Centrale-Supélec 2009 - MP - Première composition

Notations

On note E l'espace vectoriel normé des applications continues du segment $[0;1]$ dans $\mathbf{C}$ muni de la norme donnée par $\|f\| = \sup\limits_{0\leq t\leq 1} |f(t)|$, et $\mathscr{L}(E)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans lui-même. Soit v un élément de $\mathscr{L}(E)$, et f un élément de E ; l'image de f par v est notée vf. L'espace $\mathscr{L}(E)$ est muni de la norme donnée par $\|v\| = \sup\limits_{\|f\|\leq 1} \|vf\|$.

Le problème se propose d'étudier quelques propriétés d'un opérateur appliquant E dans lui-même qui est introduit dans la troisième partie. Pour ce faire, on met en place dans les deux premières parties des outils nécessaires à cette étude.

Rappels

La deuxième fonction eulérienne notée Γ est la fonction réelle indéfiniment dérivable définie sur $\mathbf{R}_+^*$ telle que, pour tout entier naturel k et tout nombre réel x dans $\mathbf{R}_+^*$:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)^k e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

De plus, pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$, cette fonction vérifie l'équation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
Comme $\Gamma(1) = 1$, il en découle que, pour tout entier naturel n, $\Gamma(n+1) = n!$.

PARTIE I - Questions préliminaires

I.1) Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]1;2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.

I.2) En déduire que la fonction Γ est strictement croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

I.3) Montrer, pour tout nombre réel γ strictement positif, $\gamma^x = \mathrm{o}\left(\Gamma(x)\right)$ au voisinage de $+\infty$.

PARTIE II - Comportement asymptotique de la somme d'une série entière au voisinage de la borne supérieure de son intervalle de convergence

II.A – Soit φ une application continue de l'intervalle $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, intégrable sur l'intervalle $\mathbf{R}_+$. On suppose de plus qu'il existe un nombre réel t_0 dans $\mathbf{R}_+$ tel que la fonction φ soit décroissante sur l'intervalle $[t_0;+\infty[$.

II.A.1) Établir que la fonction φ est positive sur l'intervalle $[t_0;+\infty[$. (On pourra raisonner par l'absurde.)

II.A.2) Soit h un réel strictement positif.

a. Démontrer que pour n suffisamment grand, $0 \leq h\varphi(nh) \leq \displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

b. Montrer que la série $\sum h\varphi(nh)$ converge.

II.A.3) Démontrer $\displaystyle\lim_{h\to 0, h>0} h\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(nh) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. (On pourra introduire un nombre réel a suffisamment grand et écrire : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} h\varphi(nh) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{a}{h}\right]} h\varphi(nh) + \sum_{n=\left[\frac{a}{h}\right]+1}^{+\infty} h\varphi(nh)$ où $\left[\dfrac{a}{h}\right]$ désigne la partie entière de $\dfrac{a}{h}$.)

II.B – Pour tout nombre réel $\alpha \geq 1$, on note g_α la fonction définie sur l'intervalle $\mathbf{R}_+$ par la formule $g_\alpha(t) = e^{-t}t^{\alpha-1}$.

II.B.1) Vérifier que la fonction g_α satisfait aux conditions du II.A.
En déduire

$$\lim_{x\to 1, x<1} (-\ln(x)) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n\ln(x)) = \Gamma(\alpha)\,.$$

II.B.2) On considère la série entière $\sum n^{\alpha-1}x^n$.

a. Établir que le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1. On note S_α la somme de cette série entière.

b. Démontrer qu'on a, lorsque x tend vers 1 avec $x<1$, $S_\alpha(x) \sim \dfrac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha}$.

PARTIE III - La première fonction eulérienne

III.A –

III.A.1) Établir que, pour tout couple (α,β) de nombres réels strictement positifs, la fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0;1[$.

Pour tout couple (α,β) de nombres réels strictement positifs, on pose :

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t\ .$$

III.A.2) Démontrer successivement pour tout couple (α,β) de nombres réels strictement positifs les relations suivantes :

(i) $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$

(ii) $B(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,\mathrm{d}t$ (on pourra utiliser le changement de variable $u = \dfrac{t}{1-t}$)

(iii) $B(\alpha+1,\beta) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)$.

III.B – On se propose d'établir pour tout réel $\alpha>0$ et tout réel $\beta>0$ la formule suivante :

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\ .$$

III.B.1) À l'aide de la relation (iii) montrer qu'il suffit de démontrer l'assertion lorsque les réels α et β sont strictement supérieurs à 2.

III.B.2) Soit α et β deux nombres réels strictement supérieurs à 2. Pour tout entier n strictement positif, on pose

$$u_n(\alpha,\beta) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\beta-1}$$

a. Établir que la fonction $\psi_{\alpha,\beta} : t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est lipschitzienne sur le segment $[0;1]$.

On note $A_{\alpha,\beta}$ un rapport de Lipschitz de cette fonction, c'est-à-dire qu'on a :

$$\forall (x,y)\in[0;1]^2\ ,\quad |\psi_{\alpha,\beta}(x)-\psi_{\alpha,\beta}(y)| \le A_{\alpha,\beta}\,|x-y|\ .$$

b. Démontrer, pour tout entier n strictement positif : $|u_n(\alpha,\beta)-B(\alpha,\beta)| \le \dfrac{A_{\alpha,\beta}}{2n}$.

c. On reprend les notations de la question II.B.2.

Établir, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;1[$: $S_\alpha(x)S_\beta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\alpha,\beta)n^{\alpha+\beta-1}x^n$. Déduire de la question 2b) que, pour tout réel x, $0\le x<1$,

$$|S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)| \le \frac{A_{\alpha,\beta}}{2}S_{\alpha+\beta-1}(x)\ .$$

Conclure en utilisant le comportement des fonctions $(S_\gamma)_{\gamma\ge1}$ au voisinage de 1.

III.C – Formule des compléments.

III.C.1) Établir que la fonction $\alpha \mapsto B(\alpha, 1-\alpha)$ est continue sur l'intervalle $]0;1[$.

