MATHÉMATIQUES I

Notations et objectifs du problème

- On rappelle qu'une ellipse d'un plan affine euclidien, de demi-axes a et b $(a > b > 0)$, notée $(E_{a,b})$ admet, dans un certain repère orthonormé, une représentation paramétrique de la forme :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \tag{1}$$

(t décrit un segment de longueur 2π).

- $\mathscr{C}_{2\pi}$ désigne le $\boldsymbol{C}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques, à valeurs complexes. On munit cet espace du produit scalaire défini par :

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(t)}g(t)dt\,.$$

- Pour $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ on rappelle les expressions des coefficients de Fourier exponentiels et trigonométriques de f, utiles dans le problème :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-kit}dt\,,\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)dt\,.$$

- **Dans tout le problème** r désignera un nombre réel **appartenant à l'intervalle ouvert** $]0, 1[$ et f_r l'élément de $\mathscr{C}_{2\pi}$ défini par : $t \mapsto \left|1 - re^{it}\right|$

On désignera aussi par $\mathscr{S}_r$ l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n \geq 0}$ vérifiant, pour tout entier naturel non nul n, la relation :

$$r(2n+3)a_{n+1} - (1+r^2)2na_n + r(2n-3)a_{n-1} = 0$$

et $\mathscr{B}_r$ le sous-ensemble de $\mathscr{S}_r$ constitué des suites (a_n) telles que le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n z^n$ soit au moins égal à 1.

- Dans tout le problème $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ sera la suite réelle définie par :

$$\alpha_n = \frac{-\binom{2n}{n}}{4^n(2n-1)} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\,.$$

(Les candidats qui le préfèrent pourront aussi noter C_{2n}^n le coefficient binomial).

- La partie entière du réel x est notée $[x]$.

Filière MP

- L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation $\sqrt{z}$ ne sera prise en considération que lorsque z est un nombre réel positif.
- L'objectif du problème est l'étude de quelques problèmes asymptotiques relatifs à la longueur, notée $L(a, b)$, de l'ellipse $(E_{a,b})$.

Partie I - Préliminaires

I.A - Préciser sur un dessin la signification géométrique du paramètre t intervenant dans le paramétrage (1).

I.B - Prouver rapidement que $\mathcal{S}_r$ et $\mathcal{B}_r$ sont des $\boldsymbol{R}$- espaces vectoriels et préciser la dimension de $\mathcal{S}_r$.

I.C - Donner **sans démonstration** l'énoncé précis du théorème de Parseval relatif à un élément $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ (les coefficients de Fourier intervenant dans la formule seront les coefficients exponentiels).

Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{C}_{2\pi}$, prouver, en justifiant d'abord la convergence absolue de la série, la formule :

$$(f|g) = \overline{c_0(f)}c_0(g) + \sum_{n=1}^{\infty}(\overline{c_n(f)}c_n(g) + \overline{c_{-n}(f)}c_{-n}(g)).$$

I.D - Soit n un entier naturel. Exprimer $a_n(f_r)$ à l'aide de $c_n(f_r)$.

I.E - Soient a et b deux réels vérifiant $a > b > 0$. On pose $r = \dfrac{a-b}{a+b}$.

Exprimer, en fonction de a, b et de constantes, le réel $\dfrac{L(a, b)}{a_0(f_r)}$.

Partie II - .Comportement asymptotique de la suite $(a_n(f_r))$

II.A - Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $\alpha_n z^n$. On notera $f(z)$ sa somme dans le disque ouvert complexe de centre 0 et de rayon R.

II.B - Soit x un réel appartenant à l'intervalle ouvert $]-R, R[$. Donner une relation entre $(1-x)f'(x)$ et $f(x)$. En déduire une expression simple de la restriction de f à l'intervalle ouvert $]-R, R[$.

II.C - On choisit maintenant un complexe z tel que $|z| < R$. Déterminer une expression très simple de $f(z)^2$.

II.D - Prouver, pour $r \in]0, 1[$ et $t \in \mathbb{R}$, la relation : $\left|f(re^{it})\right|^2 = f_r(t)$.

II.E - Soit n un entier naturel. En utilisant la question I.C et la précédente, prouver l'égalité :

$$\frac{c_n(f_r)}{\alpha_n r^n} = \int_0^{+\infty} \alpha_{[x]} \frac{\alpha_{n+[x]}}{\alpha_n} r^{2[x]} dx .$$

En déduire la limite de cette suite quand l'entier n tend vers l'infini.

