Deuxième composition
Centrale-Supélec 2006 - MP

On note $\mathbf{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à une indéterminée à coefficients réels et, de manière usuelle, tout polynôme est identifié à sa fonction polynomiale associée. Pour tout entier naturel n , $\mathbf{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Pour un P de $\mathbf{R}[X]$, on considère, de manière usuelle, les dérivées successives de P : $P^{(0)} = P$, et, pour tout n de $\mathbf{N}$, $P^{(n+1)} = [P^{(n)}]'$. Pour un polynôme P de $\mathbf{R}[X]$, un entier naturel n et un réel a, on définit le polynôme de Taylor d'ordre n de P en a par :

$$T_{n,a}(P) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^i \ .$$

Soit une fonction f à valeurs réelles définie sur un intervalle de $\mathbf{R}$ et de classe C^n. On rappelle qu'elle admet, en tout point a de cet intervalle, un unique développement limité à l'ordre n :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right) \ .$$

La fonction polynomiale $x \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$ est appelée partie régulière de ce développement limité. Dans la troisième partie, on note $\mathcal{E}_2$ le plan affine euclidien usuel muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et dans la dernière partie, on note $\mathcal{E}_3$ l'espace affine euclidien usuel de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, encore noté $\mathcal{R}_0$, $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Les éléments de $\mathcal{E}_2$ et$\mathcal{E}_3$ seront indifféremment appelés vecteurs ou points selon l'interprétation que l'on en a.

Si M est barycentre du système pondéré $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i \leq n}$ avec $\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ non nul, on a : $M = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Ai$. Chaque point M de $\mathcal{E}_2$ (ou de $\mathcal{E}_3$) est identifié à la famille de ses coordonnées (x, y) (ou (x, y, z)) dans le repère $\mathcal{R}_0$, ce qui est contenu dans la notation $M(x, y)$ (ou $M(x, y, z)$). De même chaque vecteur u est identifié à la famille de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_0$ du repère $\mathcal{R}_0$. Dans la première partie, on étudie une famille de polynômes. Ces polynômes interviennent ensuite dans les trois parties qui suivent dans trois situations différentes. Si la troisième partie utilise un résultat de la deuxième, pour le reste les trois dernières parties sont indépendantes les unes des autres.

PARTIE I - Une fonction polynomiale

Un calcul simple qui n'est pas demandé ici (intégrations par parties successives par exemple) donne pour tout m de $\mathbf{N}$: $I_m = \displaystyle\int_0^1 t^m(1-t)^m \,\mathrm{d}t = \frac{(m!)^2}{(2m+1)!}$. Pour tout m entier naturel non nul, on considère la fonction polynomiale L_m définie sur $\mathbf{R}$ par

$$L_m(x) = \frac{1}{I_m}\int_0^x t^m(1-t)^m \,\mathrm{d}t \ .$$

I.A -

I.A.1) Donner une expression développée de $L_m(x)$ pour $m = 1$ et pour $m = 2$.

I.A.2) Pour x dans $\mathbf{R}$, calculer $L_m(x) + L_m(1-x)$. Préciser $L_m(\frac{1}{2})$.

On vérifie que L_m est à coefficients entiers. Nous l'admettrons.

I.B -

I.B.1) Étudier suivant m l'existence ainsi que l'ordre de multiplicité des éventuelles racines de L_m et de L'_m dans l'intervalle $[0; 1]$.

I.B.2) En considérant le signe de L''_m, étudier la monotonie de l'application $x \mapsto \dfrac{L_m(x)}{x}$ sur l'intervalle $]0; \frac{1}{2}[$.

I.B.3) Donner une allure de la courbe représentative de L_m sur $[0;1]$. On précisera les points à tangente horizontale, on montrera l'existence d'un centre de symétrie et on précisera la convexité.

I.C - Les résultats de cette question seront utilisés dans la dernière partie.

I.C.1) Résoudre le système : $(x,y) \in [0;1]^2$ et $L'_m(x) = L'_m(y)$.

I.C.2) Résoudre le système : $(\alpha, \beta, \gamma) \in [0;1]^3$ $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et $L'_m(\alpha) = L'_m(\beta) = L'_m(\gamma)$.

I.C.3) Résoudre le système : $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in [0;1]^4$ $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$ et $L'_m(\alpha_1) = L'_m(\alpha_2) = L'_m(\alpha_3) = L'_m(\alpha_4)$.

PARTIE II - Les polynômes de Taylor

Dans cette partie, m est un entier naturel non nul et n est un entier tel que $n > 3m$.

II.A - On rappelle et on admet que, pour tout a de $\mathbf{R}$, la famille $((X-a)^p)_{p \in \mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{R}[X]$. Vérifier que l'application $P \mapsto T_{n,a}(P)$ définit un projecteur de $\mathbf{R}[X]$. Préciser son image, vérifier que son noyau est un idéal de $\mathbf{R}[X]$ et en donner un générateur.

II.B - Pour (R,S) dans $(\mathbf{R}_m[X])^2$, on pose

$$U = R(X)L_m(1-X) + S(X)L_m(X) .$$

Déterminer les polynômes de Taylor d'ordre m en 0 et et 1 du polynôme U.

II.C - Pour P dans $\mathbf{R}_n[X]$, on note respectivement P_0 et P_1 ses polynômes de Taylor d'ordre m en 0 et en 1 et on pose : $\Phi(P) = P_0(X)L_m(1-X) + P_1(X)L_m(X)$.

II.C.1) Montrer que l'application $P \mapsto \Phi(P)$ est un projecteur de $\mathbf{R}_n[X]$.

II.C.2) Préciser les dimensions des sous-espaces propres de cette application et donner pour chacun une base.

PARTIE III - Un raccord

III.A -

III.A.1) À l'aide de la première partie, déterminer un polynôme Q_1 tel que :

$$\deg(Q_1) \leq 3\,,\ Q_1(-1) = 0\,,\ Q_1(1) = 1 \text{ et } Q'_1(-1) = Q'_1(1) = 0\,.$$

Existe-t-il d'autres polynômes remplissant ces cinq conditions ?

