0M_0') \text{ est constitué du centre de } \mathcal{C}_2 \text{ et du milieu de } [M_0M_0'].}$

D'après la formule donnant les coordonnées du centre de Γ, ce centre est le milieu du segment joignant l'origine au milieu de $[M_0M_0']$ et donc, par associativité du barycentre, c'est aussi le milieu du segment joignant le milieu de $[OM_0]$ au milieu de $[OM_0']$. Comme, d'après les formules, c'est aussi le milieu du segment joignant les centres de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{C}_2$, il en résulte que

$\boxed{\text{le centre de } \Gamma \text{ est centre de symétrie de la figure formée par ces six points.}}$



II.C.4)

II.C.5) Puisque les formes quadratiques dominantes des équations de $\mathcal{C}_{1,1}$ et $\mathcal{C}_{1,-1}$ sont de rang 1, on a affaire à des paraboles d'équations $(X \pm Y)^2 + \dfrac{\nu}{2}(X \pm Y + X \mp Y) = 0$, i.e.

$\boxed{\mathcal{C}_{1,1} \text{ et } \mathcal{C}_{1,-1} \text{ sont des paraboles d'axes parallèles aux première et seconde bissectrices.}}$

PARTIE III

III.A -

III.A.1) Soit (K) dans $\mathcal{E}_2$ donné par des scalaires A, B, C, D. Soit z un point du plan, avec $z = x + iy$ et x et y réels. Alors z appartient à (K) si et seulement si

$$(A + 2B)x^2 + (A - 2B)y^2 + 2\langle C \mid z\rangle + D = 0$$

où $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbf{C}$. Par conséquent si $(A, B) = (0, 0)$ alors (K) est soit une droite ($C \neq 0$), soit vide. Par hypothèse ces deux cas sont exclus et donc $(A, B) \neq (0, 0)$. Si $|A| \neq 2|B|$, on a donc affaire à une conique à centre d'axes parallèles aux axes de coordonnées. Sinon, puisque (K) contient trois points non alignés, c'est une parabole d'axe parallèle à un axe de coordonnées (et de directrice parallèle à l'autre). Par conséquent les éléments de $\mathcal{E}_2$ sont $\boxed{\text{des coniques d'axe(s) parallèle(s) aux axes de coordonnées.}}$

III.A.2) a) La matrice $\widetilde{\mathcal{M}}$ est non-inversible si et seulement si les points du plan $\mathbf{C}^2$ de coordonnées $(z_1, \overline{z_1})$, $(z_2, \overline{z_2})$ et $(z_3, \overline{z_3})$ sont alignés. Puisque $M_1 \neq M_2$, on en déduit $(z_3 - z_1, \overline{z_3} - \overline{z_1}) \in \mathbf{C}(z_2 - z_1, \overline{z_2} - \overline{z_1})$ et donc, en comparant les facteurs de proportionnalités de la première et de la seconde coordonnée, $(z_3 - z_1, \overline{z_3} - \overline{z_1}) \in \mathbf{R}(z_2 - z_1, \overline{z_2} - \overline{z_1})$. En particulier $z_3 - z_1 \in \mathbf{R}(z_2 - z_1)$ et donc (z_1, z_2, z_3) sont alignés dans le plan $\mathbf{R}^2$ identifié à $\mathbf{C}$. Par contraposée, on en déduit que $\boxed{\widetilde{\mathcal{M}} \text{ est inversible.}}$
En particulier les trois dernières colonnes de $\mathcal{M}$ sont libres et donc
$\boxed{\text{le rang de } \mathcal{M} \text{ est supérieur ou égal à 3, donc vaut 3 ou 4.}}$

b) Puisque la dimension d'un produit cartésien est la somme des dimensions des espaces qui le compose, $\boxed{\dim(E) = 5.}$

Soit i dans $\{1, 2, 3\}$, l'équation $A|z_i|^2 + 2B\,\mathrm{Re}(z_i^2) + 2\langle C \mid z_i\rangle + D = 0$ est une équation $\mathbf{R}$-linéaire en (A, B, C, D) et donc S est l'ensemble des solutions d'un système linéaire de trois équations dans un espace vectoriel de dimension 5, c'est donc un $\boxed{\text{sous-espace vectoriel de } E.}$

Plus précisément les équations en (C, D) peuvent se représenter par la matrice $\widetilde{\mathcal{M}}$, qui est inversible, et donc pour toute valeur de (A, B) il existe exactement une valeur de (C, D) vérifiant le système et donc $\boxed{\dim(S) = 2.}$

c) Dans le système précédent, si $(A, B) = (0, 0)$, alors $(C, D) = (0, 0)$ par unicité de la solution et donc les éléments de $\mathcal{E}_2$ sont les coniques correspondant aux éléments de S privé du vecteur nul.