II.F - Prouver que, quand $n \to \infty$:

$$a_n(f_r) \sim \frac{\sqrt{1-r^2}\, r^n}{\sqrt{\pi} n^{3/2}} .$$

En quoi ce résultat corrobore-t-il votre cours sur les séries de Fourier ?

Partie III - Approximation de $L(a, b)$

III.A - Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre satisfaite par f_r. En déduire que la suite $(a_n(f_r))$ appartient à $\mathcal{B}_r$.

III.B - Pour tout réel $r \in]0,1[$, on définit deux suites $(A_n(r))_{n \geq 0}$ et $(B_n(r))_{n \geq 0}$ par :

$$A_0(r) = 1 \text{ , } B_0(r) = 0 \text{ , } A_1(r) = -\frac{2}{r}(1+r^2) \text{ , } B_1(r) = 1$$

et les relations de récurrence, valables pour $n \geq 2$:

$$A_n(r) = \frac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)} A_{n-1}(r) - \left(\frac{2n+1}{2n-5}\right) A_{n-2}(r)$$

$$B_n(r) = \frac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)} B_{n-1}(r) - \left(\frac{2n+1}{2n-5}\right) B_{n-2}(r)$$

on définit également, pour $n \geq 1$, la matrice $M_n(r)$ par :

$$M_n(r) = \begin{pmatrix} A_n(r) & -\dfrac{2n+3}{2n-3} A_{n-1}(r) \\ B_n(r) & -\dfrac{2n+3}{2n-3} B_{n-1}(r) \end{pmatrix}.$$

Pour alléger la rédaction, les candidats pourront remplacer, chaque fois que cela leur paraîtra utile, les expressions $A_n(r)$, $B_n(r)$, $M_n(r)$, par A_n, B_n, M_n .

Pour $n \geq 1$, déterminer une matrice T_n, dont les coefficients dépendent de n et r, telle que pour toute suite $(a_n)_{n \geq 0}$ appartenant à $\mathscr{S}_r$ on ait :

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Écrire, dans le langage de calcul formel de votre choix, des fonctions prenant en argument l'entier n et retournant a_n, A_n, B_n ; a_0, a_1 et r seront considérés comme des variables globales. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $M_n = M_{n-1} T_n$.

En déduire le produit matriciel $M_n \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ indépendamment de n

III.C - Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle qu'existent une suite (ε_n) tendant vers 0, un réel l, un réel $k \in]0, 1[$ et un entier N vérifiant :

$$\forall n > N, |u_n - l| \leq k|u_{n-1} - l| + \varepsilon_n$$

Montrer que $\lim_{n \to \infty} u_n = l$.

III.D - Prouver que :

$$\lim_{n \to \infty} A_n a_n(f_r) = \frac{a_0(f_r)}{1 - r^2}$$

Que dire de la suite de terme général $B_n a_n(f_r)$ lorsque n tend vers l'infini ?

III.E - Soient a et b deux réels tels que $a > b > 0$. On pose $r = \dfrac{a-b}{a+b}$.

À l'aide des questions II.E et III.D, démontrer que la suite (l_n) définie par :

$$\begin{cases} l_0 = (a+b)\pi(1-r^2)^{3/2} \\ l_1 = l_0(1+r^2) \\ l_n = (1+r^2)l_{n-1} - \dfrac{r^2(2n+1)(2n-3)}{4n(n-1)} l_{n-2} \end{cases}$$ converge vers $L(a, b)$.

Partie IV - Étude de $\mathcal{S}_r$ et de $\mathcal{B}_r$

IV.A - Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ un élément de $\mathcal{S}_r$. Prouver l'égalité :

$$a_1 A_n - a_0 B_n = a_{n+1} \det M_n$$

IV.B - Calculer $\det T_n$ puis $\det M_n$. Donner un équivalent de $\det M_n$.

IV.C - Préciser la dimension et une base de $\mathcal{B}_r$. Soit (a_n) un élément de $\mathcal{S}_r$ qui n'appartient pas à $\mathcal{B}_r$. Déterminer un équivalent simple de a_n lorsque $n \to \infty$.

••• FIN •••

Première composition – Centrale-Supélec 2006 - MP

PARTIE I - Préliminaires

I.A - Soit φ l'application du plan euclidien dans lui-même qui à (x, y) associe $(x, bxy/a)$. Le cercle de centre O et de rayon a admet un paramétrage par l'angle au centre et l'image de ce cercle est $(E_{a,b})$, le point de paramètre t de $(E_{a,b})$ correspondant au point du cercle de paramètre t.