III.A.2) Déterminer de même, sans en donner la forme développée, un polynôme Q_2 tel que :

$$\deg(Q_2) \leq 5\,,\ Q_2(-1) = 0\,, Q_2(1) = 1 \text{ et } Q'_2(-1) = Q'_2(1) = Q''_2(-1) = Q''_2(1) = 0\,.$$

III.B - Soit $g_1 : t \mapsto (x_1(t), y_1(t))$ de classe C^1 sur $]-\infty;-1]$, paramétrage d'un arc γ_1 et $g_2 : t \mapsto (x_2(t), y_2(t))$ de classe C^1 sur $[1;+\infty[$, paramétrage d'un arc γ_2. Si h_1 (resp. k_1) est la partie régulière du développement limité à l'ordre 1 de x_1 (resp. y_1) en -1 et h_2 (resp. k_2) la partie régulière du développement limité à l'ordre 1 de x_2 (resp. y_2) en 1 , on pose : $x_3(t) = Q_1(-t)h_1(t) + Q_1(t)h_2(t)$ et $y_3(t) = Q_1(-t)k_1(t) + Q_1(t)k_2(t)$. On obtient ainsi une fonction vectorielle $g_3 = (x_3, y_3)$ et on considère γ, raccord de γ_1 et γ_2, l'arc paramétré par g dont la restriction à $]-\infty;-1[$, $[-1;1]$ et $]1;+\infty[$ coïncide respectivement avec g_1, g_3 et g_2. Montrer brièvement en s'appuyant sur une étude faite dans la deuxième partie que g est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

III.C - Étude d'un exemple. Ici a est un réel strictement positif et on prend :

$$g_1(t) = (-1 + a(t+1), 1 - a(t+1)) \qquad g_2(t) = (1 + a(t-1), 1 + a(t-1))\,.$$

III.C.1) Représenter sur un même dessin les arcs γ_1 et γ_2.

III.C.2) Donner l'expression développée de la fonction g_3 (on ne demande pas sa représentation graphique).

III.C.3) Montrer que pour $a > 3$, le raccord coupe l'axe des ordonnées en deux points distincts que l'on précisera.

PARTIE IV - Une animation

On note $I = \{1, 2, 3, 4\}$. On considère un ensemble de quatre points $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ de $\mathcal{E}_3$ non coplanaires, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de plan affine qui les contienne tous les quatre. On a ainsi un tétraèdre non aplati $A_1A_2A_3A_4$. On note (x_i, y_i, z_i) le triplet des coordonnées du point A_i pour i dans I.

IV.A -

IV.A.1) Soit i dans I. Justifier l'existence d'un (u_i, v_i, w_i, h_i) de $\mathbf{R}^4$ avec $(u_i, v_i, w_i) \neq (0, 0, 0)$ tel que si l'on pose pour $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}_3$, $g_i(M) = u_i x + v_i y + w_i z + h_i$, on ait : $\forall j \in I$, $g_i(A_j) = \delta_{i,j}$ (où de manière usuelle, $\delta_{i,j}$ vaut 1 si $i = j$ et vaut 0 sinon). On admet l'unicité du quadruplet (u_i, v_i, w_i, h_i) pour tout i dans I.

IV.A.2) Pour i dans I on considère φ_i la forme linéaire de $\mathbf{R}^3$ définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $\varphi_i(x, y, z) = u_i x + v_i y + w_i z$. Quel est le rang de la famille $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq 4}$?

Soit $m \in \mathbf{N}^*$. Pour tout i dans I et tout $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}_3$, on pose : $G_i(M) = L_m(g_i(M))$.

On considère alors $g = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} g_i$ et $G = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} G_i$. On appelle Ω l'isobarycentre de $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. On note $\Delta = \{M(x, y, z) \in \mathcal{E}_3 \,|\, \forall i \in I\,,\ 0 \leq g_i(M) \leq 1\}$.

IV.B -

IV.B.1) Préciser $g(A_i)$ pour i dans I et en déduire g.

IV.B.2) Vérifier que tout point M de $\mathcal{E}_3$ est le barycentre du système pondéré $(A_i, g_i(M))_{1 \leq i \leq 4}$.

IV.B.3) Déterminer α de $\mathbf{R}$ tel que pour tout point M de toute arête $[A_i, A_j]$ avec $(i, j) \in I^2$, $i \neq j$ on ait $G(M) = \alpha$.

IV.C -

IV.C.1) Montrer que Δ est un compact de $\mathcal{E}_3$.

IV.C.2) Montrer que sur chaque face du tétraèdre, G admet un maximum et un minimum. On précisera la valeur de ces extrema, ainsi que les points où ils sont atteints. On pourra partir du fait que le compact triangulaire limité par trois points non alignés d'un plan est l'ensemble des barycentres à poids positifs des sommets du triangle et que l'on peut toujours supposer que la somme des poids est égale à 1 .

IV.C.3) Calculer $G(\Omega)$ et déterminer la différentielle de G en Ω.

IV.C.4) Déterminer les points M de Δ en lesquels la différentielle de G est nulle. On pourra montrer que la nullité de la différentielle de G en un point M implique une relation linéaire portant sur les φ_i et on utilisera dans ce cas le résultat de IV.A.2).

IV.C.5) Montrer que la fonction G admet sur Δ un maximum et un minimum et déterminer ces extrema G_{min} et G_{max} de G sur Δ ainsi que les points où ils sont atteints.

IV.D - On prend $A_1(1, -1, -1)$, $A_2(-1, 1, -1)$, $A_3(-1, -1, 1)$ et $A_4(1, 1, 1)$. Pour $m = 1$, on obtient, après un calcul qui n'est pas demandé : $G(x, y, z) = \dfrac{1}{8}\left[3(x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz) + 5\right]$. On appelle Σ la surface d'équation $G(x, y, z) = 1$. On considère $\overline{B}(O, \sqrt{3})$ la boule fermée de centre O et de rayon $\sqrt{3}$ pour la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^3$ et l'on note $S(O, \sqrt{3})$ sa frontière, la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{3}$. On admet que pour tout point $M(x, y, z)$ de $S(O, \sqrt{3})$, on a $xyz \leq 1$. (Ceci peut se démontrer en utilisant les coordonnées sphériques de M).

IV.D.1) Déterminer les points non réguliers de Σ.

IV.D.2) Montrer que pour tout $P(a, b, c)$ de $S(O, \sqrt{3})$, il existe un et un seul point du segment $[OP]$ qui appartienne à Σ. On pourra étudier la fonction $h(t) = G(ta, tb, tc)$ sur $[0; 1]$.