Les coniques passant par M_4 sont donc celles dont les coefficients (A, B, C, D) vérifient en outre la quatrième équation $A|z_4|^2 + 2B\,\mathrm{Re}(z_4^2) + 2\langle C \mid z_4\rangle + D = 0$. On note S' le système donné par les quatre équations $A|z_i|^2 + 2B\,\mathrm{Re}(z_i^2) + 2\langle C \mid z_i\rangle + D = 0$ $(1 \leq i \leq 4)$. Il est associé à la matrice $\mathcal{M}$. Comme cette matrice est de rang au moins 3, elle est de rang 3, tout comme $\widetilde{\mathcal{M}}$, si et seulement si la quatrième ligne est combinaison linéaire des trois premières et si seulement si toute solution de (S) est solution de (S'). Autrement dit M_4 appartient à toutes les coniques de $\mathcal{E}_2$ si et seulement si $\boxed{\mathcal{M} \text{ est de rang 3.}}$

III.B -

III.B.1) Puisque M_1, M_2 et M_3 ne sont pas alignés, ils sont situés sur un unique cercle, à savoir le cercle circonscrit au triangle $(M_1M_2M_3)$. Les calculs précédents montrent qu'il existe un élément de $\mathcal{E}_2$ tel qu'on ait $(A, B) = (1, 0)$. Les calculs de III.A.1) montrent qu'un tel élément est un cercle et donc $\boxed{\mathcal{E}_2 \text{ contient un unique cercle.}}$
Si M_4 appartient à tous les éléments de $\mathcal{E}_2$, il appartient en particulier au cercle circonscrit au triangle $(M_1M_2M_3)$, i.e. au cercle de centre O et de rayon a. En particulier
$\boxed{z_4 \text{ est de la forme } a\exp(i\theta_4) \text{ avec } \theta_4 \text{ réel.}}$

III.B.2) On utilise la multilinéarité par rapport à la deuxième colonne puis, dans les deux matrices obtenues on réordonne les colonnes par exposant croissant, quitte à changer de signe : dans la première on échange les colonnes 1 et 2 puis 2 et 4 (donc on ne change pas le signe du déterminant), dans la seconde on échange 1 et 2, 3 et 4, puis 2 et 3 (donc on change le signe du déterminant). Ensuite on factorise par la puissance minimale de z_i dans chaque ligne dans le premier déterminant et par a^4 dans la première colonne dans le second. On obtient successivement

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \begin{vmatrix} z_1^2 & z_1^4 & z_1^3 & z_1 \\ z_2^2 & z_2^4 & z_2^3 & z_2 \\ z_3^2 & z_3^4 & z_3^3 & z_3 \\ z_4^2 & z_4^4 & z_4^3 & z_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1^2 & a^4 & z_1^3 & z_1 \\ z_2^2 & a^4 & z_2^3 & z_2 \\ z_3^2 & a^4 & z_3^3 & z_3 \\ z_4^2 & a^4 & z_4^3 & z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & z_1^2 & z_1^3 & z_1^4 \\ z_2 & z_2^2 & z_2^3 & z_2^4 \\ z_3 & z_3^2 & z_3^3 & z_3^4 \\ z_4 & z_4^2 & z_4^3 & z_4^4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a^4 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 \\ a^4 & z_2 & z_2^2 & z_2^3 \\ a^4 & z_3 & z_3^2 & z_3^3 \\ a^4 & z_4 & z_4^2 & z_4^3 \end{vmatrix} \\
&= z_1z_2z_3z_4V(z_1,z_2,z_3,z_4) - a^4V(z_1,z_2,z_3,z_4)\,,
\end{aligned}$$