I.B - Soit φ l'application qui à une suite (a_n) associe la suite (b_n) définie, pour n dans $\mathbf{N}^*$, par $b_{n-1} = r(2n+3)a_{n+1} - (1+r^2)2na_n + r(2n-3)a_{n-1}$. Alors φ est un endomorphisme du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ des suites à valeurs complexes et $\mathscr{S}_r$ en est le noyau. Il en résulte que $\boxed{\mathscr{S}_r \text{ est un } \mathbf{C}\text{-espace vectoriel.}}$

De plus l'application de $\mathscr{S}_r$ dans $\mathbf{C}^2$ qui à (a_n) associe (a_0, a_1) est linéaire, puisque restriction d'une projection linéaire, et bijective puisqu'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 est uniquement déterminée par ses deux premiers termes. Il s'ensuit $\boxed{\dim(\mathscr{S}_r) = 2.}$

Puisqu'une combinaison linéaire de deux séries entières admet un rayon de convergence au moins égal au plus petit des rayons des deux séries entières considérées, l'ensemble des séries entières de rayon de convergence au moins égal à 1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. Comme $\mathscr{B}_r$ est l'intersection de ce sous-espace avec $\mathscr{S}_r$, $\boxed{\mathscr{B}_r \text{ est un } \mathbf{C}\text{-espace vectoriel.}}$

I.C - Le théorème de Parseval énonce $\boxed{\|f\|_2^2 = \langle f \mid f\rangle = |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|\Big).}$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le théorème de Parseval, pour k dans $\mathbf{N}$, on a

$$\sum_{n=-k}^{n}\left|\overline{c_n(f)}c_n(g)\right| \leq \sqrt{\sum_{k=-n}^{n}|c_n(f)|^2}\sqrt{\sum_{k=-n}^{n}|c_n(g)|^2} \leq \|f\|_2 \times \|g\|_2$$

et donc, par inégalité triangulaire et puisqu'une série à termes positifs converge si et seulement si elle est bornée, la série de terme initial $\overline{c_0(f)}c_0(g)$ et de terme général $\overline{c_n(f)}c_n(g) + \overline{c_{-n}(f)}c_{-n}(g)$, pour $n \geq 1$, est absolument convergente. A fortiori

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1}\Big(\overline{c_n(f)}c_n(g) + \overline{c_{-n}(f)}c_{-n}(g)\Big) \text{ est absolument convergente.}}$$

Par polarisation, la série précédemment considérée s'écrit comme une combinaison linéaire des séries correspondant à $\zeta f + g$, avec ζ une racine quatrième de l'unité. Plus précisément on a, en notant $\mathbf{U}_4$ le groupe des racines quatrième de l'unité,

$$\langle f \mid g\rangle = \frac{1}{4}\sum_{\zeta\in\mathbf{U}_4}\zeta\,\|\zeta f + g\|^2$$

et donc, d'après la même identité dans $\mathbf{C}$ appliquée à chaque terme de la série et par convergence de toutes les séries intervenant,

$$\boxed{\langle f \mid g\rangle = \overline{c_0(f)}c_0(g) + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\overline{c_n(f)}c_n(g) + \overline{c_{-n}(f)}c_{-n}(g)\Big).}$$

I.D - Puisque la conjugaison complexe ne modifie pas le module, f_r est une fonction paire. Puisqu'elle est à valeurs réelles et vu la définition choisie des coefficients de Fourier (en particulier a_0), il en résulte que, pour n dans $\mathbf{N}$, on a

$$a_n(f_r) = c_n(f_r) + c_{-n}(f_r) = c_n(f_r) + \overline{c_n(f_r)} = 2\,\mathrm{Re}(c_n(f_r))$$

i.e. $\boxed{a_n(f_r) = 2\,\mathrm{Re}(c_n(f_r)).}$

I.E - On a, par définition, $f_r = \sqrt{1 - 2r\cos + r^2}$ et donc

$$f_r = \frac{\sqrt{(a+b)^2 - 2(a^2-b^2)\cos + (a-b)^2}}{a+b} = \frac{\sqrt{2a^2(1-\cos) + 2b^2(1+\cos)}}{a+b}$$

et donc, par parité de f_r puis changement de variable linéaire bijectif,

$$\begin{aligned} a_0(f_r) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_r(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi(a+b)}\int_0^{\pi}\sqrt{4a^2\sin^2(t/2) + 4b^2\cos^2(t/2)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{8}{\pi(a+b)}\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t\ . \end{aligned}$$