IV.D.3) Qu'en déduit-on pour l'intersection Σ' de Σ avec $\overline{B}(O, \sqrt{3})$? On précisera les points de contact de cette intersection avec le tétraèdre ainsi qu'avec la sphère $S(O, \sqrt{3})$.

IV.D.4) Préciser les sections de Σ et de $\overline{B}(O, \sqrt{3})$ par le plan médiateur de $[A_3, A_4]$, d'équation $x + y = 0$. Les représenter sur une même figure.

IV.D.5) Décrire l'animation que donne la vue des surfaces de niveau : $S_\alpha = \{M \in \Delta \,|\, G(M) = \alpha\}$ lorsque α varie de G_{min} à G_{max}. On précisera la position de ces surfaces par rapport au tétraèdre.

DEUXIÈME COMPOSITION – CENTRALE-SUPÉLEC 2006 - MP

PARTIE I - Une fonction polynomiale

I.A -

I.A.1) On a admis $I_1 = \dfrac{1}{6}$ et $I_2 = \dfrac{1}{30}$. Il résulte de $X(1-X) = X - X^2$ et $X^2(1-X)^2 = X^2 - 2X^3 + X^4$ qu'on a $\boxed{L_1 = 3X^2 - 2X^3 \text{ et } L_2 = 10X^3 - 15X^4 + 6X^5.}$

I.A.2) Par changement de variable affine dans l'intégrale on a, pour x réel, $L_m(x) = \dfrac{1}{I_m}\displaystyle\int_{1-x}^{1} (1-t)^m t^m \, \mathrm{d}t$ et donc, par relation de CHALES et par définition de I_m, on a $\boxed{L_m(x) + L_m(1-x) = 1.}$ En spécialisant en $x = \frac{1}{2}$, on en déduit $\boxed{L(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.}$

I.B -

I.B.1) D'après le théorème de LEIBNIZ-NEWTON, dit théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, L'_m est la fonction polynomiale associée à $\dfrac{1}{I_m}X^m(1-X)^m$, dont les racines sont 0 et 1. De plus par construction $L_m(0) = 0$ et $L_m(1) = 1$. On en déduit, pour $m \geq 2$,

$\boxed{\text{0 et 1 sont les seules racines de } L'_m\text{, chacune de multiplicité } m}$ et

$\boxed{\text{0 et 1 sont les seules racines de } L'_1 \text{ et elles sont simples.}}$

Comme on a $L_m(0) = 0$ et que par ailleurs comme L'_m ne s'annule pas sur $]0;1[$ et y est continu, L_m y est strictement monotone et n'a donc pas d'autre racine dans $[0;1]$. Par caractérisation des racines multiples $L_m^{(k)}(0) = 0$ pour $1 \leq k \leq m$ et donc, grâce à cette même caractérisation,

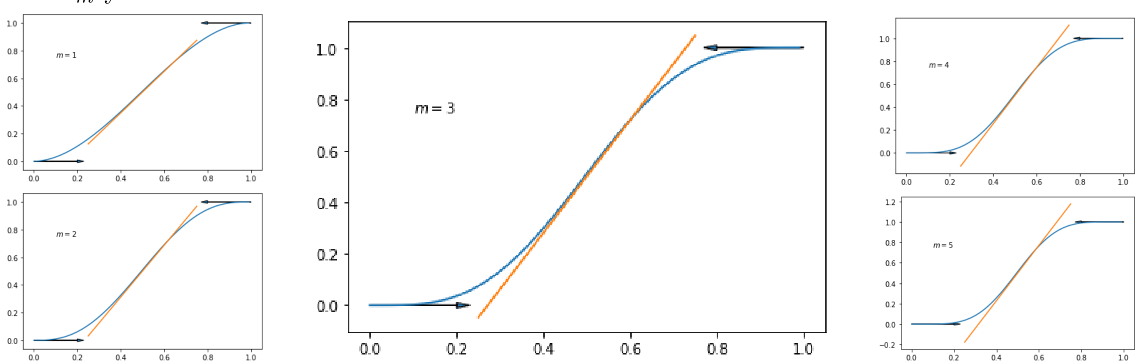
$\boxed{\text{0 est racine d'ordre } m+1 \text{ de } L_m.}$

I.B.2) D'après le calcul précédent, L''_m est la fonction polynomiale associée à $\dfrac{m}{I_m}X^{m-1}(1-X)^{m-1}(1-2X)$ et donc elle est strictement positive sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$. On en déduit que L_m est strictement convexe sur ce même intervalle, donc la fonction pente par rapport à 0 est strictement croissante, i.e.

$\boxed{x \mapsto \frac{L_m(x)}{x} \text{ est strictement croissante sur } \left]0;\tfrac{1}{2}\right[.}$

Remarque : la dérivée de la fonction étudiée est donnée par $\frac{xL'_m(x) - L_m(x)}{x^2}$, donc du même signe que $L'_m(x) - \dfrac{L_m(x)}{x}$. D'après le théorème de LAGRANGE, dit des accroissements finis, cette dernière quantité est égale à $L'_m(x) - L'_m(\xi)$ pour ξ dans $]0;x[$ et donc, par stricte positivité de L''_m donc stricte croissance de L'_m, la dérivée de la fonction étudiée est strictement positive.

I.B.3) D'après la question I.A.2) on a pour x dans $[0;1]$, $L(1-x) = 1 - L(x)$ et donc $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est centre de symétrie du graphe de L_m. Sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ L_m admet une tangente horizontale en 0 uniquement. Enfin L_m y est convexe.



La tangente est horizontale en $(0,0)$ et $(1,1)$. Le graphe est convexe sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ et concave sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

I.C -

I.C.1) Pour x réel on a $L'_m(x) = L'_m(1-x)$ et, en vertu du calcul de L''_m, L'_m est strictement croissant sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ et strictement décroissant sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$. Il en résulte que L'_m est injectif sur ces deux intervalles et ainsi les solutions du système sont exactement les couples (x,y) avec $0 \leq x \leq 1$ et $y \in \{x, 1-x\}$.

I.C.2) D'après la question précédente, sans la condition $\alpha+\beta+\gamma = 1$, le système est équivalent $0 \leq \alpha \leq 1$ et $\{\beta,\gamma\} \subset \{\alpha, 1-\alpha\}$. Pour un tel triplet la somme $\alpha+\beta+\gamma$ appartient donc à $\{3\alpha, 1+\alpha, 2-\alpha\}$, de sorte que les solutions du système sont exactement

les triplets $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ et ceux formés de deux termes nuls et un égal à 1.