i.e. $\boxed{\mathcal{D} = (z_1z_2z_3z_4 - a^4)V(z_1,z_2,z_3,z_4).}$

III.B.3) Si $|z_4| = a$, on a

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a^2 & \dfrac{z_1^4+a^4}{z_1^2} & z_1 & \dfrac{a^2}{z_1} & 1 \\ a^2 & \dfrac{z_2^4+a^4}{z_2^2} & z_2 & \dfrac{a^2}{z_2} & 1 \\ a^2 & \dfrac{z_3^4+a^4}{z_3^2} & z_3 & \dfrac{a^2}{z_3} & 1 \\ a^2 & \dfrac{z_4^4+a^4}{z_4^2} & z_4 & \dfrac{a^2}{z_4} & 1 \end{pmatrix}$$

et donc, puisque z_1, z_2, z_3 et z_4 sont non nuls, cette matrice a même rang que

$$\begin{pmatrix} a^2z_1^2 & z_1^4+a^4 & z_1^3 & a^2z_1 & z_1^2 \\ a^2z_2^2 & z_2^4+a^4 & z_2^3 & a^2z_2 & z_2^2 \\ a^2z_3^2 & z_3^4+a^4 & z_3^3 & a^2z_3 & z_3^2 \\ a^2z_4^2 & z_4^4+a^4 & z_4^3 & a^2z_4 & z_4^2 \end{pmatrix}$$

et aussi, puisque a est non nul, que

$$\begin{pmatrix} z_1^2 & z_1^4+a^4 & z_1^3 & z_1 & z_1^2 \\ z_2^2 & z_2^4+a^4 & z_2^3 & z_2 & z_2^2 \\ z_3^2 & z_3^4+a^4 & z_3^3 & z_3 & z_3^2 \\ z_4^2 & z_4^4+a^4 & z_4^3 & z_4 & z_4^2 \end{pmatrix}$$

et donc, par égalité des deux dernières colonnes, cette matrice est de rang strictement inférieur à 4 (donc égal à 3 d'après III.A.2.b) si et seulement si $\mathcal{D} = 0$.

Réciproquement si $\mathcal{D} = 0$, alors on a soit $z_1z_2z_3z_4 - a^4 = 0$, soit $V(z_1,z_2,z_3,z_4) = 0$, i.e. z_4 est égal à z_1, z_2, z_3 ou $a^4/(z_1z_2z_3)$. Dans tous les cas $|z_4| = a$ et les équivalences précédentes montrent que $\mathcal{M}$ est de rang 3. Ainsi $\boxed{\mathcal{M} \text{ est de rang 3 si et seulement si } \mathcal{D} = 0.}$

III.B.4) a) Puisque z_1, z_2 et z_3 sont distincts, on a $\mathcal{D} = 0$ si et seulement si z_4 est égal à z_1, z_2, z_3 ou $a^4/(z_1z_2z_3)$ ou encore si et seulement si $z_4 = a\exp(i\theta_4)$ avec $\theta_4 =$

θ_1, $\theta_4 = \theta_2$, $\theta_4 = \theta_3$ ou $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 +_t a_4 = 0$. D'après ce qui précède, l'ensemble des points communs aux coniques de $\mathcal{E}_2$ est formé des points de la forme $\boxed{a\exp(i\theta_4) \text{ avec } \theta_4 \in \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, -(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\}.}$

Cet ensemble est constitué de quatre points sauf si $a^4/(z_1z_2z_3)$ est égal à l'un des z_i, i.e. il y a

$\boxed{\text{quatre points communs sauf si } z_1^2 = \overline{z_2z_3},\ z_2^2 = \overline{z_1z_3} \text{ ou } z_3^2 = \overline{z_2z_1}, \text{ auquel cas il n'y en a que trois.}}$

b) L'équation $z_1z_2z_3z_4 = a^4$ se récrit aussi $z_1z_2 = \overline{z_3z_4}$ ou de même en permutant les indices. Il en résulte que $(z_4 - z_3)(z_2 - z_1)$ est réel, égal à deux fois la partie réelle de $z_2z_4 - z_1z_4$. En particulier $z_4 - z_3$ est colinéaire à $\overline{z_2 - z_1}$ et donc les bissectrices de (M_1M_2) et (M_3M_4) sont celles de (M_1M_2) avec son image par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses, i.e. $\boxed{\text{les axes de coordonnées.}}$