Par ailleurs, en notant $(x(t), y(t))$ le paramétrage $(a\cos(t), b\sin(t))$ de $(E_{a,b})$, on a par symétrie et par définition

$$L(a,b) = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi(a+b)}{2}a_0(f_r)$$

et donc $\boxed{\dfrac{L(a,b)}{a_0(f_r)} = \dfrac{\pi(a+b)}{2}.}$

PARTIE II - Comportement asymptotique de la suite $(a_n(f_r))$

II.A - Soit n dans $\mathbf{N}$, en tant que quotient de nombres entiers relatifs non nuls, α_n est défini et est non nul. De plus

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2}\,\frac{2n-1}{2n+1} = \frac{2n-1}{2n+2}$$

et donc la limite de ce quotient existe et on a $\lim\left|\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = 1$. La règle de d'Alembert permet donc de conclure que le rayon de convergence de $\sum \alpha_n z^n$ est $\boxed{1.}$

II.B - Par convergence normale sur tout segment inclus dans $]-1,1[$, f' est somme de la série entière dérivée de celle définissant f sur $]-1,1[$. Il en résulte

$$(1-x)f'(x) = (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n x^{n-1} = \alpha_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)\alpha_{n+1} - n\alpha_n\right)x^n$$

puisqu'on a affaire à une combinaison linéaire de séries absolument convergentes. Or, d'après le calcul précédent, pour n dans $\mathbf{N}$, $(n+1)\alpha_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2}\alpha_n$ et donc

$$(1-x)f'(x) = \alpha_1 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n x^n = \alpha_1 - \frac{1}{2}(f(x)-\alpha_0)\ .$$

Comme $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_1 = -\dfrac{1}{2}$, il vient $\boxed{2(1-x)f'(x)+f(x)=0.}$ L'équation précédente se récrit, puisque $1-x$ est strictement positif, $(1-x)^{-1/2}f'(x) - \dfrac{1}{2}(1-x)^{-3/2}f(x) = 0$ et la fonction $x \mapsto (1-x)^{-1/2}f(x)$ est nécessairement constante. Comme sa valeur en 0 est α_0, i.e. 1, il vient $f(x) = \sqrt{1-x}$. Comme cette fonction est bien de classe C^1 sur $]-1,1[$, un calcul direct montre qu'elle est l'unique solution de l'équation différentielle $2(1-x)y'+y=0$ sur $]-1,1[$ et valant 1 en 0 et donc $\boxed{f(x)=\sqrt{1-x}.}$

II.C - Pour x réel, la question précédente montre qu'on a $f(x)^2 = 1-x$. Comme f est développable en série entière sur le disque ouvert centré en 0 et de rayon 1, il en va de même pour son carré en tant que produit de Cauchy. Ses coefficients sont donnés le développement en série de Taylor de sa restriction à $]-1,1[$, i.e. par ceux de $x \mapsto 1-x$. On en déduit qu'on a $\boxed{f(z)^2 = 1-z.}$

II.D - Pour r dans $]0,1[$ et t dans $\mathbf{R}$, on a $|re^{it}| = r < 1$ et donc, d'après ce qui précède, $f(re^{it})^2 = 1-re^{it}$. En prenant les modules il vient $\boxed{\left|f(re^{it})\right|^2 = f_r(t).}$

II.E - Pour r dans $]0,1[$, la série $\sum \alpha_m r^m$ est absolument convergente puisque $r < R$ et donc la série de fonction $\sum \alpha_m r^m e_m$, où $e_m(t) = e^{imt}$ pour t réel, est normalement convergente et égale à son développement en série de Fourier (par exemple parce que la série est normalement convergente, ce qui permet d'échanger somme et intégrale). On note F la somme de cette série, de sorte qu'on a $f_r = |F|^2$. Comme F est la somme d'une série normalement convergente, elle est continue et donc $F \in \mathscr{C}_{2\pi}$. Pour n dans $\mathbf{N}$, $e_n F$ est également continu et 2π-périodique et il vient

$$c_n(f_r) = \langle e_n \mid f_r\rangle = \langle e_n F \mid F\rangle\ .$$

Or les coefficients de Fourier de F sont donnés par $c_k(F) = \alpha_k r^k$ si $k \in \mathbf{N}$ et $c_k(F) = 0$ sinon. Et, par translation, on a $c_k(e_n F) = c_{k-n}(F)$ pour k dans $\mathbf{Z}$. D'après I.C, on en déduit, par non nullité de α_n,

