

## Définitions et notations

On dira qu'une série termes réels est semi-convergente si elle converge sans converger absolument.

On dira qu'une suite  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  valeurs complexes vérifie la propriété  $(P_1)$  si pour toute suite complexe  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  bornée, la série  $\sum a_n u_n$  converge.

On dira qu'une suite  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  valeurs réelles vérifie la propriété  $(P_2)$  si pour toute suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , la convergence de la série  $\sum u_n$  entraîne celle de la série  $\sum a_n u_n$ .

L'objectif du problème est d'étudier, en particulier à l'aide de méthodes algorithmiques, des propriétés et des contre-exemples de la théorie des suites et des séries et de caractériser simplement les suites qui vérifient  $(P_1)$  ou  $(P_2)$ .

Les parties I et II sont indépendantes. Les programmes seront écrits en langage PYTHON.

### PARTIE I - Réorganisation des termes d'une série semi-convergente

On se donne un réel  $x$ . On note, pour  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$  et on se propose de construire une bijection  $s$  de  $\mathbf{N}^*$  dans  $\mathbf{N}^*$  telle que  $\sum_{n=1}^{\infty} u_{s(n)} = x$ .

#### I.A

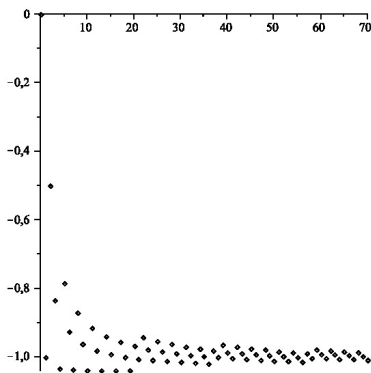
On définit simultanément par récurrence trois suites d'entiers naturels  $(p_n)_{n \geq 0}$ ,  $(q_n)_{n \geq 0}$ ,  $(s_n)_{n \geq 1}$  et une suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  de réels de la manière suivante :

- $p_0 = q_0 = 0$ ,  $S_0 = 0$ ;
- pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , si  $S_n > x$  alors :  $q_{n+1} = 1 + q_n$ ,  $p_{n+1} = p_n$ ,  $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$
- sinon :  $q_{n+1} = q_n$ ,  $p_{n+1} = 1 + p_n$ ,  $s_{n+1} = 2p_{n+1}$  ;
- dans les deux cas :  $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$ .

On aura intérêt comprendre la construction précédente sous forme algorithmique.

I.A.1. Écrire une fonction `suite` qui prend en argument  $x$  et l'entier  $n$  et qui renvoie l'affichage de la liste (ou tableau si l'on préfère)  $[s_1, s_2, \dots, s_n]$ .

I.A.2. En modifiant la fonction précédente de façon à ce quelle retourne le dessin simultané de la liste des points de coordonnées  $(n, S_n)_{n \leq 70}$  et de la droite horizontale d'ordonnée  $x$  (on ne demande pas d'écrire cette nouvelle fonction), on obtient pour  $x = -1$ ,  $n = 70$  le dessin suivant :



Que constate-t-on pour la suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  ? Expliquer le principe de l'algorithme.

## I.B

On pose dorénavant, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $s(n) = s_n$ . Démontrer, pour  $n \geq 1$ , les propriétés suivantes :

$$\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}$$

$$p_n + q_n = n$$

$$S_n = u_{s(1)} + \dots + u_{s(n)}$$

En déduire que  $s$  est injective.

## I.C

I.C.1. Démontrer qu'une suite d'entiers convergente est constante partir d'un certain rang.

I.C.2. On se propose de démontrer que la suite  $(p_n)_{n \geq 0}$  croît vers  $+\infty$ .

a. On suppose dans un premier temps que cette suite est majorée. Utiliser la question I.C.1 pour démontrer qu'il existe un entier  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,

$$S_n > x \quad \text{et} \quad S_n = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1}.$$

En déduire une contradiction.

b. Déduire du raisonnement précédent que la suite  $(p_n)_{n \geq 0}$  diverge vers  $+\infty$ .

I.C.3. Justifier rapidement que  $(q_n)$  tend vers  $+\infty$ .

I.C.4. Déduire de ce qui précède que  $s$  est une bijection de  $\mathbf{N}^*$  sur lui-même.

## I.D

I.D.1. Démontrer que, pour tout entier  $n \geq 0$ , on a :  $|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x|$  ou  $|S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|$ .

I.D.2. En déduire que pour tout naturel  $N$ , il existe un entier  $n > N$  tel que  $|S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|$ .

I.D.3. Justifier l'existence d'un entier  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,  $p_n \geq 1$  et  $q_n \geq 1$ .

I.D.4. Soit  $n \geq n_0$ . On note  $v_n = \max(|S_n - x|, |u_{2p_{n+1}}|, |u_{2q_{n+1}-1}|)$ . Démontrer que  $(v_n)_{n \geq n_0}$  est décroissante. En déduire qu'elle converge vers 0.

I.D.5. Démontrer que  $(S_n)$  converge vers  $x$  et conclure.

## I.E

I.E.1. Démontrer l'existence d'une constante  $\gamma > 0$  telle que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

I.E.2. Donner un développement analogue pour  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$  en fonction de  $\gamma$ .

I.E.3. a. Justifier, pour tout naturel  $n$  tel que  $p_n \geq 1$  et  $q_n \geq 1$ , l'égalité :  $S_n = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}$ .

b. En déduire :  $S_n = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p_n}{n-p_n}\right) - \ln(2) + o(1)$ .

c. En déduire un équivalent simple de  $p_n$  et de  $q_n$ .

d. Déterminer la limite de :

$$\frac{|u_{s(1)}| + |u_{s(2)}| + \dots + |u_{s(n)}|}{|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

## PARTIE II - Suites vérifiant $(P_1)$ et $(P_2)$

### II.A

Montrer qu'une suite complexe  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  telle que la série  $\sum a_n$  converge absolument vérifie  $(P_1)$ .