I.C.3) D'après la question I.C.1), un quadruplet vérifiant le système est soit formé de quatre termes identiques, soit en contient deux dont la somme est 1. Dans le premier cas ce terme est nécessairement $\frac{1}{4}$. Dans le second les deux autres termes sont alors nuls et ainsi les deux premiers valent 0 et 1. La réciproque étant directe, les solutions du système sont exactement

les quadruplets $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ et ceux formés de trois termes nuls et un égal à 1.

PARTIE II - Les polynômes de TAYLOR

II.A -

Par linéarité de la dérivation et de l'évaluation en a, l'application $T_{n,a}$ est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$. Puisque la formule de TAYLOR est exacte pour les polynômes, pour P dans $\mathbf{R}_n[X]$ on a $T_{n,a}(P) = P$. En particulier $T_{n,a}$ est à valeurs dans $\mathbf{R}_n[X]$ et sa restriction y est l'identité, donc $T_{n,a} \circ T_{n,a} = T_{n,a}$ et $\mathbf{R}_n[X] \subset \mathrm{Im}(T_{n,a}) \subset \mathbf{R}_n[X]$. Il en résulte que $T_{n,a}$ est un projecteur sur $\mathbf{R}_n[X]$. Son noyau est formé des polynômes dont toutes les dérivées en a sont nulles jusqu'à l'ordre n et donc dont a est racine de multiplicité au moins $n+1$, i.e. qui sont multiples de $(X-a)^{n+1}$:

le noyau de $T_{n,a}$ est l'idéal (principal) engendré par $(X-a)^{n+1}$.

II.B -

D'après la question I.A.2) on a $L_m(1-X) = 1 - L_m$, par identité des fonctions polynomiales associées sur un intervalle non trivial. Ainsi $U = R + (S-R)L_m$. D'après la question I.B.1) 0 est racine d'ordre $m+1$ de L_m et donc $(S-R)L_m$ est dans le noyau de $T_{m,0}$. Ainsi, puisque R est dans l'image du projecteur $T_{m,0}$, l'écriture $U = R + (S-R)L_m$ donne $T_{m,0}(U) = R.$ On a de même $U = S + (R-S)L_m(1-X)$, S dans l'image de $T_{m,1}$ et $L_m(1-X)$ admet 1 comme racine de multiplicité $m+1$, donc $(R-S)L_m(1-X)$ est dans le noyau de $T_{m,1}$, donc $T_{m,1}(U) = S.$

II.C -

II.C.1) Par construction Φ est à valeurs dans $\mathbf{R}_{3m+1}[X]$ puisque, avec les notations de l'énoncé, P_0 et P_1 sont dans $\mathbf{R}_m[X]$ et L_m et $L_m(1-X)$ sont dans $\mathbf{R}_{2m+1}[X]$ puisque L'_m est dans $\mathbf{R}_{2m}[X]$. Comme $n > 3m$, on a aussi $n \geq 3m+1$ et donc Φ est à valeurs dans $\mathbf{R}_n[X]$. Comme $T_{m,a}$ est linéaire ainsi que la multiplication par un polynôme, Φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$. D'après la question précédente, puisque P_0 et P_1 sont dans $\mathbf{R}_m[X]$, $T_{m,a}(\Phi(P)) = P_a$ pour $a \in \{0,1\}$ et donc $\Phi \circ \Phi = \Phi$, i.e. Φ est un projecteur de $\mathbf{R}_n[X]$.

II.C.2) Puisqu'on a affaire à un projeteur ses valeurs propres sont dans $\{0,1\}$. Si P est dans le noyau de Φ, alors $\Phi(P) = 0$ et donc $T_{m,a}(\Phi(P)) = 0$ pour a dans $\{0,1\}$, i.e. $T_{m,a}(P) = 0$ d'après la question II.B. La réciproque étant directe, par définition de Φ, $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est formé des polynômes admettant 0 et 1 comme racines de multiplicités au moins $m+1$, i.e. divisibles par X^{m+1} et $(1-X)^{m+1}$. Puisque X et $1-X$ satisfont la relation de BÉZOUT évidente $X + (1-X) = 1$, ils sont premiers entre eux et donc leurs puissances aussi par lemme de Gauss. On en déduit que le noyau de Ker(Φ) est l'intersection avec $\mathbf{R}_n[X]$ de l'idéal engendré par L'_{m+1}. Un supplémentaire du noyau est donc $\mathbf{R}_{2m+2}[X]$, puisque $m \geq 1$ et donc $2m+2 \leq 3m+1 \leq n$, et, d'après le théorème du rang, Φ induit une bijection de ce supplémentaire sur Im(Φ). Or par construction Im(Φ) est inclus dans l'espace vectoriel engendré les polynômes $X^i L_m(1-X)$ et $X^j L_m$ pour $0 \leq i,j \leq m+1$. Par dimension cette famille est donc une base de Im(Φ). Ainsi $\boxed{\text{l'image est de dimension } 2m+2, \text{ de base } (X^i L_m(1-X), X^j L_m)_{0\leq i,j\leq m}}$ et $\boxed{\text{le noyau est de dimension } n-2m-1, \text{ de base } (X^i L'_{m+1})_{0\leq i \leq n-2m-2}.}$

PARTIE III - Un raccord

III.A -

III.A.1) Les questions I.A.2) et I.B.1) montrent que L_1 vérifie $L_1(1) = 1$, $L_1(0) = L_1'(0) = L_1'(1) = 0$ et est de degré 3. Donc $L_1(\frac{1+X}{2})$ vérifie les conditions de l'énoncé. Si Q est un autre tel polynôme, la différence des deux est dans $\mathbf{R}_3[X]$ et admet 0 et 1 comme racines d'ordre au moins 2, donc est divisible par $x^2(1-X)^2$ et est donc nul, par argument de degré. Ainsi, puisque $L_1 = X^2(3-2X)$ $\boxed{\frac{1}{4}(1+X)^2(2-X) \text{ est l'unique polynôme vérifiant les conditions.}}$