$$c_n(f_r) = \sum_{k=n}^{+\infty} \alpha_{k-n} r^{k-n} \alpha_k r^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \alpha_{k+n} r^{2k+n} = \alpha_n r^n \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{\alpha_k \alpha_{k+n}}{\alpha_n} r^{2k}\, \mathrm{d}x\ .$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{\alpha_{[x]}\alpha_{[x]+n}}{\alpha_n} r^{2[x]}$ est une fonction continue par morceaux sur $\mathbf{R}_+$ et de signe constant sur $[1,+\infty]$. Il en résulte qu'elle est localement intégrable sur $\mathbf{R}$ et qu'elle y est intégrable si et seulement si son intégrale sur $[0,N]$ admet une limite quand N tend vers l'infini ou encore, en utilisant la relation de Chasles, si et seulement si la série précédente converge. Comme c'est le cas il vient, par division par $\alpha_n r^n$ qui est non nul,

$$\boxed{\frac{c_n(f_r)}{\alpha_n r^n} = \int_0^{+\infty} \alpha_{[x]} \frac{\alpha_{[x]+n}}{\alpha_n} r^{2[x]} \, \mathrm{d}x \; .}$$

On note φ_n la fonction $x \mapsto \alpha_{[x]} \dfrac{\alpha_{[x]+n}}{\alpha_n} r^{2[x]}$ définie sur $\mathbf{R}$. Pour x réel, on a

$$\frac{\alpha_{[x]+n}}{\alpha_n} = \prod_{k=1}^{[x]} \frac{\alpha_{n+k}}{\alpha_{n+k-1}}$$

avec la convention que le produit sur le vide vaut 1. D'après les calculs effectués en II.A, chacun des termes de ce produit est, en valeur absolue, inférieur à 1 et donc il en va de même pour le produit. De plus chacun des termes tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini, d'après ces mêmes calculs, et il en va donc de même pour le produit. La suite (φ_n) est donc une suite de fonctions continues par morceaux, toutes dominées (en valeur) absolue par $x \mapsto \left|\alpha_{[x]}\right| r^{2[x]}$ qui est une fonction continue par morceaux et positive. Cette dernière est donc localement intégrable sur $\mathbf{R}$ et y est intégrable si et seulement si son intégrale sur $[0, N]$ a une limite quand N tend vers l'infini, i.e. si et seulement si la série $\sum |\alpha_n| r^{2n}$ est convergente. Comme la série définissant $f(r^2)$ est absolument convergente, cette dernière condition est vérifiée. Il résulte alors du théorème de convergence dominée qu'on a

$$\lim \frac{c_n(f_r)}{\alpha_n r^n} = \int_0^{+\infty} \alpha_{[x]} r^{2[x]} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^{2n} = f(r^2) \, ,$$

i.e., d'après II.B $\boxed{\lim \dfrac{c_n(f_r)}{\alpha_n r^n} = \sqrt{1-r^2}.}$

II.F - D'après la formule de Stirling, on a $\alpha_n \sim -\dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}(e^n)^2}{2\pi n (n^n)^2 e^{2n}} \dfrac{1}{4^n} \dfrac{1}{2n}$, i.e. $\alpha_n \sim -\dfrac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}}$. Par linéarité de la limite et de la partie réelle, il résulte de I.D qu'on a $\lim \dfrac{a_n(f_r)}{\alpha_n r^n} = 2\sqrt{1-r^2}$ et donc $\boxed{a_n(f_r) \sim -\dfrac{r^n \sqrt{1-r^2}}{\sqrt{\pi} n^{3/2}}.}$

Remarque : il y a une erreur de signe dans l'énoncé.

Comme f_r est continue, ses coefficients de Fourier forment une série de carré intégrable, ce qui est le cas ici. De plus comme f_r est en fait de classe C^∞, ses coefficients de Fourier sont dans $O(n^{-k})$ pour entier naturel k. C'est le cas ici puisque, par comparaison entre suite géométrique et puissances, $\boxed{a_n(f_r) \text{ tend vers 0 plus vite que toute puissance négative de } n.}$

PARTIE III - Approximation de $L(a, b)$

III.A - Puisque f_r est de classe C^1 et positive, tout comme f_r^2, on peut écrire $\ln(f_r) = \dfrac{1}{2} \ln(f_r^2)$ et donc, par dérivation, $\dfrac{f_r'}{f_r} = \dfrac{1}{2} \dfrac{2r \sin}{1 - 2r\cos + r^2}$ et il en résulte que f_r est solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre (à coefficients non constants)