III.C -

III.C.1) On considère un repère centré en le centre du cercle circonscrit au triangle $(M_1M_2M_3)$. Dans ce repère les affixes de M_2, M_2 et M_3 satisfont aux hypothèses de III.B. On en déduit l'ensemble des points communs aux coniques de $\mathcal{E}_2$ est constitué

$\boxed{\text{des points } M_1,\ M_2,\ M_3 \text{ et d'un point } M_4 \text{ éventuellement confondu avec les précédents, d'affixe } R^4/(z_1-\omega)(z_2-\omega)(z_3-\omega) \text{ en notant } \omega \text{ et } R \text{ l'affixe du centre et le rayon du cercle circonscrit. De plus, lorsqu'il y a quatre points communs, les bissectrices des paires de droites formées avec ces quatre points sont parallèles aux axes de coordonnées.}}$

III.C.2) Le problème étant invariant par changement de repère, on peut supposer que Δ est un des axes de coordonnées. D'après ce qui précède appliqué à $M_1 = A$, $M_2 = B$ et $M_3 = C$, la symétrique de (M_1M_2) par rapport à cet axe est (M_3M_4) et de même en permutant A, B et C. Il en résulte que ces symétriques passent toutes par M_4 (du moins si on est dans le cas général), et elles sont donc $\boxed{\text{concourantes.}}$

PARTIE IV

Indications

IV.A -

IV.A.1) L'application Φ est la rotation de centre O et d'angle θ. Comme la somme des deux premiers termes s'écrit $\langle A \mid z^2\rangle$, une rotation d'angle θ sur z revient à faire une rotation d'angle -2θ sur A et on choisit donc θ tel que $\Phi^{-2}(A) \in \mathbf{R}_+^*$.

IV.A.2) Puisque $\mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Re}(z)^2 - \mathrm{Im}(z)^2$, on reconnaît l'équation d'une hyperbole équilatère, éventuellement dégénérée en couple de deux droites.

IV.B - Comme en III.A, on démontre que M_4 convient si et seulement si le rang de $\mathcal{M}'$ est égal à 3.

IV.C -

IV.C.1) Le couple donné par $(u, v) = (z_1 + z_2 + z_3, z_2z_3 + z_3z_1 + z_1z_2)$ convient.

IV.C.2) On peut prendre $\alpha = -u$, $\beta = v$, $\alpha' = -u$ et $\beta' = v/a^2$.

IV.C.3) La matrice $\mathcal{M}'$ a même rang que celle dont les lignes sont les $(H_1(z_i), \overline{z_i}^2, H_2(z_i), \overline{z_i}, 1)$, avec $1 \leq i \leq 4$. Comme $H_j(z_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 2$ et comme $\det \widetilde{\mathcal{M}} \neq 0$, $\mathcal{M}'$ est de rang 3 si et seulement si $H_1(z_4) = H_2(z_4) = 0$.

IV.C.4) a) Par exemple le polynôme $Z - u + \dfrac{v}{a^3}(Z^2 - uZ + v) - \dfrac{1}{a^3}(Z^2 - uZ + v)^2$ convient ou encore $\varpi(Z) = -a^3\varpi(Z) = Z^4 - 2uZ^3 + \dots$.

b) On compte déjà z_1, z_2 et z_3 parmi les racines de ϖ. Le quatrième, en comptant les multiplicités, est donc $z_1 + z_2 + z_3$. Ces racines sont simples si et seulement si on a $z_1 + z_2 + z_3 \notin \{z_1, z_2, z_3\}$, i.e. si et seulement si le triangle $(M_1M_2M_3)$ n'est pas rectangle.

IV.C.5) a) Puisque $z_4 - z_1 = z_3 + z_2$ le produit scalaire considéré est nul.

b) Cela montre que M_4 appartient à la hauteur issue de M_1 dans le triangle $M_1M_2M_3$. En écrivant deux autres produits scalaires, on en déduit que M_4 est l'orthocentre de ce triangle.

IV.C.6) On se ramène à l'hypothèse du IV.C par une translation du repère, comme en III.C.1, suivie d'une rotation d'icelui, aux fins d'obtenir $z_1z_2z_3 = a^3$.