III.C.2) Soit p et q deux entiers tels que $0 < p < q$.

a. Vérifier $B\left(\dfrac{2p+1}{2q}, 1-\dfrac{2p+1}{2q}\right) = 2q\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,\mathrm{d}t$.

b. Pour tout entier k compris entre 0 et $q-1$, on note $z_k = e^{i\frac{2k+1}{2q}\pi}$. Établir :

$$\frac{X^{2p}}{1+X^{2q}} = -\frac{1}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\left(\frac{1}{X-z_k} - \frac{1}{X+z_k}\right) \qquad (\star)$$

c. Après avoir vérifié que, pour tout nombre complexe c de partie imaginaire non nulle, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left((t-\mathrm{Re}(c))^2 + (\mathrm{Im}(c))^2\right) + i\arctan\left(\dfrac{t-\mathrm{Re}(c)}{\mathrm{Im}(c)}\right)$ est une primitive sur $\mathbf{R}$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-c}$, démontrer, en utilisant judicieusement la relation $(\star)$, :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,\mathrm{d}t = -i\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\,.$$

En conclure : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2q}\frac{1}{\sin\left(\frac{2p+1}{2q}\pi\right)}$.

III.C.3) Déduire de III.C.1 et III.C.2 : $\forall \alpha \in\,]0;1[,\ B(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha}$.

PARTIE IV - L'opérateur d'Abel

Dans toute cette dernière partie, on suppose que α est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;1[$.

IV.A –

IV.A.1) Établir que pour toute fonction f de E et pour tout réel x de l'intervalle $]0;1]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur l'intervalle $]0;x[$.

IV.A.2) Pour tout élément f de E, on note $A_\alpha f$ la fonction définie sur le segment $[0;1]$ par les formules suivantes :

$$A_\alpha f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

a. Vérifier que, pour tout f élément de E et tout réel x du segment $[0;1]$, on a

$$A_\alpha f(x) = x^{1-\alpha}\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t\,.$$

b. Montrer que, pour tout élément f de E, la fonction $A_\alpha f$ est une fonction continue sur le segment $[0;1]$.

c. Établir que l'application $A_\alpha : f \mapsto A_\alpha f$ est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé E et qu'on a :

$$\|A_\alpha\| = \sup_{\|f\|\leq 1} \|A_\alpha f\| = \frac{1}{1-\alpha}\,.$$

IV.B – On définit la suite $(A_\alpha^n)_{n\geq 0}$ par la condition initiale $A_\alpha^0 = \mathrm{Id}_E$ (application identique de E) et, pour tout $n \geq 0$, par la relation de récurrence suivante : $A_\alpha^{n+1} = A_\alpha \circ A_\alpha^n$.

IV.B.1) On pose $\beta = 1 - \alpha$.

a. Pour tout entier $n \geq 1$, pour tout f élément de E et pour tout x du segment $[0;1]$, établir :

$$|A_\alpha^n f(x)| \leq \frac{x^{n\beta}(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\| \ .$$

b. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, A_α^n est un endomorphisme continu de E et qu'on a :

$$\|A_\alpha^n\| \leq \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \ .$$

IV.B.2) Pour tout nombre réel positif γ, montrer : $\lim_{n\to\infty} \gamma^n \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = 0$. On pourra utiliser le résultat de la question préliminaire I.3

IV.B.3) Soit λ un nombre complexe non nul et f un élément de E.

a. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \lambda^n A_\alpha^n f$ converge uniformément sur le segment $[0;1]$. On note g la somme de cette série de fonctions.

b. Démontrer $(\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha)g = f$.

c. En déduire que, pour tout nombre complexe λ non nul, l'opérateur $\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha$ est inversible et qu'on a : $(\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$ où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$ désigne l'application $f \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n(f)$.

IV.C– Pour tout entier naturel n, on note e_n la fonction monomiale $t \mapsto t^n$.

IV.C.1) Soit n un entier naturel.

a. Calculer $A_\alpha e_n$.

b. En déduire $(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)e_n = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \dfrac{e_{n+1}}{n+1}$.

IV.C.2) Ce résultat suggère d'introduire l'opérateur P défini sur E par la formule suivante :

$$\forall x \in [0;1] \ , \quad Pf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \ .$$

Ainsi, avec cette notation, pour tout entier naturel n, $(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)e_n = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} Pe_n$. Établir que, pour toute fonction polynomiale ψ,

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)\psi = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} P\psi \ .$$

IV.C.3) Formule d'inversion d'Abel.

a. Montrer que l'endomorphisme P est un endomorphisme continu de E tel que :

$$\|P\| = \sup_{\|f\|\leq 1} \|Pf\| = 1 \ .$$

b. On pose $B_\alpha = A_{1-\alpha} \circ A_\alpha$. Montrer : $B_\alpha = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} P$.

c. Soit D l'opérateur qui à toute application continûment dérivable de $[0;1]$ dans $\mathbf{C}$ associe sa dérivée. Montrer que $D \circ B_\alpha$ est bien défini et qu'on a : $D \circ B_\alpha = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \mathrm{Id}_E$.

d. En déduire que l'opérateur A_α est injectif.

PARTIE I - Questions préliminaires

I.1) On a $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Comme Γ est continue sur $[1;2]$ et dérivable sur $]1;2[$, il résulte du théorème de Rolle qu'il existe c dans $]1;2[$ tel que $\boxed{\Gamma'(c) = 0.}$

I.2) Sur $\mathbf{R}_+^*$, Γ'' est définie comme l'intégrale d'une fonction continue, positive, non identiquement nulle sur $\mathbf{R}_+^*$. Il en résulte que Γ est strictement convexe, donc Γ' est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$. En particulier on dispose de c dans $]1;2[$ tel que Γ' soit strictement positive sur $]c;+\infty[$ et donc, a fortiori, sur $[2;+\infty[$. Il en résulte que $\boxed{\Gamma \text{ strictement croissante sur sur } [2;+\infty[.}$

I.3) Soit x supérieur à 2 et n sa partie entière. On a donc, par croissance de Γ, $\Gamma(x) \geq \Gamma(n) = (n-1)!\,$. De plus γ^x/γ^{n-1} s'écrit $\gamma^{1+\varepsilon}$ avec ε dans $]0;1]$, de sorte qu'on a $\gamma^x/\gamma^{n-1} = \mathrm{O}\,(1)$. Il vient $\dfrac{\gamma^x}{\Gamma(x)} = \mathrm{O}\left(\dfrac{\gamma^{n-1}}{(n-1)!}\right)$. Comme $x \geq n \geq x-1$, par le théorème d'encadrement des limites, n tend vers $+\infty$ avec x. Or, par croissance comparée ou puisque l'exponentielle a un rayon de convergence infini, $\gamma^k = \mathrm{o}\,(k!\,)$ en l'infini. Il en résulte $\boxed{\gamma^x = \mathrm{o}\,(\Gamma(x)).}$