### II.B

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite réelle telle que la série  $\sum |a_{n+1} - a_n|$  converge.

II.B.1. Démontrer que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  possède une limite.

II.B.2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite réelle telle que la série  $\sum u_n$  converge.

On note  $U_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ . Démontrer, pour tout entier naturel  $N$ , la relation :

$$\sum_{n=0}^N a_n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) U_n + a_N U_N .$$

En déduire que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  vérifie  $(P_2)$ .

### II.C

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de nombres complexes telle que la série  $\sum |a_n|$  diverge. Construire une suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de nombres complexes de module 1 telle que la série  $\sum a_n u_n$  diverge. Caractériser les suites complexes  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  vérifiant  $(P_1)$ .

### II.D

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de réels positifs telle que la série  $\sum a_n$  diverge. On se propose de construire une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$  tendant vers 0 telle que la série  $\sum a_n \varepsilon_n$  diverge. Pour cela on définit par récurrence trois suites  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ,  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$  comme suit :

—  $p_0 = 0$ ,  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $A_0 = a_0$ .

— Pour  $n \geq 1$  : 
$$\begin{cases} p_n = 1 + p_{n-1} & \text{et } \varepsilon_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2} & \text{si } A_{n-1} \geq p_{n-1} \\ p_n = p_{n-1} & \text{et } \varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans tous les cas :  $A_n = A_{n-1} + a_n \varepsilon_n$ .

II.D.1. Dans cette question seulement on suppose  $a_0 = 1$  et, pour tout  $n \geq 1$ ,  $a_n = \frac{9}{4(n+1)}$ .

Déterminer les six premiers termes des suites  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ,  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

Écrire une procédure **exemple** qui prend en argument l'entier  $n$  et retourne la liste :

$$[[0, p_0, \varepsilon_0, A_0], [1, p_1, \varepsilon_1, A_1], \dots, [n, p_n, \varepsilon_n, A_n]] .$$

II.D.2. a. Démontrer que pour tout naturel  $N$ , il existe un entier  $n > N$  tel que :  $p_n = 1 + p_{n-1}$  (on pourra raisonner par l'absurde).

En déduire qu'on peut définir une suite  $(n_k)_{k \in \mathbf{N}}$  strictement croissante d'entiers par :

$$\begin{cases} n_0 = 0 \\ n_{k+1} = \min \{n \in \mathbf{N} \mid n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\} & \text{pour } k \geq 0 . \end{cases}$$

b. Dans le cas général, calculer  $p_{n_k}$ ,  $\varepsilon_{n_k}$ .

Démontrer que la suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$  tend vers 0 et que la série  $\sum \varepsilon_n a_n$  diverge.

c. Déterminer  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_3$  pour l'exemple de la question II.D.1).

II.D.3. Dans cette question seulement on suppose :  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $a_n = \frac{1}{n+1}$ .

a. Écrire une fonction **indexer** prenant en argument l'entier  $n$  et renvoyant  $[[0, n_0], [1, n_1], \dots, [q, n_q]]$  où  $q$  est le plus grand des entiers  $k$  tel que  $n_k \leq n$ . Par exemple l'appel de **indexer**(10000) renvoie :

$$[[0, 0], [1, 1], [2, 2], [3, 51]] .$$

b. Soit  $k \geq 3$  un indice tel que  $n_k - 2 > n_{k-1}$ . Démontrer l'inégalité :

$$k - 1 \leq A_{n_k-1} \leq k - 1 + \frac{1}{2^{k-1}n_k} .$$

En déduire  $n_{k+1} - 2 > n_k$ .

c. Calculer explicitement la différence  $A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1}$  en fonction de  $k$ ,  $n_k$  et  $n_{k+1}$ . En déduire, pour  $k \geq 3$ , l'inégalité :

$$\frac{1}{2^k} \ln \left( \frac{n_{k+1} + 1}{n_k + 1} \right) \leq A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} \leq \frac{1}{2^k} \ln \left( \frac{n_{k+1}}{n_k} \right) .$$

d. Déduire des deux questions précédentes, pour  $k \geq 3$ , l'inégalité :

$$2^k - \frac{2}{n_k} \leq \ln \left( \frac{n_{k+1}}{n_k} \right) \leq 2^k + \frac{1}{n_{k+1}} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n_{k+1}} \right) + \ln \left( 1 + \frac{1}{n_k} \right) .$$

e. En utilisant une série convenable, étudier la convergence de la suite de terme général  $(\ln(n_k) - 2^k)$ ; puis démontrer l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que :

$$n_k \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C \exp(2^k) .$$

En déduire

$$A_{n_k} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln(\ln(n_k))}{\ln(2)}$$

puis

$$A_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(2)} .$$

Que peut-on penser de l'exécution de la fonction `indexer` ?

## II.E

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de réels quelconques telle que, pour toute suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de réels tendant vers 0, la série  $\sum \varepsilon_n a_n$  converge.

II.E.1. Démontrer que la série  $\sum \varepsilon_n |a_n|$  converge.

II.E.2. En déduire que la série  $\sum |a_n|$  converge.

## II.F

Soit maintenant  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de réels telle que, pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , la convergence de la série  $\sum x_n$  entraîne la convergence de la série  $\sum a_n x_n$ .

II.F.1. Démontrer que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est bornée.

II.F.2. Soit  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite réelle de limite nulle. Démontrer la convergence de la série  $\sum \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n)$ .

II.F.3. Démontrer que la série  $\sum |a_{n+1} - a_n|$  converge.

II.F.4. Caractériser les suites vérifiant  $(P_2)$ .

## PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – CENTRALE 2009 – PSI

Dans ce problème on note  $\Delta$  l'opérateur défini sur les suites à valeurs complexes par  $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ .

## PARTIE I - Réorganisation des termes d'une série semi-convergente.

## I.A

## I.A.1. Par définition

```
#!/usr/bin/python3

def u(n):
    # u(n)=u_n=(-1)^n/n
    return pow(-1,n)/n

def suite(x,n):
    p=q=S=0 # initialisation : p_0=q_0=S_0=0
    list=[] # liste vide : pour stocker s_1,...,s_n
    for k in range(n): # boucle pour k entre 0 et n-1
        if S>x : # si S_k>x
            q+=1 # q_{k+1}=q_k+1, p_{k+1}=p_k
            s=2*q-1 # s_{k+1}=2q_{k+1}-1
        else : # si S_k<=x
            p+=1 # q_{k+1}=q_k, p_{k+1}=p_k+1
            s=2*p # s_{k+1}=2p_{k+1}
        list.append(s) # on augmente la liste de s_{k+1}
        S+=u(s) # S=S_{k+1}=S_k+u_{s_{k+1}} / fin boucle
    return print(list) # renvoie l'affichage de [s_1,...s_n]
```

I.A.2. Dans l'exemple  $S_n$  tend vers  $-1$ . On peut conjecturer qu'en général  $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $x$ .

On choisit  $(s_n)$  de sorte que  $(S_n)$  converge vers  $x$  en oscillant : en regroupant par paquets les termes  $(s_n)$  de même signe,  $(S_n)$  admet une suite extraite dont les termes d'indices pairs et impairs forment deux suites de monotonies contraires que l'on espère adjacentes et convergeant vers  $x$ .

À chaque étape, soit  $S_n$  est inférieur à  $x$  et alors on lui rajoute le plus grand terme positif non utilisé (i.e. celui correspondant au terme de plus petit indice pair) et sinon on rajoute le terme négatif de valeur absolue la plus grande non encore utilisé (i.e. celui correspondant au terme de plus petit indice impair).

## I.B

Soit  $(\mathbf{H}_n)$  le prédicat pour  $n$  dans  $\mathbf{N}$  donné par :  $p_n + q_n = n$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n u_{s(k)}$  et

$$s(\{i \in \mathbf{N}^* \mid i \leq n\}) = \{2k \mid k \in \mathbf{N}^*, k \leq p_n\} \cup \{2k-1 \mid k \in \mathbf{N}^*, k \leq q_n\} .$$

Par construction  $(\mathbf{H}_0)$  est vrai puisque les ensembles considérés sont vides et les nombres tous nuls.

Soit maintenant  $n$  dans  $\mathbf{N}$  tel que  $(\mathbf{H}_n)$  est vrai. Si  $S_n > x$ , alors  $q_{n+1} = q_n + 1$ ,  $p_{n+1} = p_n$ ,  $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$  et  $S_{n+1} = S_n + u_{s(n+1)}$ . Si au contraire  $S_n \leq x$ , alors  $q_{n+1} = q_n$ ,  $p_{n+1} = p_n + 1$ ,  $s_{n+1} = 2p_{n+1}$  et  $S_{n+1} = S_n + u_{s(n+1)}$ . Dans le premier cas, on a

$$\{s(1), \dots, s(n), s(n+1)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1, 2q_{n+1} - 1\}$$

et donc aussi

$$\{s(1), \dots, s(n), s(n+1)\} = \{2, 4, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1, 2q_{n+1} - 1\}$$

puisque  $2p_{n+1} = 2p_n$ . Dans le second cas, on a

$$\{s(1), \dots, s(n), s(n+1)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n, 2p_{n+1}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}$$

et donc aussi

$$\{s(1), \dots, s(n), s(n+1)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n, 2p_{n+1}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_{n+1} - 1\}$$

puisque  $2q_{n+1} - 1 = 2q_n - 1$ .

De plus, dans les deux cas,  $p_{n+1} + q_{n+1} = p_n + q_n + 1 = n + 1$  et  $S_{n+1} = \sum_{k=1}^n u_{s(k)} + u_{s(n+1)} = \sum_{k=1}^{n+1} u_{s(k)}$ . On en déduit que  $(\mathbf{H}_{n+1})$  est vrai et donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier  $n$  dans  $\mathbf{N}^*$ , on a

$$\boxed{\{s(1), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}, p_n + q_n = n \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^n u_{s(k)}.$$

Pour  $n$  dans  $\mathbf{N}^*$ , les bijections  $k \mapsto 2k$  et  $k \mapsto 2k - 1$  montrent que les cardinaux de  $\{2, 4, \dots, 2p_n\}$  et  $\{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}$  sont respectivement  $p_n$  et  $q_n$ . Comme  $\mathbf{N}$  est partitionné entre nombres pairs et nombres impairs, les deux ensembles précédents sont d'intersection vide et donc, d'après  $(\mathbf{H}_n)$ ,  $\{s(1), \dots, s(n)\}$  est de cardinal  $p_n + q_n$ , i.e.  $n$ . Autrement dit, puisqu'on a affaire des ensembles de cardinal fini et que  $s$  induit une surjection de  $\llbracket 1; n \rrbracket$  sur son image par  $s$ ,  $s$  induit une bijection de  $\llbracket 1; n \rrbracket$  sur son image. En particulier pour  $k$  et  $\ell$  deux entiers naturels non nuls et distincts, en utilisant ce résultat avec  $n = \max(k, \ell)$ , on en déduit  $s(k) \neq s(\ell)$ , i.e.  $s$  est injective.

### I.C

I.C.1. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite convergente d'entiers. Alors  $(\Delta a_n)$  converge vers 0 et on dispose de  $n_0$  dans  $\mathbf{N}$  tel que, pour  $n \geq n_0$ ,  $|\Delta a_n| < 1$ . Puisqu'on a affaire à des entiers, il vient alors  $\Delta a_n = 0$ , i.e.  $a_{n+1} = a_n$ , et par conséquent la suite  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est constante à partir du rang  $n_0$ .