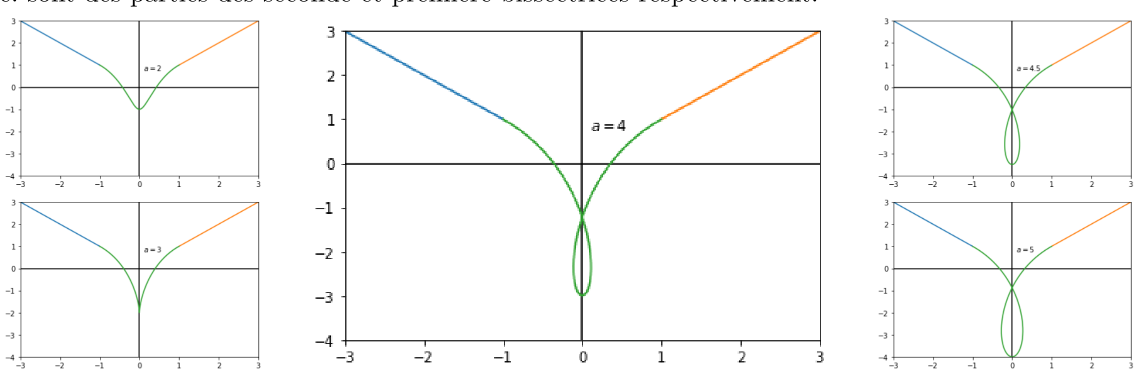
III.A.2) L'argument précédent montre que $L_2(\frac{1+X}{2})$ est un tel polynôme et que la différence entre deux tels polynômes est un polynôme de degré au plus 5 divisible par $X^3(1-X)^3$. Comme $L_2 = X^3(10-15X+6X^2)$, $\boxed{\frac{1}{16}(1+X)^3(8-9X+3X^2) \text{ est l'unique polynôme vérifiant les conditions.}}$

III.B -

Les fonctions x_1, x_2, y_1 et y_2 sont de classe C^1 sur leur domaine de définition respectif, donc h_1, h_2, k_1 et k_2 sont bien définis et polynomiaux, ainsi que Q_1, et ainsi x_3 et y_3 le sont également. Il en résulte que g_1, g_2 et g_3 sont de classe C^1 sur leur domaine de définition et ainsi g l'est sur $\mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}$. De plus g est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ si et seulement si g_3 et g_3' coïncident avec g_1 et g_1' (resp. g_2 et g_2') en 1 (resp. -1). Il revient au même de dire que les parties régulières des développements de Taylor à l'ordre 1 en ces points coïncident. Or x_3 (resp. y_3) est la fonction polynomiale associée à $L_1(\frac{1-X}{2})h_1 + L_1(\frac{1+X}{2})h_2$ (resp. $L_1(\frac{1-X}{2})k_1 + L_1(\frac{1+X}{2})k_2$) ou encore $h_1 + (h_2 - h_1)L_1(\frac{1+X}{2})$. Comme X^2 divise L_1, $(X+1)^2$ divise le deuxième terme et ainsi la partie régulière du développement de Taylor à l'ordre 1 en -1 de x_3 est h_1, i.e. celui de x_1. En échangeant le rôle de h et k, il en va de même pour y_3 et y_1. Comme on a également $x_3 = h_2 + (h_1 - h_2)L_1(\frac{1-X}{2})$, il en va de même en 1 pour x_3 et x_2, ainsi que pour y_3 et y_2. Par conséquent $\boxed{g \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbf{R}.}$

III.C -

III.C.1) Les arcs γ_1 et γ_2 sont les demi-droites issues de $(-1,1)$ (resp. $(1,1)$) et dirigées par $(-1,1)$ (resp. $(1,1)$), i.e. sont des parties des seconde et première bissectrices respectivement.



III.C.2) Par définition, pour t dans $[\,-1;1\,]$, on a

$$x_3(t) = \frac{1}{4}(1-t)^2(2+t)(-1+a(t+1)) + \frac{1}{4}(1+t)^2(2-t)(1+a(t-1))$$

i.e. $x_3(t)$ est at fois la partie paire de $\frac{1}{2}(1+t)^2(2-t)$ et $1-a$ fois sa partie impaire. Comme $(1+t)^2(2-t) = 2+3t-t^3$, il vient $x_3(t) = \frac{(a-1)t^2+3-a}{2}t$. Quant à y_3 le même argument donne $1-a$ fois la partie paire et at fois la partie impaire, i.e. $y_3 = \dfrac{2-a(2-3t^2+t^4)}{2}$, i.e.

$\boxed{g_3(t) = \frac{1}{2}(t((a-1)t^2+3-a), 2-a(2-3t^2+t^4)).}$

III.C.3) D'après l'expression précédente et puisque l'expression sous la racine est un rapport de termes positifs si $a>3$, x_3 s'annule dans ce cas en 0 et en $\pm\sqrt{\frac{a-3}{a-1}}$. Puisque y_3 est une fonction paire, ses valeurs en ces deux derniers points sont identiques. On a $y_3(0) = 1-a$ et

$$y_3\left(\pm\sqrt{\frac{a-3}{a-1}}\right) = \frac{2(a-1)^2 - a(2(a-1)^2 - 3(a-1)(a-3) + (a-3)^2)}{2(a-1)^2} = \frac{2(a-1)^2 - a(2+2a)}{2(a-1)^2}$$
$$= \frac{1-3a}{(a-1)^2}\ .$$

De plus on a $1-a = \dfrac{1-3a}{(a-1)^2} \iff (1-a)^3 = 1-3a \iff a^2(3-a) = 0$ et donc le raccord coupe l'axe des ordonnées en deux points distincts si $a>3$, à savoir $\boxed{(0,1-a) \text{ et } \left(0, \dfrac{1-3a}{(1-a)^2}\right).}$

PARTIE IV - Une animation

IV.A -

IV.A.1) Les trois points $(A_j)_{j\in I\setminus\{i\}}$ sont contenus dans un plan affine et ce plan ne contient pas, par hypothèse, A_i. On dispose donc d'une équation de ce plan, par exemple $ax+by+cz+d=0$ avec (a,b,c) non nul dans $\mathbf{R}^3$ et d réel. Puisque A_i n'appartient pas à ce plan on a $ax_i+by_i+cz_i+d \neq 0$ et alors pour $(u_i,v_i,w_i,h_i) = \frac{1}{ax_i+by_i+cz_i+d}(a,b,c,d)$, on a $(u_i,v_i,w_i) \neq (0,0,0)$ et $\boxed{g_i(A_j) = \delta_{i,j}.}$