PARTIE II - Comportement asymptotique de la somme d'une série entière au voisinage de la borne supérieure de son intervalle de convergence

II.A

II.A.1) Comme φ est décroissante sur $[t_0;+\infty[$, elle admet une limite en $+\infty$. Si cette limite était strictement négative, en particulier φ serait majorée par une constante strictement négative à partir d'un certain rang. Soit ℓ une telle constante. Alors $|\varphi|$ serait minoré par $|\ell|$ au voisinage de l'infini et donc, puisque la fonction constante égale à $|\ell|$ n'est pas intégrable, $|\varphi|$ ne le serait pas non plus, d'après le critère de comparaison pour les fonctions positives. Il en résulte que la limite de φ en $+\infty$ est positive et donc, par décroissance, que $\boxed{\varphi \text{ est positive sur } [t_0;+\infty[.}$

II.A.2)

a. Pour n supérieur à $1+\dfrac{t_0}{h}$, φ est décroissante sur $[(n-1)h;nh]$ et donc y est minorée par $\varphi(nh)$, lui-même positif d'après ce qui précède. Il en résulte, par inégalité de la moyenne $\boxed{0 \leq h\varphi(nh) \leq \displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.}$

b. Comme φ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\int_{(n-1)h}^{nh} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Par comparaison des séries à termes positifs, il en résulte que $\boxed{\sum h\varphi(nh) \text{ converge.}}$

II.A.3) Soit ε dans $]0;1[$. En raison de l'intégrabilité de φ, on dispose de a supérieur à $t_0+\varepsilon$ tel que $\displaystyle\int_a^{+\infty} |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon$. Puisque φ est continue sur $[0;a+2\varepsilon]$, elle y est intégrable et son intégrale est limite de sommes de Riemann. Plus précisément, φ est uniformément continue sur $[0;a+2\varepsilon]$ et on dispose donc de η dans $]0;\varepsilon[$ tel que, pour x et y dans $[0;a+2\varepsilon]$, si $|x-y| \leq \eta$, alors $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{a}$. Soit h dans $]0;\eta[$ et n dans $[\![0;n_0+1]\!]$, avec n_0 la partie entière de a/h, on a

$$0 \leq nh \leq (n+1)h \leq n_0h + 2\eta \leq a + 2\varepsilon\ .$$

Par positivité de h, il vient alors $h \inf\limits_{[nh;(n+1)h]} \varphi \leq h\varphi(nh) \leq h \sup\limits_{[nh;(n+1)h]} \varphi$ et, d'après l'inégalité de la moyenne,

$$h \inf_{[nh;(n+1)h]} \varphi \leq \int_{nh}^{(n+1)h} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq h \sup_{[nh;(n+1)h]} \varphi\ .$$

Il en résulte, puisque $[nh;(n+1)h] \subset [0,a+2\varepsilon]$ et $\forall (x,y) \in [nh;(n+1)h]^2$, $|x-y| \leq h \leq \eta$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{nh}^{(n+1)h} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - h\varphi(nh)\right| &\leq h\left(\sup_{[nh;(n+1)h]} \varphi - \inf_{[nh;(n+1)h]} \varphi\right)\\ &= h \sup_{(x,y)\in[nh;(n+1)h]^2} |\varphi(x)-\varphi(y)|\\ &\leq h\frac{\varepsilon}{a}\,.\end{aligned}$$

Par sommation et inégalité triangulaire, il vient, en utilisant $n_0 \leq \dfrac{a}{h}$ et $0 < h < \varepsilon \leq a$,

$$\left|\int_0^{(n_0+2)h} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{n_0+1} h\varphi(nh)\right| \leq \frac{(n_0+2)h\varepsilon}{a} \leq \varepsilon + 2\varepsilon \leq 3\varepsilon\,.$$

Comme $\dfrac{a}{h} < n_0+2$, on a $0 \leq \displaystyle\int_{(n_0+2)h}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{(n_0+2)h}^{+\infty} |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon$. De plus, pour $n \geq n_0+2$, on a $(n-1)h \geq (n_0+1)h \geq a \geq t_0$ et donc φ est décroissante et positive sur $[(n-1)h;nh]$, de sorte qu'on a $0 \leq h\varphi(nh) \leq \displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Puisqu'on a affaire à une série et à une intégrale convergentes, par sommation, il vient

$$0 \leq \sum_{n=n_0+2}^{+\infty} h\varphi(nh) \leq \int_{(n_0+1)h}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{(n_0+1)h}^{+\infty} |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon\,,$$

car $\dfrac{a}{h} < n_0+1$. Il en résulte, par inégalité triangulaire, $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{+\infty} h\varphi(nh)\right| \leq 5\varepsilon$ et donc

$$\boxed{\lim_{h\to 0\,,\,h>0} h\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(nh) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.}$$

II.B

II.B.1) Soit α un réel supérieur à 1. Pour que g_α soit continue en 0, on convient $g_1(0) = 1$ et $g_\alpha(0) = 0$ si $\alpha > 1$. Avec ces conventions, puisque g_α est continue sur $\mathbf{R}_+$, elle y est localement intégrable. Par ailleurs, en $+\infty$, on a $g_\alpha(x) = \mathrm{o}\left(e^{-t/2}\right)$, par croissance comparée entre une exponentielle et une fonction puissance. Donc g_α est intégrable sur $\mathbf{R}_+$.