I.C.2. a. Par définition la suite  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est croissante. Par conséquent, si elle est majorée, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge. D'après ce qui précède, elle est alors stationnaire. On dispose donc de  $n_0$  tel que  $(p_n)_{n \geq n_0}$  soit constante. Soit alors  $n$  supérieur à  $n_0$ . Puisque  $p_{n+1} = p_n$ , on a  $q_{n+1} = q_n + 1$ ,  $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$  et  $S_n > x$ . De plus on a  $q_{n+1} = n + 1 - p_{n+1} = n + 1 - p_{n_0} = n + 1 - n_0 + q_{n_0}$  et donc  $s_{n+1} = 2q_{n_0} + 2n - 2n_0 + 1$ . Par définition de  $S_n$ , on a  $S_n = S_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} u_{s_{k+1}}$ ,

$$\text{soit } S_n = S_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1}.$$

La série  $\sum_{k \geq n_0} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1}$  est à termes positifs et son terme général est équivalent à  $\frac{1}{2k}$ . C'est donc une série divergente vers  $+\infty$ . Il en résulte que  $S_n$  tend vers  $+\infty$ , ce qui est contradictoire avec le fait que  $(S_n)_{n \geq n_0}$  est minoré par  $x$ . Donc  $(p_n)_{n \geq n_0}$  n'est pas majoré.

b. Puisque la suite  $(p_n)$  est croissante, d'après le théorème de convergence monotone soit elle est majorée et convergente, soit elle diverge vers  $+\infty$ . D'après ce qui précède, il vient  $\lim p_n = +\infty$ .

I.C.3. Si  $(q_n)$  est majoré, elle converge et donc est stationnaire. Il en résulte qu'à partir d'un certain rang  $(S_n)$  est majoré par  $x$  et  $u_{s_k}$  est équivalent à  $\frac{1}{2k}$ . La suite  $(S_n)$  ne pouvant à la fois être majorée et diverger vers  $+\infty$ , on en déduit une contradiction et donc, par convergence monotone, que  $(q_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

I.C.4. D'après I.B l'image de  $s$  est incluse dans  $\mathbf{N}^*$ ; d'après I.B et I.C.2.b et puisque

$$\lim_n \uparrow \{2, \dots, 2p_n\} = \lim_m \uparrow \{2, \dots, 2m\} = 2\mathbf{N}^*,$$

elle contient tous les entiers pairs strictement positifs, et d'après I.B et I.C.3 et puisque

$$\lim_n \uparrow \{1, \dots, 2q_n - 1\} = \lim_m \uparrow \{1, \dots, 2m - 1\} = 1 + 2\mathbf{N},$$

elle contient aussi tous les nombres impairs strictement positifs. Par conséquent  $s$  est une surjection de  $\mathbf{N}^*$  sur  $\mathbf{N}^*$ . Puisque  $s$  est également injective, d'après I.B,  $s$  est une bijection de  $\mathbf{N}^*$  sur lui-même.

### I.D

I.D.1. Soit  $n$  dans  $\mathbf{N}$ . Puisque  $S_n - x$  et  $u_{s(n+1)}$  sont de signes contraires et que  $S_{n+1} - x$  est la somme de ces deux termes, on a

$$|S_{n+1} - x| = \left| |S_n - x| - |u_{s(n+1)}| \right| \leq \max(|S_n - x|, |u_{s(n+1)}|)$$

et donc  $|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x|$  ou  $|S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|$ .

I.D.2. Soit  $N$  un entier naturel. Puisque  $\lim p_n = \lim q_n = +\infty$ , le signe de  $(S_n - x)_{n > N}$  n'est pas constant et on dispose donc de  $n$  vérifiant  $n > N$  et  $(S_n - x)(S_{n+1} - x) \leq 0$  et donc  $x$  appartient au segment d'extrémités  $S_n$  et  $S_{n+1}$  et  $|S_{n+1} - x| \leq |S_n - S_{n+1}|$ . Comme  $|S_n - S_{n+1}| = |u_{s(n+1)}|$ , la question précédente permet de conclure  $|S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|$ .

I.D.3. Comme on a  $\lim p_n = \lim q_n = +\infty$ , on dispose de  $n_1$  et  $n_2$  entiers tels que, pour  $n \geq n_1$ , on a  $p_n \geq 1$  et, pour  $n \geq n_2$ , on a  $q_n \geq 1$ . En prenant  $n_0 = \max(n_1, n_2)$  il vient, pour  $n \geq n_0$ ,  $p_n \geq 1$  et  $q_n \geq 1$ .

I.D.4. Puisque  $s(n+1)$  est égal soit à  $2p_{n+1}$  soit à  $2q_{n+1} - 1$ , on a  $|u_{s(n+1)}| \leq \max(|u_{2p_{n+1}}|, |u_{2q_{n+1}-1}|)$  et donc, d'après I.D.1,  $|S_{n+1} - x| \leq v_n$ . Les suites  $(p_k)_{k \geq n_0}$  et  $(q_k)_{k \geq n_0}$  sont à valeurs dans  $\mathbf{N}^*$  et sont croissantes, tout comme les applications affines de  $\mathbf{N}^*$  dans lui-même  $r \mapsto 2r$  et  $r \mapsto 2r - 1$ , et la suite  $(|u_k|)_{k \in \mathbf{N}^*}$  est décroissante, donc, par composition,  $(|u_{2p_k}|)_{k \geq n_0}$  et  $(|u_{2q_k-1}|)_{k \geq n_0}$  sont décroissantes. En particulier elles sont majorées par  $(v_k)_{k \geq n_0}$ . Par passage au maximum, il vient  $v_{n+1} \leq v_n$  et donc  $(v_n)_{n \geq n_0}$  est décroissante.

Étant décroissante et minorée par 0, la suite  $(v_n)_{n \geq n_0}$  converge vers un réel positif. Comme  $(p_n)$  et  $(q_n)$  tendent vers l'infini, d'après I.C.2.b et I.C.3, les suites  $(u_{2p_{n+1}})$  et  $(u_{2q_{n+1}-1})$  tendent vers 0 et donc, par encadrement et d'après I.D.2, une sous-suite de  $(v_n)$  converge vers 0. Par unicité de la limite

$$\lim v_n = 0.$$

I.D.5. Pour  $n \geq n_0$ , on a  $0 \leq |S_n - x| \leq v_n$  et donc, par encadrement  $\lim(S_n - x) = 0$ , i.e.  $\lim S_n = x$ .

