

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES CENTRALE 2010 – MP

Dans tout le problème l'ensemble \mathbf{C} des nombres complexes est considéré comme le plan affine euclidien muni de son repère orthonormé canonique $(0, 1, i)$ (où $i^2 = -1$).

- On notera K l'ensemble des triplets (α, β, γ) de \mathbf{R}^3 constitués de trois réels positifs ou nuls tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Si $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$, on notera \widehat{abc} le « triangle plein » défini par : $\widehat{abc} = \{\alpha a + \beta b + \gamma c \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in K\}$.

Dans tout le problème on notera τ_0, τ_1 et τ les triangles pleins définis par : $\tau_0 = \widehat{-10i}$, $\tau_1 = \widehat{01i}$, $\tau = \widehat{-11i}$.

- On notera également φ_0 et φ_1 les applications de \mathbf{C} dans \mathbf{C} définies par (en notant \bar{z} le conjugué du nombre complexe z) : $\varphi_0(z) = \frac{1+i}{2}\bar{z} + \frac{-1+i}{2}$ et $\varphi_1(z) = \frac{1-i}{2}\bar{z} + \frac{1+i}{2}$.

- La notation $\{0, 1\}^{\mathbf{N}^*}$ désignera l'ensemble des suites $(r_n)_{n \geq 1}$ d'entiers naturels tels que $r_n \in \{0, 1\}$ pour tout entier naturel non nul n .

- Soit E le \mathbf{C} -espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans \mathbf{C} . On note $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur E .

- La partie entière du réel x est notée $[x]$. On posera, pour tout réel x et tout entier naturel n non nul : $r_n(x) = [2^n x] - 2[2^{n-1} x]$.

- On notera $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ l'ensemble des rationnels de la forme $\frac{k}{2^n}$ où $k \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$.

- On rappelle enfin que, si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une famille de parties de \mathbf{C} indexées sur \mathbf{N}^* , on a :

$$\bigcap_{n \geq 1} X_n = \{z \in \mathbf{C} \mid \forall n \in \mathbf{N}^*, z \in X_n\}.$$

L'objectif du problème est la construction d'une application f continue de $[0; 1]$ dans \mathbf{C} dont l'image $f([0; 1])$ est le triangle plein τ et l'étude de quelques unes de ses propriétés.

PARTIE I - Préliminaires géométriques

I.A

I.A.1. Établir que $\tau = \tau_0 \cup \tau_1$.

I.A.2. Représenter sur une même figure τ_0, τ_1, τ .

I.A.3. a. Soit $a \in \mathbf{C}$ et $\theta \in \mathbf{R}$. Démontrer que l'image z' du complexe z par la réflexion dont l'axe est la droite passant par a et dirigée par $e^{i\theta}$ vérifie la relation : $z' - a = e^{2i\theta}(\overline{z - a})$.

b. Établir une relation analogue à celle de la question précédente entre un complexe z et son image z' par l'homothétie de centre a et de rapport $\rho > 0$.

c. Démontrer que φ_0 est la composée d'une réflexion dont on précisera l'axe et d'une homothétie de rapport strictement positif à préciser et dont le centre appartient à l'axe de la réflexion. Démontrer une propriété analogue pour φ_1 . Ces décompositions sont-elles uniques ?

I.A.4. Que vaut l'image d'un triangle plein \widehat{abc} par φ_0 et par φ_1 ? Déterminer $\varphi_0(\tau)$ et $\varphi_1(\tau)$.

I.B - Diamètre d'un triangle plein

I.B.1. a. Démontrer que K est un compact de \mathbf{R}^3 pour sa topologie usuelle.

b. Démontrer que K est convexe.

c. Établir que, si $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$, \widehat{abc} est un compact convexe de \mathbf{C} muni de sa topologie usuelle.

d. Avec les mêmes notations démontrer l'existence de : $\delta(\widehat{abc}) = \max \{|z' - z| \mid (z, z') \in \widehat{abc}^2\}$.

I.B.2. a. Démontrer, pour $z \in \mathbf{C}$ et $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$, $\max \left\{ |z' - z| \mid z' \in \widehat{abc} \right\} = \max(|z - a|, |z - b|, |z - c|)$.

b. En déduire une expression simple de $\delta(\widehat{abc})$.

I.B.3. Soit $(r_n)_{n \geq 1}$ un élément de $\{0, 1\}^{\mathbf{N}^*}$. Pour chaque entier naturel non nul n , on note

$\tilde{\tau}_n = \varphi_{r_1} \circ \varphi_{r_2} \circ \cdots \circ \varphi_{r_n}(\tau)$. Montrer que $\bigcap_{n \geq 1} \tilde{\tau}_n$ est réduit à un seul point appartenant à τ .