De plus, pour t et u réels avec $\alpha - 1 \leq t \leq u$, on a par convexité de l'exponentielle,

$$e^{(u-t)/(\alpha-1)} \geq 1 + \frac{u-t}{\alpha-1} \geq 1 + \frac{u-t}{t} = \frac{u}{t}$$

et donc, par croissance de la fonction puissance d'exposant positif, $e^{u-t} \geq u^{\alpha-1}t^{1-\alpha}$, soit par positivité de t et e^u, $g_\alpha(t) \geq g_\alpha(u)$. Il en résulte que g_α est décroissante sur $[\alpha-1,+\infty[$ et donc $\boxed{g_\alpha \text{ satisfait aux conditions du II.A.}}$

On note ψ_α la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $\psi_\alpha(h) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} hg_\alpha(nh)$, ce qui est licite d'après II.A.2b). Alors ψ_α admet une limite à droite en 0 donnée par $\Gamma(\alpha)$ d'après II.A.3). Comme $-\ln$ admet 0 comme limite à gauche en 1 et que cette limite est atteinte par valeurs supérieures par décroissance de $-\ln$ sur $\mathbf{R}_+^*$, il en résulte que $\psi_\alpha \circ (-\ln)$ admet $\Gamma(\alpha)$ comme limite à gauche en 1, i.e.

$$\boxed{\lim_{x\to 1, x<1} (-\ln(x)) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n\ln(x)) = \Gamma(\alpha).}$$

II.B.2)

a. Comme $\lim \dfrac{(n+1)^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} = 1$, il résulte du critère de d'Alembert que

$\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum n^{\alpha-1}x^n \text{ est égal à } 1.}$

b. Pour x dans $]0;1[$, on a $g_\alpha(-n\ln(x)) = (-\ln(x))^{\alpha-1} n^{\alpha-1} x^n$. Il résulte donc de II.B.1) qu'on a

$$\lim_{x\to 1, x<1} (-\ln(x))^\alpha S_\alpha(x) = \Gamma(\alpha)\ .$$

Or, au voisinage de 1, on a $\ln(x) \sim (x-1)$ et donc $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-\ln(x)}{1-x} = 1$. Par continuité de la fonction puissance sur $\mathbf{R}_+$, on a aussi $\lim\limits_{x\to 1, x<1} \dfrac{(-\ln(x))^\alpha}{(1-x)^\alpha} = 1$. Il vient pour x au voisinage de 1 avec $x<1$, $(-\ln(x))^\alpha \sim (1-x)^\alpha$, d'où $(1-x)^\alpha S_\alpha(x) \sim (-\ln(x))^\alpha S_\alpha(x) \sim \Gamma(\alpha)$, i.e. $\boxed{S_\alpha(x) \sim \dfrac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha}.}$

PARTIE III - La première fonction eulérienne

III.A

III.A.1) La fonction puissance $t \mapsto t^s$ est intégrable en 0, à droite, si et seulement si $s > -1$.
L'intégrande est une fonction continue sur $]0;1[$, donc y est localement intégrable. Il est positif et équivalent en 0, à droite, à $t^{\alpha-1}$, donc, par comparaison entre fonctions positives, est intégrable au voisinage de 0 à droite. De même l'intégrande est équivalent en 1, à gauche, à $(1-t)^{\beta-1}$ et est donc localement intégrable au voisinage de 1 à gauche, par comparaison à une fonction puissance. Il en résulte que $\boxed{\text{l'intégrande est intégrable sur }]0;1[.}$

III.A.2) Par changement de variable affine bijectif $t \mapsto 1-t$, on a $\boxed{B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha).}$
L'application $t \mapsto \dfrac{t}{t-1}$ est une fonction rationnelle, donc de classe C^∞ sur son domaine de définition, en particulier sur $]0;1[$. Sa réciproque est définie sur $\mathbf{R}\setminus\{-1\}$ par $u \mapsto \dfrac{u}{1+u}$ et est donc de classe C^∞ en particulier sur $\mathbf{R}_+^*$. Aussi $t \mapsto \dfrac{t}{t-1}$ est-il un C^1-difféomorphisme (i.e. une bijection de classe C^1 tout comme sa réciproque) entre $]0;1[$ et $\mathbf{R}_+^*$, de dérivée $t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^2}$. Comme, pour t dans $]0;1[$, on a $t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} = \left(\dfrac{t}{1-t}\right)^{\alpha-1} (1-t)^{\alpha+\beta} \dfrac{1}{(1-t)^2}$, il vient

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}(1+u)^{-(\alpha+\beta)}\,\mathrm{d}u$$

puisque $\dfrac{1}{1-t} = 1 + \dfrac{t}{1-t}$. Autrement dit $\boxed{B(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,\mathrm{d}t.}$

Pour t dans $]0;1[$, on pose $f(t) = t^\alpha(1-t)^\beta$, i.e. $f(t) = \exp(\alpha\ln(t)+\beta\ln(1-t))$. En particulier, puisque ln est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$ et puisque exp l'est sur $\mathbf{R}$, f est de classe C^∞ sur $]0;1[$ et on a, pour t dans $]0;1[$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \alpha t^{\alpha-1}(1-t)^\beta - \beta t^\alpha(1-t)^{\beta-1} \\ &= \alpha t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}(1-t) - \beta t^\alpha(1-t)^{\beta-1} \\ &= \alpha t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} - (\alpha+\beta)t^\alpha(1-t)^{\beta-1}\ . \end{aligned}$$

Comme α et β sont strictement positifs, f est prolongeable par continuité en 0 et 1 en posant $f(1) = f(0) = 0$. Chacun des termes de l'égalité précédente est intégrable sur $]0;1[$. Il en résulte, par intégration et en utilisant le théorème de Leibniz-Newton (théorème fondamental du calcul différentiel et intégral), $0 = \lim\limits_{1^-} f - \lim\limits_{0^+} f = \alpha B(\alpha,\beta) - (\alpha+\beta)B(\alpha+1,\beta)$. Il vient $\boxed{B(\alpha+1,\beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta).}$

III.B

III.B.1) Soit α et β dans $\mathbf{R}_+^*$. On a grâce à (iii)

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}B(\alpha+1,\beta) = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}{\alpha(\alpha+1)}B(\alpha+2,\beta)\ .$$

Comme $B(\alpha+2,\beta) = B(\beta,\alpha+2)$, d'après (i), on obtient

$$B(\beta,\alpha+2) = \frac{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}{\beta(\beta+1)}B(\beta+2,\alpha+2)$$

et donc

$$B(\alpha,\beta) = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}B(\alpha+2,\beta+2)\ .$$

Or d'après l'équation fonctionnelle pour la fonction Γ rappelée dans l'introduction, on a

$$\Gamma(\alpha+2) = (\alpha+1)\Gamma(\alpha+1) = \alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)\,, \quad \Gamma(\beta+2) = \beta(\beta+1)\Gamma(\beta)$$

et $\Gamma(\alpha+\beta+4) = (\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)\Gamma(\alpha+\beta)$, de sorte que