$\boxed{(1+r^2-2r\cos)y' - r\sin y = 0.}$

On en déduit, en notant e_k l'application $t \mapsto e^{ikt}$,

$$r(e_1 - e_{-1})f_r = 2i(1+r^2)f_r' - 2ir(e_1 + e_{-1})f_r'$$

et donc, pour tout n dans $\mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}
rc_{n-1}(f) - rc_{n+1}(f_r) &= c_n(r(e_1 - e_{-1})f_r) \\
&= 2i(1+r^2)inc_n(f_r) - 2ir(c_{n-1}(f_r') + c_{n+1}(f_r')) \\
&= -2n(1+r^2)c_n(f_r) - 2ir(i(n-1)c_{n-1}(f_r) + i(n+1)c_{n+1}(f_r'))
\end{aligned}$$

et donc $r(2n+3)c_{n+1}(f_r) - (1+r^2)2nc_n(f_r) + r(2n-3)c_{n-1}(f_r) = 0$. En prenant la partie réelle de cette expression et en multipliant par 2, on en déduit que $(a_n(f_r))$ appartient à $\mathscr{S}_r$. D'après II.F, on a également $a_n(f_r) = O(r^n)$ et donc la série entière de terme général $a_n(f_r)$ a un rayon de convergence au moins égal à $1/r$ d'après le lemme d'Abel, et en particulier supérieur à 1. Il en résulte $\boxed{(a_n(f_r)) \in \mathscr{B}_r.}$

III.B - Pour $n \geq 1$, on pose $\boxed{T_n = \begin{pmatrix} \dfrac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)} & -\dfrac{2n+3}{2n-3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$ Alors toute suite (a_n) appartenant à $\mathscr{S}_r$ vérifie $\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ par construction.

En Maple, on peut l'écrire

```
a := proc (u := a0, v := a1, n)
 local k, x, y, z;
 x := u; y := v;
 for k from 1 to n-1 do
  z := x; x := y; # x=a[k] et z=a[k-1]
  y := 2*k*(1+r^2)*x/(r*(2*k+3))-(2*k-3)*z/(2*k+3) ; # y=a[k+1]
 od
end ;

A := proc (n)
  a(1,-2*(1+r^2)/r,n) ;
end ;

B := proc (n)
  a(0,1,n) ;
end ;
```

Alors $\boxed{\text{a, A et B renvoient respectivement } a_n(r),\ A_n(r) \text{ et } B_n(r) \text{ étant donné } n.}$

Par définition, pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
M_{n-1}T_n &= \begin{pmatrix} A_{n-1} & -\dfrac{2n+1}{2n-5}A_{n-2} \\ B_{n-1} & -\dfrac{2n+1}{2n-5}B_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)} & -\dfrac{2n+3}{2n-3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)}A_{n-1} - \dfrac{2n+1}{2n-5}A_{n-2} & -\dfrac{2n+3}{2n-3}A_{n-1} \\ \dfrac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)}B_{n-1} - \dfrac{2n+1}{2n-5}B_{n-2} & -\dfrac{2n+3}{2n-3}B_{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et donc $\boxed{M_n = M_{n-1}T_n.}$

Par produit télescopique, on a donc, pour n dans $\mathbf{N}^*$,

$$M_n \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = T_1T_2\cdots T_n \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = T_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

et donc $\boxed{M_n \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}.}$

III.C - Soit ℓ dans $\mathbf{R}$, k dans $]0,1[$, N dans $\mathbf{N}$, (ε_n) une suite réelle tendant vers 0 et (u_n) une suite réelle tels que, pour n dans $\mathbf{N}$ avec $n > N$, on ait $|u_n - \ell| \leq k\,|u_{n-1} - \ell| + \varepsilon_n$.

Puisque (ε_n) tend vers 0, elle est bornée. On dispose donc de M tel que, pour tout entier naturel n, $|\varepsilon_n| \leq M$. Soit $M' = \max(|u_N - \ell|\,, M/(1-k))$, ce qui est licite puisque $0 < k < 1$. Alors, pour $n > N$, si $|u_{n-1} - \ell| \leq M'$, on a

$$|u_n - \ell| \leq kM' + M \leq kM' + (1-k)M' = M'$$

et donc, puisque $|u_N - \ell| \leq M'$ par construction, le principe de récurrence permet de conclure qu'on a : $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq M'$. Il en résulte que la suite $(|u_n - \ell|)$ est bornée à partir d'un certain rang, donc bornée.