Il résulte de I.C.4 et ce qui précède que

$$s \text{ est une bijection de } \mathbf{N}^* \text{ dans lui-même telle que } \sum_{n=1}^{+\infty} u_{s(n)} = x.$$

**I.E**

I.E.1. Puisque la fonction inverse est continue et décroissante sur  $[1; +\infty[$ , le théorème de comparaison entre séries et intégrales permet d'affirmer que la série de terme général  $\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$  est convergente, de somme strictement positive. Comme on a, d'après la relation de CHASLES,

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

on dispose de  $\gamma$  dans  $\mathbf{R}_+^*$  tel que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n+1) + \gamma + o(1)$  et donc, puisque  $\ln(n+1) = \ln(n) +$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n) + o(1), \text{ il vient } \boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)}.$$

I.E.2. Pour  $n$  dans  $\mathbf{N}^*$ , on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(2n) - \frac{1}{2} \ln(n) + \frac{\gamma}{2} + o(1)$$

$$\text{et donc } \boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2} \ln(n) + \ln(2) + \frac{\gamma}{2} + o(1)}.$$

I.E.3. a. Soit  $n$  tel que  $p_n \geq 1$  et  $q_n \geq 1$ . D'après I.B il vient

$$S_n = \sum_{k \in s([1; n])} u_k = \sum_{k \in \{2, \dots, 2p_n\}} u_k + \sum_{k \in \{1, \dots, 2q_n - 1\}} u_k$$

$$\text{et donc } \boxed{S_n = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}}.$$

b. Puisque  $\lim p_n = \lim q_n = +\infty$ , on a d'après I.E.1 et I.E.2

$$\sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} (\ln(p_n) + \gamma + o(1)) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2} \ln(q_n) + \ln(2) + \frac{\gamma}{2} + o(1)$$

$$\text{et donc, par sommation et puisqu'on a } p_n + q_n = n, \quad \boxed{S_n = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p_n}{n - p_n}\right) - \ln(2) + o(1)}.$$

c. Puisque  $\lim S_n = x$ , il vient aussi

$$\ln\left(\frac{p_n}{n - p_n}\right) = 2x + 2\ln(2) + o(1)$$

et donc, par continuité de l'exponentielle sur  $\mathbf{R}$ ,  $\lim \frac{p_n}{n - p_n} = 4e^{2x}$ . Or, pour  $n$  tel que  $p_n \geq 1$  et

$q_n \geq 1$ , on a  $\frac{p_n}{n - p_n} = \frac{1}{\frac{n}{p_n} - 1}$  et donc, par continuité de la fonction  $t \mapsto \frac{1}{\frac{1}{t} + 1}$  sur  $\mathbf{R}_+^*$  et puisque

$4e^{2x} > 0$ , il vient  $\lim \frac{p_n}{n} = \frac{1}{\frac{e^{-2x}}{4} + 1} = \frac{4}{4 + e^{-2x}}$  et  $\lim \frac{q_n}{n} = \lim \left(1 - \frac{p_n}{n}\right) = \frac{e^{-2x}}{4 + e^{-2x}} = \frac{1}{1 + 4e^{2x}}$ .

$$\text{On en conclut } \boxed{p_n \sim \frac{4n}{4 + e^{-2x}} \text{ et } q_n \sim \frac{n}{1 + 4e^{2x}}}.$$



d. Il résulte de I.B qu'on a

$$\sum_{k=1}^n |u_{s(k)}| = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}$$

et donc, d'après I.E.1 et I.E.2,

$$\sum_{k=1}^n |u_{s(k)}| = \frac{1}{2} \ln(p_n) + \frac{1}{2} \ln(q_n) + O(1) = \ln(\sqrt{p_n q_n}) + O(1)$$

et

$$\sum_{k=1}^n |u_k| = \ln(n) + O(1) \sim \ln(n).$$

Comme  $\frac{\sqrt{p_n q_n}}{n}$  admet une limite dans  $\mathbf{R}_+^*$ , d'après I.E.3.c, il vient, par continuité du logarithme,

$\ln\left(\frac{\sqrt{p_n q_n}}{n}\right) = O(1)$  et donc  $\ln(\sqrt{p_n q_n}) = \ln(n) + O(1) \sim \ln(n)$ . On en conclut

$$\frac{\sum_{k=1}^n |u_{s(k)}|}{\sum_{k=1}^n |u_k|} = 1.$$

## PARTIE II - Suites vérifiant $(P_1)$ et $(P_2)$

### II.A

Soit  $\sum a_n$  une série absolument convergente et  $(u_n)$  une suite bornée, on a donc  $|a_n u_n| = O(|a_n|)$  et donc, par comparaison, la série  $\sum a_n u_n$  est absolument convergente. En particulier elle est convergente et

$(a_n)$  vérifie  $(P_1)$ .

### II.B

II.B.1. Puisque la série  $\sum \Delta a_n$  est absolument convergente, elle est convergente. Or cette série converge si et seulement si la suite  $(a_n)$  converge, et sa somme est alors  $\lim a_n - a_0$ . Il en résulte que  $(a_n)$  converge.