IV.A.2) Puisqu'on a affaire à une famille de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^3,\mathbf{R})$ et que cet espace est de dimension 3, $(\varphi_i)_{1\le i\le 4}$ n'est pas de rang 4. Matriciellement la question précédente se récrit, en notant $A_i(x_i,y_i,z_i)$,

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & h_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & h_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & h_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 & h_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

et donc les deux matrices sont inversibles et inverses l'une de l'autre. Soit maintenant $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ dans $\mathbf{R}^4$. On a

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i \varphi_i = 0 \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & h_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & h_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & h_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 & h_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^{4} \lambda_i h_i \end{pmatrix}$$

i.e.

$$\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\varphi_i=0 \iff \begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^{4}\lambda_i h_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4\\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\iff \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i h_i\ .$$

Puisqu'une combinaison linéaire de trois formes linéaires est aussi une combinaison linéaire de quatre avec un coefficient nul et puisqu'une combinaison linéaire de $(\varphi_i)_{1\leq i\leq 4}$ ne s'annule qu'avec des coefficients tous égaux, une combinaison linéaire de trois d'entre eux ne s'annule que si tous les coefficients sont nuls. Ainsi $\boxed{\mathrm{rg}(\varphi_i)_{i\in I}=4.}$

Remarque : le fait que la famille n'est pas de rang 4 montre au passage qu'il existe un quadruplet $(\lambda_i)_{1\leq i\leq 4}$ tel que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i h_i$ et donc qu'on a $\sum_{i=1}^{4}h_i=1$. Ceci résulte aussi du fait qu'on a, par unicité de l'inverse, $\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4\\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1 & v_1 & w_1 & h_1\\ u_2 & v_2 & w_2 & h_2\\ u_3 & v_3 & w_3 & h_3\\ u_4 & v_4 & w_4 & h_4\end{pmatrix}=I_4$.

Remarque : l'existence (et l'unicité) demandée à la question précédente est équivalente à l'inversibilité de $\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4\\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Or en retranchant la première colonne aux autres et en développant ensuite son déterminant par rapport à la dernière ligne, ce déterminant est égal à $\det(\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3},\overrightarrow{A_1A_4})$. Ce dernier est non nul car s'il l'était ces trois vecteurs seraient liés et donc d'un plan vectoriel les contenant, et alors le plan affine passant par A_1 et dirigé par ce plan vectoriel contiendrait les quatre points, ce qui est exclus par hypothèse. Il n'est pas clair selon le programme de savoir comment caractériser un repère affine. Ici les quatre points ne sont pas coplanaires donc forment un repère affine de $\mathcal{E}_3$ et ceci équivaut à l'inversibilité de la matrice considérée, comme on vient de le démontrer. Ce résultat n'est ni au programme ni hors-programme.

IV.B -

IV.B.1) D'après la question IV.A.1) on a, pour i dans I, $\boxed{g(A_i)=1.}$ Le calcul mené à la question précédente montre $\sum_{i=1}^{4}h_i=1$ et $\sum_{i=1}^{4}\varphi_i=0$. Il en résulte directement $\boxed{g=1.}$

Remarque : puisque les points (A_i) ne sont pas coplanaires, $(A_1,\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3},\overrightarrow{A_1A_4})$ est un repère cartésien (affine) de $\mathcal{E}_3$. Autrement dit (A_i) est un repère affine de $\mathcal{E}_3$. Pour M dans $\mathcal{E}_3$ on dispose de (a_2,a_3,a_4) dans $\mathbf{R}^3$ tel que $\overrightarrow{A_1M}=\sum_{i=2}^{4}a_i\overrightarrow{A_1A_i}$, i.e. on dispose de (a_1,a_2,a_3,a_4) dans $\mathbf{R}^4$ et de somme 1 tel que $M=\sum_{i=1}^{4}a_iA_i$. Par linéarité des φ_i on en déduit $g(M)=\sum_{1\leq i,j\leq 4}a_i\varphi_j(A_i)+\sum_{j=1}^{4}h_j$. Comme on a $\sum_{i=1}^{4}a_i=1$, il vient $g(M)=\sum_{1\leq i,j\leq 4}a_i(\varphi_j(A_i)+h_j)=\sum_{1\leq i,j\leq 4}a_i\delta_{i,j}=\sum_{i=1}^{4}a_i=1$.

Remarque : la notion d'application affine est explicitement hors-programme. Avec cette notion on peut raisonner directement : les g_i et donc g sont des formes affines et donc préservent le barycentre. Comme les A_i forment un repère affine et donc que tout point de l'espace est barycentre des A_i, le fait que g soit constante sur le repère entraîne qu'elle est constante sur l'espace entier.

IV.B.2) On reprend les notations utilisées dans la question précédente : $M = \sum_{i=1}^{4} a_i A_i$ et il vient pour j dans I, $g_j(M) = \sum_{i=1}^{4} a_i \varphi_j(A_i) + h_j = \sum_{i=1}^{4} a_i g_j(A_i) = a_j$, i.e. $\boxed{M \text{ est barycentre de } (A_i, g_i(M))_{i \in I}.}$

IV.B.3) D'après ce qui précède pour (i,j) dans I^2 avec $i \neq j$, l'arête $[A_i, A_j]$ est formée des points M tels que $g_k(M) = 0$ pour k dans I distinct de i et j et $g_i(M)$ et $g_j(M)$ positifs de somme 1. Pour de tels M on a alors $G_k(M) = L_m(0) = 0$ et $G(M) = L_m(g_i(M)) + L_m(1 - g_i(M)) = 1$, d'après la question I.A.2) : $\boxed{\alpha = 1.}$

IV.C -

IV.C.1) L'ensemble $\left\{(a_i)_{1 \leq i \leq 4} \in (\mathbf{R}_+)^4 \;\middle|\; a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1\right\}$ est l'intersection d'un produit cartésien de fermés de $\mathbf{R}$ (i.e. $\mathbf{R}_+$) avec l'image réciproque du fermé $\{1\}$ de $\mathbf{R}$ par une application linéaire donc continue sur $\mathbf{R}^4$. C'est donc un fermé de $\mathbf{R}^4$. Comme il est inclus dans $[0;1]^4$, il est également borné et le théorème de Heine-Borel permet de conclure qu'il est compact, puisque $\mathbf{R}^4$ est de dimension finie. En vertu des questions IV.B.2) et IV.B.1) Δ est l'image du compact précédent par l'application linéaire, donc continue, $(a_1, a_2, a_3, a_4) \mapsto \sum_{i=1}^{4} a_i A_i$ et le théorème de Weierstrass permet de conclure que $\boxed{\Delta \text{ est compact.}}$