On peut donc considérer la suite $(\sup_{m\geq n} |u_m - \ell|)_{n\geq N}$. C'est une suite décroissante et positive par construction. Elle converge donc et soit α sa limite. Pour $n > N$ et p dans $\mathbf{N}$ il vient

$$|u_{n+p} - \ell| \leq k\,|u_{n-1+p} - \ell| + \varepsilon_{n+p} \leq k \sup_{m\geq n-1} |u_m - \ell| + \sup_{m\geq n} |\varepsilon_m|$$

et donc, par passage au supremum,

$$\sup_{m\geq n} |u_m - \ell| \leq k \sup_{m\geq n-1} |u_m - \ell| + \sup_{m\geq n} |\varepsilon_m| \ .$$

Comme (ε_n) tend vers 0, il en va de même pour $(\sup_{m\geq n} |\varepsilon_m|)$ et on peut alors passer à la limite dans l'inégalité précédente. Il vient $\alpha \leq k\alpha$ et donc $\alpha = 0$ puisque $0 < k < 1$ et $\alpha \geq 0$. Par conséquent $(|u_m - \ell|)_{n\geq N}$ tend vers 0 aussi, i.e. $\boxed{\lim u_n = \ell.}$

III.D - Pour n dans $\mathbf{N}^*$, d'après III.B appliqué à la suite $(a_n(f_r))$, on a

$$\begin{pmatrix} a_0(f_r) \\ a_1(f_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & -\frac{2n+3}{2n-3}A_{n-1} \\ B_n & -\frac{2n+3}{2n-3}B_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n(f_r) \\ a_{n+1}(f_r) \end{pmatrix}$$

et donc, en posant $u_n = A_n(r)a_n(f_r)$, il vient $a_0(f_r) = u_n - \frac{2n+3}{2n-3}\frac{a_{n+1}(f_r)}{a_{n-1}(f_r)}u_{n-1}$ et donc, d'après II.F, $a_0(f_r) = u_n - r^2 u_{n-1} + o(u_{n-1})$, de sorte qu'on a

$$\left| u_n - \frac{a_0(f_r)}{1-r^2} \right| = \left| r^2 \left(u_{n-1} - \frac{a_0(f_r)}{1-r^2} \right) + o(u_{n-1}) \right| \leq r^2 \left| u_{n-1} - \frac{a_0(f_r)}{1-r^2} \right| + o(u_{n-1}) \,.$$

Or

$$o(u_{n-1}) = o\left(u_{n-1} - \frac{a_0(f_r)}{1-r^2} \right) + o\left(\frac{a_0(f_r)}{1-r^2} \right) = o\left(\left| u_{n-1} - \frac{a_0(f_r}{1-r^2} \right| \right) + o(1) \,,$$

d'où

$$\left| u_n - \frac{a_0(f_r)}{1-r^2} \right| \leq (r^2 + o(1)) \left| u_{n-1} - \frac{a_0(f_r)}{1-r^2} \right| + o(1)$$

et donc, puisque $0 < r^2 < 1$, on dispose de N dans $\mathbf{N}$ et de k dans $]r^2, 1[$ tels que, pour $n > N$,

$$\left| u_n - \frac{a_0(f_r)}{1-r^2} \right| \leq k \left| u_{n-1} - \frac{a_0(f_r)}{1-r^2} \right| + o(1) \,,$$

ce qui permet de conclure, grâce à la question précédente, $\boxed{\lim A_n(r)a_n(f_r) = \frac{a_0(f_r)}{1-r^2}.}$

En exploitant la seconde équation fournie par III.B, les calculs précédents donnent, mutatis mutandis, en posant $v_n = B_n(r)a_n(f_r)$,

$$\left| v_n - \frac{a_1(f_r)}{1-r^2} \right| \leq k \left| v_{n-1} - \frac{a_1(f_r)}{1-r^2} \right| + o(1) \,,$$

et donc $\boxed{\lim B_n(r)a_n(f_r) = \frac{a_1(f_r)}{1-r^2}.}$

III.E - On a $\ell_1 = A_1\alpha_1 r\ell_0$ puisque $A_1 = -\frac{2}{r}(1-r^2)$ et $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$. On en déduit que les suites (ℓ_n) et $(A_n\alpha_n r^n\ell_0)$ coïncident sur leurs deux premiers termes. Or, pour $n \geq 2$, on a, par définition de $A_n(r)$ et le calcul effectué en II.A,