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+4)}$$

En particulier, si $B(\alpha+2,\beta+2) = \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+4)}$, alors $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ et donc $\boxed{\text{il suffit de démontrer}}$

III.B.2)

a. Les arguments de III.A.2) montrent que $\psi_{\alpha,\beta}$ est de classe C^∞ sur $]0;1[$. De plus, comme $\alpha > 2$ et $\beta > 2$, $\psi_{\alpha,\beta}$ et $\psi'_{\alpha,\beta}$ admettent des limites nulles en 0 et 1. D'après le théorème de la limite de la dérivée, $\psi_{\alpha,\beta}$ est donc de classe C^1 sur $[0;1]$. Il résulte du théorème de Lagrange (inégalité des accroissements finis) et du théorème de Weierstrass (théorème du maximum) appliqué à la fonction $\psi'_{\alpha,\beta}$ continue sur $[0;1]$, que $\psi_{\alpha,\beta}$ est lipschitzienne de rapport $\left\|\psi'_{\alpha,\beta}\right\|_{\infty,[0;1]}$ sur $[0;1]$. Donc $\boxed{\psi_{\alpha,\beta} \text{ est lipschitzienne sur } [0;1].}$

b. Soit n dans $\mathbf{N}^*$. Comme en II.A.3) on compare une somme de Riemann à une intégrale. La fonction $\psi_{\alpha,\beta}$ étant continue sur $[0;1]$, $B(\alpha,\beta)$ est donné par une intégrale de fonction continue sur un segment. Pour k dans $[\![0;n-1]\!]$, l'inégalité triangulaire et le caractère lipschitzien permettent d'écrire

$$\begin{aligned}\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n}\psi_{\alpha,\beta}(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{n}\psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{k}{n}\right)\right| &= \left|\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(\psi_{\alpha,\beta}(t)-\psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}t\right|\\ &\leq \int_{k/n}^{(k+1)/n}\left|\psi_{\alpha,\beta}(t)-\psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathrm{d}t\\ &\leq A_{\alpha,\beta}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left|t-\frac{k}{n}\right|\mathrm{d}t\\ &\leq \frac{A_{\alpha,\beta}}{2n^2}\,.\end{aligned}$$

En sommant et en utilisant la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire, il vient

$$|B(\alpha,\beta)-u_n(\alpha,\beta)|\leq\sum_{k=0}^{n-1}\frac{A_{\alpha,\beta}}{2n^2}=\frac{A_{\alpha,\beta}}{2n}\,,$$

i.e. $\boxed{|B(\alpha,\beta)-u_n(\alpha,\beta)|\leq\dfrac{A_{\alpha,\beta}}{2n}.}$

c. Les séries entières définissant S_α et S_β admettent 1 comme rayon de convergence. Il en résulte que leur produit de Cauchy admet un rayon de convergence supérieur à 1 et que la somme de leur produit de Cauchy est le produit de leurs sommes, sur $]-1;1[$. Or le terme général du produit de Cauchy de $\sum n^{\alpha-1}x^n$ et $\sum n^{\beta-1}x^n$ est

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^{\alpha-1}(n-k)^{\beta-1}\,.$$

Le terme pour $k=0$ étant nul, on obtient $u_n(\alpha,\beta)n^{\alpha+\beta-1}$. Il en résulte, pour x dans $]-1;1[$ et donc a fortiori dans $[0;1[$, $\boxed{S_\alpha(x)S_\beta(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(\alpha,\beta)n^{\alpha+\beta-1}x^n.}$

Il en résulte, pour $0\leq x<1$,

$$S_\alpha(x)S_\beta(x)-B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}n^{\alpha+\beta-1}\left(u_n(\alpha,\beta)-B(\alpha,\beta)\right)x^n$$

et donc, en utilisant 2b) et l'inégalité triangulaire

$$|S_\alpha(x)S_\beta(x)-B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)|\leq\sum_{n=0}^{+\infty}n^{\alpha+\beta-1}\frac{A_{\alpha,\beta}}{2n}=\frac{A_{\alpha,\beta}}{2}S_{\alpha+\beta-1}(x)\,,$$

i.e. $\boxed{|S_\alpha(x)S_\beta(x)-B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)|\leq\dfrac{A_{\alpha,\beta}}{2}S_{\alpha+\beta-1}(x).}$

D'après II.B.2b), au voisinage de 1 à gauche,

$$\frac{A_{\alpha,\beta}}{2}S_{\alpha+\beta-1}(x)=O\left((1-x)^{1-\alpha-\beta}\right)=\mathrm{o}\left((1-x)^{-\alpha-\beta}\right)\,,$$

et

$$S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x) = (\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta))\,(1-x)^{-\alpha-\beta} + \mathrm{o}\left((1-x)^{-\alpha-\beta}\right)$$

et il en résulte $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta) = \mathrm{o}\,(1)$. Par unicité de la limite, il vient $\boxed{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha -}$

III.C

III.C.1) Pour α dans $]0;1[$, on a $1-\alpha \in]0;1[$ et donc $B(\alpha, 1-\alpha)$ est bien défini.
Soit f la fonction définie sur $]0;1[\times]0;1[$ par $f(\alpha,t) = t^{\alpha-1}(1-t)^{-\alpha}$ et $[a;b]$ un segment inclus dans $]0;1[$. Alors

— Pour tout α dans $]0;1[$, $t \mapsto f(\alpha,t)$ est continue par morceaux sur $]0;1[$, car de classe C^∞ sur cet intervalle en tant que produit de fonctions puissances d'exposant strictement positif.

— Pour tout t dans $]0;1[$, $\alpha \mapsto f(\alpha,t)$ est continue sur $]0;1[$, car de classe C^∞ sur cet intervalle en tant que produit de fonctions exponentielles de base strictement positive.

— Comme une exponentielle de base inférieure à 1 est positive et décroissante sur $\mathbf{R}_+$, pour α dans $[a;b]$, on a $\forall t \in]0;1[$, $0 \leq f(\alpha,t) \leq t^{a-1}(1-t)^{-b}$. De plus $t \mapsto t^{a-1}(1-t)^{-b}$ est intégrable sur $]0;1[$ puisque $a-1 > -1$ et $-b > -1$.