IV.C.2) D'après le point rappelé, la face du tétraèdre opposée au sommet A_i est formée des points M de Δ tels que $g_i(M) = 0$. C'est donc l'intersection du compact Δ avec l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue g_i (car somme d'une application linéaire en dimension finie et d'une constante), donc un fermé inclus dans un compact et donc un compact. Comme G est une somme de composées d'une fonction polynomiale, donc de classe C^∞, et de g_i, également de classe C^∞, G est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^4$. En particulier elle est continue sur le compact considéré et d'après le théorème de Weierstrass elle y atteint $\boxed{\text{un maximum et un minimum.}}$ Pour M tel que $g_i(M) = 0$, $G(M)$ est la somme de trois valeurs de L_m en trois réels positifs de somme 1. La question se ramène donc à trouver les extrema de la fonction γ donnée par $(x,y) \mapsto L_m(x) + L_m(y) + L_m(1 - x - y)$ sur la partie de $\mathbf{R}^2$ définie par $0 \leq x$, $0 \leq y$ et $x + y \leq 1$. D'après la question précédente pour $x = 0$, $y = 0$ ou $x + y = 1$ cette valeur vaut 1. Si cette fonction atteint un extremum sur l'ouvert défini par $0 < x$, $0 < y$ et $x + y < 1$, alors son gradient s'y annule. Comme ce gradient est donné par

$$\nabla\gamma(x,y) = \left(L'_m(x) - L'_m(1 - x - y), L'_m(y) - L'_m(1 - x - y)\right),$$

il résulte de la question I.C.2) qu'elle ne s'annule sur cet ouvert qu'en $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Par existence des extrema on en déduit qu'en ce point γ admet un extremum et, par non constance de γ, que son autre valeur extrême est atteinte en dehors de cet ouvert, i.e. sur les arêtes. D'après les questions I.B.2) et I.A.2) $3L_m(\frac{1}{3}) \leq 2L_m(\frac{1}{2}) = 1$. Il en résulte que le point intérieur est un minimum et donc

$$\boxed{G \text{ atteint son minimum } 3L_m(\tfrac{1}{3}) \text{ en le centre de gravité de la face et son maximum 1 sur les arêtes.}}$$

IV.C.3) Par définition de l'isobarycentre tous les $g_i(\Omega)$ sont égaux, et valent donc $\frac{1}{4}$. Ainsi $\boxed{G(\Omega) = 4L_m(\frac{1}{4}).}$ Puisque g_i est somme d'une constante et d'une application linéaire, i.e. est affine, elle est de classe C^∞ et $\mathrm{d}g_i$ est constante égale à φ_i. Comme L_m est polynomial, c'est une application de classe C^∞ et sa différentielle est la multiplication par sa dérivée. Il en résulte que G est différentiable sur $\mathbf{R}^4$ et on a

$$\forall (M,H) \in \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \qquad \mathrm{d}G(M) \cdot H = \sum_{i=1}^{4} L'_m(g_i(M))\varphi_i(H)$$

et donc $\mathrm{d}G(\Omega) = \frac{1}{4}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)$. D'après les calculs effectués en question IV.A.2), $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0$ et donc $\boxed{\mathrm{d}G(\Omega) = 0.}$

IV.C.4) D'après les calculs précédents et ceux effectués en question IV.A.2), $\mathrm{d}G(M)$ est nul si et seulement si $(L'_m(g_i(M)))_{1\leq i\leq 4}$ est proportionnel à $(1,1,1,1)$. Pour M dans Δ cela équivaut à ce que $(g_i(M))_{1\leq i\leq 4}$ satisfasse aux conditions de la question I.C.3). i.e.

$\boxed{\text{les points singuliers de } G \text{ sur } \Delta \text{ sont } \Omega \text{ et ses sommets.}}$

IV.C.5) Puisque G est continu et Δ compact, le théorème de Weierstrass entraîne que G atteint ses bornes sur Δ, i.e. $\boxed{G \text{ admet un maximum et un minimum sur } \Delta.}$ Par continuité des g_i les points de Δ tels qu'aucun g_i ne soit nul forment un ouvert. De plus puisque g_i est affine tout point d'annulation de g_i est tel que tout voisinage de ce point contient des points où g_i est strictement négative. Il en résulte que l'intérieur de Δ est constitué du complémentaire des faces et donc si G admet un extremum en un de ces points intérieurs, alors $\mathrm{d}G$ s'y annule. Ainsi les extrema de G sont atteints soit en Ω soit sur les faces et l'étude de la question IV.C.2) montre que ces extrema sont donc atteints soit en les arêtes, soit au centre des faces, soit en Ω. Les valeurs respectives de G en ces points sont 1, $3L_m(\frac{1}{3})$ et $4L_m(\frac{1}{4})$. D'après la question I.B.2) on a $4L_m(\frac{1}{4}) \leq 3L_m(\frac{1}{3})$ et il résulte donc de la question IV.C.2) que $\boxed{G \text{ atteint son minimum } 4L_m(\tfrac{1}{4}) \text{ en } \Omega \text{ et son maximum 1 en les arêtes de } \Delta.}$

IV.D -

IV.D.1) Pour (x,y,z) dans $\mathbf{R}^3$, on a $\nabla G(x,y,z) = \dfrac{3}{4}(x - yz, y - xz, z - xy)$ et donc ce point est singulier si et seulement si $x = yz$, $y = xz$ et $z = xy$. Si l'une des coordonnées est nulle, l'équation donnant les deux autres montre que toutes les coordonnées sont nulles. La réciproque étant directe, O est l'unique point singulier ayant au moins une coordonnée nulle. Dans les autres cas on a par produit de deux équations et simplification $x^2 = y^2 = z^2 = 1$. Réciproquement les points vérifiant ces conditions et ayant un nombre pair de coordonnées négatives sont singuliers, i.e. A_1, A_2, A_3 et A_4. Comme seuls ces derniers appartiennent à Σ, $\boxed{\text{les points singuliers de } \Sigma \text{ sont les } (A_i)_{i\in I}.}$