II.B.2. Soit  $N$  dans  $\mathbf{N}$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (a_n \Delta U_{n-1} + U_n \Delta a_n) &= \sum_{n=1}^N (U_n a_{n+1} - U_{n-1} a_n) = U_N a_{N+1} - U_0 a_1 \\ &= U_N a_N + U_N \Delta a_N - U_0 \Delta a_0 - a_0 U_0 \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{n=0}^N a_n u_n = a_0 U_0 + U_N a_N + U_N \Delta a_N - U_0 \Delta a_0 - a_0 U_0 - \sum_{n=1}^N U_n \Delta a_n = a_N U_N - \sum_{n=0}^{N-1} U_n \Delta a_n$$

i.e.  $\sum_{n=0}^N a_n u_n = a_N U_N + \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) U_n.$

Puisque  $\sum u_n$  converge,  $(U_n)$  converge et est bornée. D'après II.A, puisque  $\sum \Delta a_n$  est absolument convergente, elle vérifie  $(P_1)$  et donc  $\sum U_n \Delta a_n$  converge. D'après II.B.1,  $(a_n)$  converge et donc  $(a_n U_n)$  aussi. L'expression des sommes partielles de  $\sum a_n u_n$  que l'on vient d'obtenir est donc une somme de deux termes convergents. Il en résulte que  $\sum a_n u_n$  converge et donc  $(a_n)$  vérifie  $(P_2)$ .

**II.C**

Pour tout  $n$  dans  $\mathbf{N}$ , on dispose de  $u_n$  dans  $\mathbf{U}$  tel que  $|a_n| = a_n u_n$ . Par hypothèse  $\boxed{\sum a_n u_n \text{ diverge.}}$

Comme  $(u_n)$  est borné, on en conclut que  $(a_n)$  ne vérifie pas  $(P_1)$ . D'après II.A, on en conclut que

$\boxed{(a_n) \text{ vérifie } (P_1) \text{ si et seulement si } \sum a_n \text{ converge absolument.}}$

**II.D**

II.D.1. On obtient successivement

- $p_0 = 0, \varepsilon_0 = 1$  et  $A_0 = 1$ ;
- $p_1 = 1, \varepsilon_1 = \frac{1}{2}$  et  $A_1 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$ ;
- $p_2 = 2, \varepsilon_2 = \frac{1}{4}$  et  $A_2 = \frac{25}{16} + \frac{3}{16} = \frac{7}{4}$ ;
- $p_3 = 2, \varepsilon_3 = \frac{1}{4}$  et  $A_4 = \frac{7}{4} + \frac{9}{64} = \frac{121}{64}$ ;
- $p_4 = 2, \varepsilon_4 = \frac{1}{4}$  et  $A_5 = \frac{121}{64} + \frac{9}{80} = \frac{641}{320}$ ;
- $p_5 = 3, \varepsilon_5 = \frac{1}{8}$  et  $A_6 = \frac{641}{320} + \frac{3}{64} = \frac{41}{20}$ .

i.e.

- $(p_n)_{0 \leq n \leq 5} = (0, 1, 2, 2, 2, 3)$ ,
- $(\varepsilon_n)_{0 \leq n \leq 5} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$  et
- $(A_n)_{0 \leq n \leq 5} = \left(1, \frac{25}{16}, \frac{7}{4}, \frac{121}{64}, \frac{641}{320}, \frac{41}{20}\right)$ .

Par définition

```

#!/usr/bin/python3
from fractions import Fraction

def al(n):
    # renvoie a_n
    if n :
        # si n n'est pas nul
        return Fraction(9,4*(n+1)) # a_n=9/4(n+1)
    return 1 # a_0=1

def exemple(n):
    p=0 # initialisation : p_0=0
    ep=Fraction(1,1) # epsilon_0=1
    A=al(0) # A_0=a_0
    # tuple initial [0,p_0,epsilon_0,A_0]
    list=[[0,p,ep,A]] # liste contenant le tuple initial
    for k in range(n): # boucle pour k entre 0 et n-1
        if A>=p : # si A_k>=p_k :
            p+=1 # p_{k+1}=p_k+1
            ep/=2 # epsilon_{k+1}=epsilon_k /2
            # sinon p_{k+1}=p_k
            # epsilon_{k+1}=epsilon_k
            A+=ep*al(k+1) # A_{k+1}=A_k+epsilon_{k+1}a_{k+1}
        list.append([k+1,p,ep,A]) # on augmente la liste du tuple
        # [k+1,p_{k+1},epsilon_{k+1},A_{k+1}]
        # fin boucle
    return list # renvoie la liste des n tuples

```

II.D.2. a. Par définition, si  $(p_n)$  est stationnaire, alors  $(\varepsilon_n)$  aussi. On note  $\varepsilon = \lim \varepsilon_n$  et alors  $\Delta A_n = \varepsilon a_n$  à partir d'un certain rang. Il en résulte que  $\sum \Delta A_n$  diverge vers  $+\infty$ , par hypothèse sur  $\sum a_n$ , et donc  $A_n$  aussi. Mais si  $(p_n)$  est stationnaire, par définition,  $(A_n)$  est majoré par  $(p_n)$  à partir d'un certain rang et est donc borné. Cette contradiction montre que  $(p_n)$  ne saurait être stationnaire. Par conséquent pour tout entier naturel  $N$ , on dispose d'un entier  $n$  avec  $n > N$  et  $p_n \neq p_{n-1}$ . Par définition cela impose  $p_n = p_{n-1} + 1$ .

D'après ce qui précède, pour tout  $a$  dans  $\mathbf{N}$  l'ensemble  $\{n \in \mathbf{N} \mid n > a \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\}$  est non vide et inclus dans  $\mathbf{N}$ ; il admet donc un minimum. De plus comme ce minimum appartient à l'ensemble qu'il minimise, il est strictement supérieur à  $a$ . On en déduit que l'on peut définir la suite d'entiers  $(n_k)_{k \in \mathbf{N}}$  par récurrence et qu'elle est strictement croissante.

b. Soit  $k$  dans  $\mathbf{N}$ , on a

$$p_{n_k} = p_0 + \sum_{n=1}^{n_k} \Delta p_{n-1} = 0 + \sum_{j=1}^k \Delta p_{n_j-1} = \sum_{j=1}^k 1$$

et

$$\varepsilon_{n_k} = \varepsilon_0 \prod_{n=1}^{n_k} \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} = \prod_{j=1}^k \frac{\varepsilon_{n_j}}{\varepsilon_{n_j-1}} = \prod_{j=1}^k \frac{1}{2}$$

i.e.  $p_{n_k} = k$  et  $\varepsilon_{n_k} = 2^{-k}$ .