Il résulte du théorème de continuité sous l'intégrale que la fonction $\alpha \mapsto \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[a;b]$. Elle l'est donc sur $]0;1[$ puisque la continuité est un phénomène local. Autrement dit $\boxed{\alpha \mapsto B(\alpha, 1-\alpha) \text{ est continue sur }]0;1[.}$

III.C.2)

a. Puisque $\dfrac{2p+1}{2q} \in]0;1[$, $B\left(\dfrac{2p+1}{2q}, 1-\dfrac{2p+1}{2q}\right)$ est bien défini.
D'après ((ii)), il vient $B\left(\dfrac{2p+1}{2q}, 1-\dfrac{2p+1}{2q}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{(2(p-q)+1)/2q)}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$
Comme $u \mapsto u^{2q}$, est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}_+^*$ sur lui-même, de bijection réciproque $t \mapsto t^{1/2q}$, il vient par changement de variable :

$$B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1-\frac{2p+1}{2q}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{2(p-q)+1}}{1+u^{2q}}.2qu^{2q-1}\,\mathrm{d}u$$

i.e. $\boxed{B\left(\dfrac{2p+1}{2q}, 1-\dfrac{2p+1}{2q}\right) = 2q\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{2p}}{1+u^{2q}}\,\mathrm{d}u.}$

b. Le polynôme $X^{2q+1}+1$ admet $(z_k, -z_k)_{0\leq k\leq q-1}$ comme racines, toutes de multiplicité 1. Comme X^{2p} est de degré strictement inférieur à celui de $X^{2q}+1$, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^{2p}}{1+X^{2q}}$ s'écrit :

$$\frac{X^{2p}}{1+X^{2q}} = \sum_{k=0}^{q-1}\left(\frac{a_k}{X-z_k} + \frac{b_k}{X+z_k}\right),$$

avec, pour $0 \leq k \leq q-1$, $a_k = \dfrac{z_k^{2p}}{2q(z_k)^{2q-1}}$ et $b_k = \dfrac{(-z_k)^{2p}}{2q(-z_k)^{2q-1}}$ car $(1+X^{2q})' = 2qX^{2q-1}$.

Comme $z_k^{2q} = -1$, il vient $\boxed{\dfrac{X^{2p}}{1+X^{2q}} = -\dfrac{1}{2q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\left(\frac{1}{X-z_k} - \frac{1}{X+z_k}\right)}.$

c. Soit c dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. Pour t réel, on a $(t-\mathrm{Re}(c))^2 + (\mathrm{Im}(c))^2 = |c-t|^2 > 0$ et $\mathrm{Im}(c) \neq 0$. Il en résulte que la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{1}{2}\ln((t-\mathrm{Re}(c))^2 + (\mathrm{Im}(c))^2) + i\arctan\left(\dfrac{t-\mathrm{Re}(c)}{\mathrm{Im}(c)}\right)$ est définie sur $\mathbf{R}$, et est donc de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ puisque les fonctions polynomiales le sont, tout comme l'est arctangente et que ln est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$. Par dérivation il vient, pour t dans $\mathbf{R}$,

$$f'(t) = \frac{t-\mathrm{Re}(c)}{|c-t|^2} + i\frac{1}{\mathrm{Im}(c)}\frac{(\mathrm{Im}(c))^2}{|c-t|^2} = \frac{t-\overline{c}}{(t-c)(t-\overline{c})}$$

et donc

$$\boxed{t \mapsto \frac{1}{2}\ln((t-\mathrm{Re}(c))^2 + (\mathrm{Im}(c))^2) + i\arctan\left(\frac{t-\mathrm{Re}(c)}{\mathrm{Im}(c)}\right) \text{ est une primitive de } t \mapsto \frac{1}{t-c} \text{ sur } \mathbf{R}.}$$

Pour tout k compris entre 0 et $q-1$, z_k est complexe non réel. Il résulte de ce qui précède et de III.C.2b) qu'une primitive de $t \mapsto \dfrac{t^{2p}}{1+t^{2q}}$ sur $\mathbf{R}$ est donnée par la fonction $-\dfrac{1}{2q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}(f_k(t) + ig_k(t))$ où les fonctions f_k et g_k sont données par

$$f_k(t) = \ln\left(\frac{|t-z_k|}{|t+z_k|}\right) \quad \text{et} \quad g_k(t) = \arctan\left(\frac{t-\mathrm{Re}(z_k)}{\mathrm{Im}(z_k)}\right) + \arctan\left(\frac{t+\mathrm{Re}(z_k)}{\mathrm{Im}(z_k)}\right) .$$

Or, pour k dans $[\![0;q-1]\!]$, f_k et g_k admettent des limites en $+\infty$, à savoir 0 et π respectivement, puisque $\mathrm{Im}(z_k) > 0$. Par ailleurs leurs valeurs en 0 respectives sont 0 et 0, par imparité de la fonction arctangente.

Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{2p}}{1+t^{2q}}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$, puisqu'obtenue à partir de la fonction B, il vient en calculant $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,\mathrm{d}t$ comme limite de $\displaystyle\int_0^{x} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$ et en appliquant le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral (Leibniz-Newton)

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,\mathrm{d}t = -i\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}.}$$

Le terme de droite est la somme d'une série géométrique de terme initial z_0^{2p+1}, de raison $e^{i(2p+1)\pi/q}$. Cette raison est distincte de 1 puisque $0 < 2p+1 \leq 2(q-1)+1 < 2q$. Il vient

$$\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} = z_0^{2p+1}\frac{e^{i(2p+1)\pi}-1}{e^{i(2p+1)\pi/q}-1} = -2\frac{e^{i(2p+1)\pi/2q}}{e^{i(2p+1)\pi/q}-1} = \frac{i}{\sin((2p+1)\pi/2q)}$$

et donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2q}\frac{1}{\sin\left(\frac{2p+1}{2q}\pi\right)}.}$

III.C.3) Soit p et q deux entiers tels que $0 < p < q$ et $\alpha = \dfrac{2p+1}{2q}$. D'après III.C.2a) et III.C.2c), on a $B(\alpha, 1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$.