$$\begin{aligned} A_n\alpha_n r^n &= \frac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)}\frac{2n-3}{2n}rA_{n-1}\alpha_{n-1}r^{n-1} - \frac{2n+1}{2n-5}\frac{2n-3}{2n}\frac{2n-5}{2n-2}r^2A_{n-2}\alpha_{n-2}r^{n-2} \\ &= (1+r^2)A_{n-1}\alpha_{n-1}r^{n-1} - \frac{r^2(2n+1)(2n-3)}{4n(n-1)}A_{n-2}\alpha_{n-2}r^{n-2} \end{aligned}$$

et donc les deux suites (ℓ_n) et $(A_n\alpha_n r^n\ell_0)$ satisfont à la même relation de récurrence. Elles sont donc égales. Or, d'après les calculs effectués en II.E et III.D, on a

$$A_n\alpha_n r^n \sim A_n\frac{a_n(f_r)}{2\sqrt{1-r^2}} \sim \frac{a_0(f_r)}{2(1-r^2)^{3/2}}$$

de sorte que $\lim \ell_n = \dfrac{\pi(a+b)}{2} a_0(f_r)$, i.e. en utilisant I.E, $\boxed{\lim \ell_n = L(a,b).}$

PARTIE IV - Étude de $\mathscr{S}_r$ et de $\mathscr{B}_r$

IV.A - Pour n dans $\mathbf{N}^*$, on a $\begin{pmatrix} A_n & a_0 \\ B_n & a_1 \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & a_{n+1} \end{pmatrix}$ d'après III.B et la définition de M_n. En prenant les déterminants, il vient $\boxed{a_1 A_n - a_0 B_n = a_{n+1} \det(M_n).}$

IV.B - D'après l'expression trouvée en III.B $\boxed{\det(T_n) = \dfrac{2n+3}{2n-3}.}$

Comme, d'après III.B, on a, pour $n \geq 2$, $M_n = M_1 T_2 \cdots T_n$, il vient par produit télescopique

$$\det(M_n) = \begin{vmatrix} -\dfrac{2}{r}(1+r^2) & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \prod_{k=2}^{n} \frac{2k+3}{2k-3} = -\frac{\prod_{k=2}^{n+1}(2k+1)}{\prod_{k=0}^{n-2}(2k+1)} = -\frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{3}$$

et cette formule est encore valide pour $n = 1$. Donc $\boxed{\det(M_n) = -\dfrac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{3}.}$

Et, par conséquent, $\boxed{\det(M_n) \sim -\dfrac{8}{3} n^3.}$

IV.C - D'après III.A la suite $(a_n(f_r))$ appartient à $\mathscr{B}_r$ et elle est non nulle, par exemple grâce à II.F. En particulier cette suite est bornée. De plus, pour tout suite dans $\mathscr{S}_r$, on a d'après ce qui précède,

$$\det(M_n) \times \begin{vmatrix} a_{n+1} & a_0 \\ a_{n+1}(f_r) & a_0(f_r) \end{vmatrix} = A_n \times \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_1(f_r) & a_0(f_r) \end{vmatrix}$$

et donc si (a_n) n'est pas une suite proportionnelle à $(a_n(f_r))$, le déterminant apparaissant au second membre n'est pas nul et il vient

$$a_{n+1} = \frac{A_n \times \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_1(f_r) & a_0(f_r) \end{vmatrix}}{a_0(f_r) \det(M_n)} + a_0 \frac{a_n(f_r)}{a_0(f_r)} \sim -\frac{1}{a_n(f_r)} \frac{1}{1-r^2} \frac{3}{8n^3} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_1(f_r) & a_0(f_r) \end{vmatrix}$$

et donc, d'après le critère de d'Alembert et II.F, la série entière de terme général a_n admet $1/r$ comme rayon de convergence. Puisque $r < 1$, il en résulte que (a_n) n'appartient pas à $\mathscr{B}$. Par conséquent $\boxed{\mathscr{B}_r \text{ admet } (a_n(f_r)) \text{ comme base et est de dimension } 1.}$

De plus pour (a_n) appartenant à $\mathscr{S}_r \setminus \mathscr{B}_r$, le calcul précédent montre qu'on a

$$\boxed{a_n \sim \frac{3\sqrt{\pi} r \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_1(f_r) & a_0(f_r) \end{vmatrix}}{8(1-r^2)^{3/2} n^{3/2} r^n}.}$$