Par construction la suite  $(\varepsilon_n)$  est décroissante et minorée par 0, elle converge d'après le théorème de convergence monotone. Comme elle admet une sous-suite tendant vers 0, à savoir  $(\varepsilon_{n_k})$  qui est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ , sa limite est nulle :  $\lim \varepsilon_n = 0$ .

Par construction la suite  $(A_n)$  est croissante et minorée par  $(p_n)$ . Comme cette dernière est croissante et admet une sous-suite divergeant vers  $+\infty$ , elle diverge vers  $+\infty$  et donc, par comparaison,  $(A_n)$  fait de même :  $\sum \varepsilon_n a_n$  diverge.

c. D'après les calculs effectués en II.D.1, on a  $n_1 = 1, n_2 = 2$  et  $n_3 = 5$ .

II.D.3. a. Par définition

```
#!/usr/bin/python3

def a2(n):
    return 1/(n+1)

def indexer(n):
    p=0
    ep=1
    A=a2(0)
    list=[[0,0]]
    for k in range(n):
        if A>=p :
            p+=1
            ep/=2
            list.append([p,k+1])
        A+=ep*a2(k+1)
    return list
```

b. On a d'après II.D.2 et par construction

$$k-1 = p_{n_{k-1}} \leq p_{n_k-1} \leq A_{n_{k-1}}$$

et, puisque  $2^{1-k} = \varepsilon_{n_{k-1}} = \varepsilon_{n_k-2} = \varepsilon_{n_k-1}$  et  $A_{n_{k-2}} < p_{n_{k-2}}$ ,

$$A_{n_{k-1}} = A_{n_{k-2}} + 2^{1-k} \frac{1}{n_k} < p_{n_{k-2}} + \frac{1}{2^{k-1}n_k}$$

d'où, puisque  $k-1 = p_{n_{k-1}} = p_{n_k-2} = p_{n_k-1}$ ,  $k-1 \leq A_{n_{k-1}} \leq k-1 + \frac{1}{2^{k-1}n_k}$ .

Comme  $n_k \geq k$  et  $k \geq 3$ , il vient

$$A_{n_k} = A_{n_{k-1}} + a_{n_k} \varepsilon_{n_k} \leq k-1 + \frac{1}{2^{k-1}n_k} + \frac{1}{2^k(n_k+1)} \leq k-1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{32} < k = p_{n_k}$$

et donc  $p_{n_{k+1}} = p_{n_k}$  et  $\varepsilon_{n_{k+1}} = \varepsilon_{n_k}$ . Par conséquent

$$A_{n_{k+1}} = A_{n_k} + \frac{1}{2^k(n_k+2)} \leq k-1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{32} + \frac{1}{40} < k = p_{n_{k+1}}$$

d'où  $n_{k+1} > n_k + 2$ .

c. Par définition, pour  $k$  dans  $\mathbf{N}^*$ ,

$$A_{n_{k+1}-1} = A_{n_k-1} + \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j \varepsilon_j$$

$$\text{i.e. } \boxed{A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} = 2^{-k} \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{j+1}}.$$

Puisque la fonction inverse est continue et décroissante sur  $\mathbf{R}_+^*$ , il vient par inégalité de la moyenne

$$\ln\left(\frac{n_{k+1}+1}{n_k+1}\right) = \int_{n_k+1}^{n_{k+1}+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{j+1} \leq \int_{n_k}^{n_{k+1}} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)$$

$$\text{et donc } \boxed{\frac{1}{2^k} \ln\left(\frac{n_{k+1}+1}{n_k+1}\right) \leq A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} \leq \frac{1}{2^k} \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)}.$$

- d. D'après II.D.3.a, on a  $n_3 - 2 = 49 > 2 = n_2$  et donc, par une récurrence immédiate et avec l'aide de II.D.3.b, pour  $k \geq 3$ , on a  $n_k - 2 > n_{k-1}$ .

Soit maintenant  $k$  supérieur à 3. On peut utiliser l'inégalité II.D.3.b pour  $k$  et  $k+1$ . Avec II.D.3.c il vient

$$\ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \geq 2^k (A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1}) \geq 2^k \left(k - k + 1 - \frac{1}{2^{k-1}n_k}\right) = 2^k - \frac{2}{n_k}$$

et

$$\ln\left(\frac{n_{k+1}+1}{n_k+1}\right) \leq 2^k (A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1}) \leq 2^k \left(k + \frac{1}{2^k n_{k+1}} - k + 1\right) = 2^k + \frac{1}{n_{k+1}}$$

et donc, puisque

$$\frac{n_{k+1}+1}{n_k+1} = \frac{n_{k+1}}{n_k} \left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right) \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)$$

$$\text{on a } \boxed{2^k - \frac{2}{n_k} \leq \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \leq 2^k + \frac{1}{n_{k+1}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)}.$$

- e. On note  $(u_k)$  la suite  $(\ln(n_k) - 2^k)$ . Sa convergence est équivalente à celle de la série  $\sum \Delta u_k$ . Or, pour  $k$  dans  $\mathbf{N}$ , on a  $\Delta u_k = \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) - 2^k$  et donc, d'après la question précédente et en utilisant  $a \leq b \leq c \Rightarrow |b| \leq \max(|a|, |c|) \leq |a| + |c|$ ,

$$|\Delta u_k| \leq \frac{1}{n_{k+1}} + \frac{2}{n_k} + \left| \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right) \right| \leq \frac{3}{n_k} + \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right)$$

par croissance de  $(n_k)$ . Comme  $(n_k)$  est une suite strictement croissante d'entiers, elle tend vers l'infini. En notant  $(v_k) = \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)\right)$ , par continuité du logarithme et divergence de  $(n_k)$  vers  $+\infty$ , la suite  $(v_k)$  tend vers 0 et donc  $\sum \Delta v_k$  converge.