Soit alors α dans $]0;1[$, alors $1-\alpha > 0$ et donc, puisque $\mathbf{R}$ est archimédien, on dispose de n tel que, pour q entier supérieur à n, $q(1-\alpha) > \dfrac{1}{2}$ et $q\alpha > \dfrac{1}{2}$. Pour un tel q, on a $1 < \alpha q + \dfrac{1}{2} < q$, de sorte qu'en prenant pour p la partie entière de $\alpha q + \dfrac{1}{2}$, on a $0 < p < q$. De plus $\dfrac{2p+1}{2q} - \alpha = \dfrac{p+1-(\alpha q+\frac{1}{2})}{q}$ et donc $0 < \dfrac{2p+1}{2q} \leq \dfrac{1}{q}$. Il en résulte que tout élément de $]0;1[$ est limite d'une suite de rationnels de la forme $\dfrac{2p+1}{2q}$ avec p et q entiers tels que $0 < p < q$.

Comme $\alpha \mapsto B(\alpha, 1-\alpha)$ et $\alpha \mapsto \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$ sont continues sur $]0;1[$ et coïncident sur les nombres de la forme $\dfrac{2p+1}{2q}$ avec p et q entiers tels que $0 < p < q$, la caractérisation séquentielle de la limite entraîne qu'elles coïncident sur $]0;1[$, i.e. pour α dans $]0;1[$, $B(\alpha, 1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$. Comme $\Gamma(1) = 1$, il résulte de III.B qu'on a aussi $B(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$. Et donc, pour α dans $]0;1[$,

$$\boxed{B(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.}$$

PARTIE IV - L'opérateur d'Abel

IV.A

IV.A.1) Soit f dans E et x dans $]0;1]$. La fonction g donnée par $g(t) = \dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est continue sur $[0;x[$ en tant que quotient bien défini de telles fonctions. Elle y est donc localement intégrable. Au voisinage de x, on a $g(t) = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{(x-t)^\alpha}\right)$ et donc g est intégrable au voisinage de x puisqu'on a $\alpha < 1$. Il en résulte que g est intégrable sur $[0;x[$ et donc a fortiori sur $]0;x[$, i.e. $\boxed{t \mapsto \dfrac{1}{(x-t)^\alpha} \text{ est intégrable sur }]0;x[.}$

IV.A.2)

a. Pour x dans $]0;1]$, le changement de variable affine bijectif $u \mapsto ux$ donne directement la formule cherchée. Pour x nul, l'intégrale vaut $f(0)/(1-\alpha)$ et donc la formule s'écrit $A_\alpha f(0) = 0$ puisque $1 - \alpha > 0$. Il en résulte, pour f dans E et x dans $[0;1]$,

$$\boxed{A_\alpha f(x) = x^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t.}$$

b. Soit f dans E. Comme une fonction puissance d'exposant strictement positif est continue sur $[0;1]$, il suffit de démontrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est continue. Or

— pour tout x dans $[0;1]$, $t \mapsto \dfrac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}$ est continue par morceaux sur $]0;1[$, car continue par composition par une fonction affine et en tant que quotient bien défini de deux fonctions continues ;

— pour tout t dans $]0;1[$, $x \mapsto \dfrac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}$ est continue sur $[0;1]$ en tant que multiple d'une composée de telles fonctions ;

— pour x dans $[0;1]$, on a : $\forall t \in]0;1]$, $\left|\dfrac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\right| \leq \dfrac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}$ et cette dernière fonction est continue et intégrable sur $]0;1[$.

D'après le théorème de continuité sous le signe intégral, $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[0;1]$, i.e. $\boxed{A_\alpha f \text{ est continue sur } [0;1].}$

c. Par linéarité de l'intégrale, A_α est linéaire et donc d'après la question précédente $\boxed{A_\alpha \text{ est un endomorphisme de } E.}$

Soit f dans E. L'inégalité de la moyenne appliqué à 2a) donne, pour x dans $[0;1]$,

$$|A_\alpha f(x)| \leq |x|^{1-\alpha} \|f\| \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^\alpha} = \frac{\|f\| \, |x|^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

et donc, puisque $|x| \leq 1$ et $1-\alpha \geq 0$, $\|A_\alpha f\| \leq \|f\| / (1-\alpha)$. Il vient $\|A_\alpha\| \leq \dfrac{1}{1-\alpha}$.

Par ailleurs pour f constante égale à 1 et x dans $[0;1]$, il vient $A_\alpha f(x) = x^{1-\alpha}/(1-\alpha)$ et cette fonction est positive, croissante et égale à $1/(1-\alpha)$ en 1. Comme $\|f\| = 1$, on a $\|A_\alpha f\| = \|f\| / (1-\alpha)$ et donc $\|A_\alpha\| \geq \dfrac{1}{1-\alpha}$. Par conséquent $\boxed{\|A_\alpha\| = \dfrac{1}{1-\alpha}.}$

IV.B

IV.B.1)

a. Soit f dans E. Pour n dans $\mathbf{N}^*$, soit $(\mathbf{H}_n)$ le prédicat :

$$\forall x \in [0;1] \ , \quad |A_\alpha f(x)| \leq \frac{x^{n\beta}\Gamma(\beta)^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\| \ .$$

Soit x dans $[0;1]$. On a vu dans la démonstration de la question précédente qu'on a $|A_\alpha f(x)| \leq x^\beta \dfrac{\|f\|}{\beta}$. Comme, d'après les rappels, $\Gamma(\beta)/\Gamma(1+\beta) = \dfrac{1}{\beta}$, il en résulte que $(\mathbf{H}_1)$ est vrai.

Soit n dans $\mathbf{N}^*$ tel que $(\mathbf{H}_n)$ est vrai et x dans $[0;1]$. D'après l'inégalité de la moyenne il vient

$$\left|A_\alpha^{n+1} f(x)\right| \leq x^\beta \frac{x^{n\beta}\Gamma(\beta)^n \|f\|}{\Gamma(1+n\beta)} \int_0^1 \frac{t^{n\beta}}{(1-t)^\alpha}$$

i.e.

$$\left|A_\alpha^{n+1} f(x)\right| \leq \frac{x^{(n+1)\beta}\Gamma(\beta)^n \|f\|}{\Gamma(1+n\beta)} B(n\beta+1,\beta) \ .$$

Or, d'après III.B, $B(n\beta+1,\beta) = \dfrac{\Gamma(1+n\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(1+(n+1)\beta)}$, et il en résulte que $(\mathbf{H}_{n+1})$ est vrai. Par le principe de récurrence, on en déduit, pour tout n dans $\mathbf{N}^*$,

$$\boxed{\forall x \in [0;1],\ |A_\alpha f(x)| \leq \frac{x^{n\beta}\Gamma(\beta)^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|.}$$

b. Soit n dans $\mathbf{N}^*$, en tant que composé d'éléments de $\mathscr{L}(E)$,