IV.D.2) Par définition les points de $[OP]$ sont les points de coordonnées (ta, tb, tc) avec t dans $[0;1]$ et pour un tel point G prend la valeur $\frac{1}{8}(3(3t^2 - 2abct^3) + 5)$ et appartient donc Σ si et seulement si $t^2(3 - 2abct) = 1$. On constate que 0 n'est jamais solution (i.e. $O \notin \Sigma$), que $X^3 - 3X$ est strictement croissant sur $[1;+\infty[$, vaut -2 en 1 et tend vers l'infini en $+\infty$, puis que $-2abc \geq -2$ d'après le point admis et vu $P \in \Sigma$. Il en résulte que $G(t) = 1$ avec t dans $]0;1]$ si et seulement si t est l'inverse de l'unique u dans $[1;+\infty[$ tel que $u^3 - 3u = -2abc$. L'équation en t admet donc une unique solution dans $[0;1]$, i.e. $\boxed{[OP] \cap \Sigma \text{ est un singleton.}}$

IV.D.3) Soit M dans Δ, on dispose de $(a_i)_{i\in I}$ des réels positifs de somme 1 tels que $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} a_i A_i$. Puisque $\langle A_i \mid A_j \rangle = -1$ si $i \neq j$, il vient

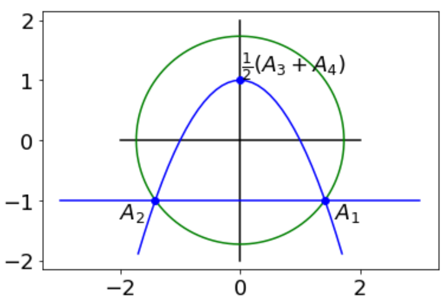
$$\|M\|^2 = 3\sum_{i=1}^{4} a_i^2 - 2\sum_{1\leq i<j\leq 4} a_i a_j = 4\sum_{i=1}^{4} a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{4} a_i\right)^2$$

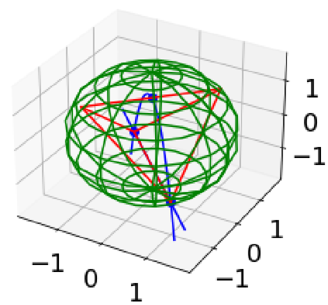
et comme tous les a_i sont dans $[0;1]$, donc vérifient $a_i^2 \leq a_i$, il vient en utilisant que leur somme vaut 1, $\mathscr{M}\|^2 \leq 4 - 1 = 3$, i.e. $\Delta \subset \overline{B}(O, \sqrt{3})$. Dès lors puisque $G \leq 1$ sur Δ et puisque, dans l'étude de la question précédente, $t \mapsto t^2(3 - 2abct)$ est strictement croissant sur $\left[0; \frac{1}{abc}\right]$, donc aussi sur $[0;1]$, $\boxed{\Delta \text{ est inscrit dans } \Sigma'.}$ Puisque l'intersection de $\overline{B}(0, \sqrt{3})$ avec une demi-droite issue de O est un segment du type précédent, on en déduit que $\boxed{\text{toute demi-droite issue de } O \text{ coupe } \Sigma' \text{ en un singleton.}}$

D'après le question IV.C.5), $\Sigma' \cap \Delta$ est l'ensemble des arêtes de Δ. Enfin dans la question précédente on trouve $t = 1$ si et seulement si $abc = 1$. Par inégalité arithmético-géométrique on a $(a^2b^2c^2)^{1/3} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$ avec égalité si et seulement si $a^2 = b^2 = c^2$. Il en résulte que les points de la sphère $S(O, \sqrt{3})$ tels que $abc = 1$ sont les points n'ayant que des coordonnées de valeur absolue 1 et ayant un nombre pair de coordonnées négatives, i.e. les sommets de Δ. Par conséquent

$\Sigma' \cap S(O, \sqrt{3})$ est l'ensemble des sommets de Δ.

IV.D.4) Le plan médiateur de $[A_3, A_4]$ contient A_1 et A_2, ainsi que le milieu de ce segment, i.e. $(0, 0, 1)$ et c'est donc bien le plan d'équation $x + y = 0$. Pour un tel point $M(x, y, z)$ on pose $u = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$ de sorte qu'on a $x^2 + y^2 = -2xy = u^2$ et ainsi $G(M)\frac{1}{8}(3(u^2 + z^2 - u^2z) + 5)$ et donc $G(M) = 1$ si et seulement si $u^2(1 + z) = 1 - z^2$, i.e. $z = -1$ ou $u^2 = 1 - z$, i.e. puisque A_1 et A_2 vérifient $z = -1$, l'intersection avec Σ est la réunion de (A_1A_2) et d'une parabole. On a également $\|M\|^2 = u^2 + z^2$ et donc l'intersection avec $\overline{B}(0, \sqrt{3})$ est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$. En particulier l'intersection avec Σ' est la réunion de l'arête $[A_1, A_2]$ et d'un arc de parabole.





IV.D.5) On a $\Omega = O$ et donc $G_{min} = \frac{5}{8}$ et $G_{max} = 1$. L'animation fait peu à peu gonfler une surface tout d'abord réduite à un point, i.e. O, puis elle devient tangente au tétraèdre, jusqu'à lui devenir circonscrit. À ce dernier stade la surface contient les arêtes du tétraèdre. Puisque le minimum de G sur les faces est atteint en leur centre, il est atteint par exemple en $-\frac{1}{3}(1, 1, 1)$ et en ce point G vaut $\frac{7}{9}$:

S_α est réduit à O pour $\alpha = \frac{5}{8}$, puis croît avec α. Elle est contenue dans Δ tant que $\alpha \leq \frac{7}{9}$ où elle devient tangente aux faces de Δ (i.e. est inscrite dans Δ) et alors ses points de contacts sont les centres des faces. Elle déborde ensuite peu à peu des faces jusqu'à contenir complètement Δ lorsque $\alpha = 1$, où elle est circonsrite à Δ et contient toutes ses arêtes. Pour $\dfrac{7}{9} < \alpha < 1$ on peut penser que la surface découpe sur Δ des courbes fermées autour du centre de la face et incluses dans la face, ces courbes croissant peu à peu pour épouser la forme du triangle.