Par construction on a  $a_n \varepsilon_n = o(a_n)$  et donc, par comparaison des séries divergentes à termes positifs, on a  $A_n = o(\ln(n))$  grâce à I.E.1. Et donc en utilisant II.D.3.b,  $k = O(k-1) = O(A_{n_{k-1}}) = o(\ln(n_k - 1)) = o(\ln(n_k))$ . En particulier  $k - \ln(n_k) \sim -\ln(n_k)$ . Puisque l'exponentielle tend vers 0 en  $-\infty$ , on en déduit que l'exponentielle de  $k - \ln(n_k)$  tend vers 0, i.e.  $\frac{1}{n_k} = o(e^{-k})$ .

En particulier la série  $\sum \frac{1}{n_k}$  est convergente, par comparaison d'une série à termes positifs avec une série géométrique. On en conclut que  $\sum |\Delta u_k|$  est majoré par la somme de deux séries absolument convergentes. Étant à termes positifs, elle est également absolument convergente, donc  $\sum \Delta u_k$  est convergente. Il en résulte que  $\boxed{\ln(n_k) - 2^k \text{ converge.}}$

Par continuité de l'exponentielle, il en résulte que  $n_k \exp(-2^k)$  converge aussi, i.e. on dispose d'une constante  $C$  strictement positive (car  $\exp(\mathbf{R}) = \mathbf{R}_+^*$ ) telle que  $n_k \sim C \exp(2^k)$ .

Puisque  $\ln(n_k) - 2^k$  converge, on a  $\ln(n_k) = 2^k + o(1)$  et donc  $2^{-k} \ln(n_k) = 1 + o(1)$ . Par continuité du logarithme, il vient  $\ln(\ln(n_k)) - k \ln(2) = o(1)$  et donc  $\ln(\ln(n_k)) \sim k \ln(2)$ . Or, l'inégalité II.D.3.b donne en particulier, pour  $k \geq 3$ ,  $k-1 \leq A_{n_{k-1}} \leq k$  et donc  $A_{n_{k-1}} \sim k$ . Comme  $A_{n_k} = A_{n_{k-1}} + o(1)$ ,

il vient  $A_{n_k} \sim A_{n_{k-1}} \sim k$  et donc  $A_{n_k} \sim \frac{\ln(\ln(n_k))}{\ln(2)}$ .

Soit  $n$  dans  $\mathbf{N}$ . Par stricte croissance et divergence de  $(n_p)$ , on dispose de  $k$  dans  $\mathbf{N}$  tel que  $n_k \leq n < n_{k+1}$ . Par croissance de  $(A_p)$ , on en déduit  $A_{n_k} \leq A_n \leq A_{n_{k+1}}$ . Lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $k$  aussi, et on a  $A_{n_k} \sim k \sim k+1 \sim A_{n_{k+1}}$  et donc  $A_n \sim k$  par encadrement. D'après ce qui précède

on en déduit  $A_n \sim \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(2)}$ .

Puisque la croissance de  $(n_k)$  est doublement exponentielle,

le temps de calcul de `indexer` est au moins doublement exponentiel.

## II.E

II.E.1. Pour  $n$  dans  $\mathbf{N}$ , on dispose de  $u_n$  dans  $\{\pm 1\}$  tel que  $|a_n| = u_n a_n$ . Soit  $(\varepsilon_n)$  une suite de limite nulle, comme  $(u_n)$  est borné,  $(u_n \varepsilon_n)$  tend aussi vers 0 et donc  $\sum \varepsilon_n u_n a_n$  converge, i.e.  $\sum \varepsilon_n |a_n|$  converge.

II.E.2. Par contraposée du résultat obtenu en II.D, la série à termes positifs  $\sum |a_n|$  ne peut diverger. Comme elle est à termes positifs, c'est donc que  $\sum |a_n|$  converge.

## II.F

II.F.1. Si  $(a_n)$  n'est pas borné, on construit par récurrence une suite  $(n_k)$  par  $n_0 = 0$  et, pour  $k \in \mathbf{N}$ ,  $n_{k+1} = \min \{n > n_k \mid |a_n| \geq 2^k\}$ . On définit alors la suite  $(x_n)$  par  $x_n = 2^{-k}$ , si  $n = n_k$  pour  $k$  dans  $\mathbf{N}$ , et  $x_n = 0$  sinon. Par construction la série  $\sum x_n a_n$  diverge grossièrement puisque  $|x_{n_k} a_{n_k}| \geq \frac{1}{2}$  pour  $k \geq 1$ . La série  $\sum x_n$  est à termes positifs et le théorème de sommation par paquets permet d'écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} x_n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2$$

et donc  $\sum x_n$  converge. Cette contradiction assure que  $(a_n)$  est borné.

II.F.2. Soit  $(\varepsilon_n)$  une suite de limite nulle. Pour  $n$  dans  $\mathbf{N}$ , on a  $\varepsilon_n \Delta a_n + a_{n+1} \Delta \varepsilon_n = \Delta(a\varepsilon)_n$  et donc, par sommation,

$$\sum_{k=0}^n \varepsilon_k \Delta a_k = a_{n+1} \varepsilon_{n+1} - a_0 \varepsilon_0 + \sum_{k=0}^n a_{k+1} \Delta \varepsilon_k.$$

Puisque  $(\varepsilon_n)$  converge,  $\sum \Delta \varepsilon_{n-1}$  converge et donc, par hypothèse,  $\sum a_{n+1} \Delta \varepsilon_n$  converge. D'après ce qui précède  $a_n \varepsilon_n = O(\varepsilon_n) = o(1)$  puisque  $\varepsilon_n = o(1)$ . Par linéarité on en déduit que

$\sum \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n)$  converge.

II.F.3. Il résulte directement de II.E que  $\sum |a_{n+1} - a_n|$  converge.

II.F.4. Il résulte de II.B et de la question précédente que

les suites vérifiant  $(P_2)$  sont celles telles que  $\sum \Delta a_n$  converge absolument.