$\boxed{A_\alpha^n \text{ est un endomorphisme continu de } E.}$

La question précédente donne, pour x est dans $[0;1]$, $|A_\alpha f(x)| \leq \dfrac{\Gamma(\beta)^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$ et donc $\boxed{\|A_\alpha^n\| \leq \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}}$

IV.B.2) Pour $\gamma = 0$, la suite considérée est identiquement nulle, donc de limite nulle. Soit γ dans $\mathbf{R}_+^*$, alors $\gamma\Gamma(\beta)$ est un réel strictement positif et on dispose donc de δ dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que $\delta^\beta = \gamma\Gamma(\beta)$. D'après 3, on a $\delta^{1+n\beta} = \mathrm{o}\left(\Gamma(1+n\beta)\right)$, i.e. $\dfrac{1}{\Gamma(1+n\beta)} = \mathrm{o}\left(\delta^{-1-n\beta}\right)$, de sorte qu'on a

$$\gamma^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = \frac{\delta^{n\beta}}{\Gamma(1+n\beta)} = \mathrm{o}\left(\delta^{n\beta-1-n\beta}\right) = \mathrm{o}\left(\delta\right) = \mathrm{o}\left(1\right)$$

et donc, pour γ dans $\mathbf{R}_+$, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \gamma^n \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = 0.}$

IV.B.3)

a. On considère la série entière $\sum \|A_\alpha^n f\| z^n$. D'après IV.B.1) et IV.B.2), le terme général de cette série est borné pour tout z dans $\mathbf{C}$ et il en résulte que la série entière a un rayon de convergence infini. En particulier, pour λ dans $\mathbf{C}^*$, la série $\sum \|A_\alpha^n f\| \lambda^n$ converge absolument et donc la série de fonctions $\sum \lambda^n A_\alpha^n f$ est normalement convergente. En particulier $\boxed{\sum \lambda^n A_\alpha^n f \text{ converge uniformément sur } [0;1].}$

b. Puisque A_α est un endomorphisme continu et que g est la limite des sommes partielles de la série $\sum \lambda^n A_\alpha^n f$ au sens de la norme de E, $A_\alpha g$ est limite des sommes partielles de la série $\sum \lambda^n A_\alpha^{n+1} f$ et donc $\lambda A_\alpha g$ est somme de la série $\sum_{n\geq 1} \lambda^n A_\alpha^n f$, d'où $(\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha)g = \lambda^0 A_\alpha^0 f = f$ puisque $\lambda \neq 0$, i.e. $\boxed{(\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha)g = f.}$

c. Soit u dans E. D'après ce qui précède appliqué à $f = u$, u appartient à l'image de $\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha$ et donc cette dernière application est surjective.

Supposons maintenant que u soit dans le noyau de $\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha$, i.e. $u = \lambda A_\alpha u$. Alors pour tout entier n, on a $u = \lambda^n A_\alpha^n u$ et donc $\|u\| \leq |\lambda|^n \|A_\alpha^n\| \cdot \|u\|$ et donc, en utilisant IV.B.1a) et IV.B.2, $\|u\| \leq 0$. Il en résulte que $\boxed{\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha \text{ est inversible.}}$

De plus la question précédente montre que $\boxed{\text{son inverse est } \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n.}$

IV.C

IV.C.1)

a. Soit x dans $[0;1]$, on a

$$A_\alpha e_n(x) = x^\beta \int_0^1 \frac{(xt)^n}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t = x^{\beta+n} B(n+1,\beta)$$

et donc $\boxed{A_\alpha e_n \text{ est la fonction } x \mapsto B(n+1,\beta)x^{\beta+n}.}$

b. Le calcul précédent est valable en prenant n dans $\mathbf{R}_+$ en convenant que e_n est donné par $e_n(x) = x^n$. Il vient alors, par linéarité, $A_\beta \circ A_\alpha e_n = B(n+1,\beta)B(n+\beta+1,\alpha)e_{n+1}$. Or, d'après III.B,

$$B(n+1,\beta)B(n+\beta+1,\alpha) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+1+\beta)\Gamma(n+2)} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{n+1}$$

puisque $\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1)$. Il vient, en utilisant III.C.3),

$$\boxed{(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)e_n = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \frac{e_{n+1}}{n+1}.}$$

IV.C.2) Puisque, pour n dans $\mathbf{N}$, on a $(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)e_n = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} P e_n$, et que A_α, $A_{1-\alpha}$ et P sont des applications linéaires, l'identité $A_{1-\alpha} \circ A_\alpha = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} P$ est vraie sur l'espace vectoriel engendré par $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et donc, pour toute fonction polynomiale ψ, on a $\boxed{(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)\psi = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} P\psi.}$

IV.C.3)

a. Les primitives d'une fonction continue étant continue, P est bien un endomorphisme de E. De plus, par inégalité de la moyenne, pour f dans E, on a $\|Pf\| \leq \|f\|$ et donc $\boxed{P \text{ est un endomorphisme continu de}}$

L'inégalité précédente montre qu'on a $\|P\| \leq 1$. Comme $Pe_0 = e_1$ et $\|e_0\| = \|e_1\| = 1$, il vient $\boxed{\|P\| = 1.}$

b. D'après le théorème de Weierstrass, l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[0;1]$ est dense dans E pour la norme $\|\cdot\|$. Comme B_α et $\dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}P$ sont deux applications continues sur E et coïncident sur les fonctions polynomiales, elles sont égales, i.e. $\boxed{B_\alpha = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}P.}$

c. Comme toute primitive d'une fonction continue est de classe C^1, pour f dans E, Pf est de classe C^1 et donc $B_\alpha f$ aussi d'après ce qui précède. Il en résulte que
$\boxed{D \circ B_\alpha \text{ est bien défini.}}$
De plus $D \circ P = \mathrm{Id}_E$ d'après le théorème de Leibniz-Newton et donc la question précédente donne aussi $\boxed{D \circ B_\alpha = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\mathrm{Id}_E.}$

d. Il en résulte que $D \circ A_{1-\alpha} \circ A_\alpha$ est injectif, puisque Id_E l'est et qu'on a $\dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \neq 0$. Par conséquent $\boxed{A_\alpha \text{ est injectif.}}$