PARTIE II - Construction de l'application f

Dans la suite on note \mathcal{E} l'ensemble des applications g continues de $[0; 1]$ dans \mathbf{C} telles que $g(0) = -1$ et $g(1) = 1$. Si $g \in \mathcal{E}$, on note Tg l'application de $[0; 1]$ dans \mathbf{C} définie par : $Tg(x) = \varphi_0(g(2x))$ si $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ et $Tg(x) = \varphi_1(g(2x - 1))$ si $x \in \left]\frac{1}{2}; 1\right]$.

II.1. Déterminer l'unique élément f_0 de \mathcal{E} qui soit affine.

II.2. Montrer que $Tg \in \mathcal{E}$ pour tout $g \in \mathcal{E}$.

II.3. Soient g_1 et g_2 deux éléments de \mathcal{E} . Démontrer $\|Tg_2 - Tg_1\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}} \|g_2 - g_1\|_\infty$.

II.4. On définit maintenant une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de \mathcal{E} en choisissant f_0 affine comme ci-dessus et $f_{n+1} = Tf_n$ pour tout entier naturel n .

a. Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0; 1]$ vers une fonction $f \in \mathcal{E}$.

b. Démontrer $Tf = f$.

c. Démontrer, pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) = -\overline{f(1-x)}$ et interpréter géométriquement cette relation.

PARTIE III - Propriétés de f

III.A - Image de f

III.A.1. Soit $(r_n)_{n \geq 1} \in \{0, 1\}^{\mathbf{N}^*}$

a. Montrer que la série de terme général $\frac{r_n}{2^n}$ converge et que sa somme x appartient à $[0; 1]$.

b. En posant pour tout entier naturel p , $x_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{n+p}}{2^n}$, démontrer, pour tout entier naturel p non nul, la relation : $f(x) = \varphi_{r_1} \circ \varphi_{r_2} \circ \cdots \circ \varphi_{r_p}(f(x_p))$.

III.A.2. Inversement, soit $x \in [0; 1[$.

a. Établir, pour tout entier naturel non nul n , $r_n(x) \in \{0, 1\}$.

b. Montrer, pour tout entier naturel non nul N : $\frac{[2^N x]}{2^N} = \sum_{n=1}^N \frac{r_n(x)}{2^n}$ puis $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{2^n}$.

c. Montrer que si, en outre, $x \in \mathbf{Z} \left[\frac{1}{2} \right]$ alors il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $r_n(x) = 0$ pour tout entier naturel $n > N$.

d. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(\frac{1}{4}\right)$. Reconnaître $\varphi_0 \circ \varphi_0$ et en déduire $f\left(\frac{1}{2^k}\right)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

III.A.3. a. Montrer $f\left([0; 1] \cap \mathbf{Z} \left[\frac{1}{2} \right]\right) \subset \tau$.

b. Montrer $f([0; 1]) \subset \tau$.

III.A.4. Inversement, soit $z \in \tau$.

- a. Montrer qu'on peut définir deux suites $(z_n)_{n \geq 0}$ et $(r_n)_{n \geq 1}$ de la manière suivante : $z_0 = z$ et, si $n \geq 1$:
- si $z_{n-1} \in \tau_0$ alors $r_n = 0$ et $z_n = (\varphi_0)^{-1}(z_{n-1})$
 - sinon $r_n = 1$ et $z_n = (\varphi_1)^{-1}(z_{n-1})$.

Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, z_n appartient à τ .

- b. Démontrer $f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{2^n}\right) = z$ (on pourra exprimer z en fonction de z_n et des φ_{r_i}).

- c. Écrire une fonction qui prend en argument un complexe z (que l'on supposera dans τ) et un réel ε et qui renvoie une valeur approchée à ε près d'un antécédent de z .

III.A.5. a. Démontrer que f n'est pas injective (on pourra utiliser la relation $f(1-x) = -\overline{f(x)}$).

- b. Plus généralement montrer qu'il n'existe aucune bijection continue de $[0; 1]$ sur τ (on pourra utiliser un argument de connexité par arcs).

III.A.6. a. Pour $(i, j) \in \{0, 1\}^2$, déterminer l'expression complexe de $\varphi_i \circ \varphi_j$, la reconnaître, préciser son point fixe et l'image de τ . Faire un dessin.

- b. Soit r_1, r_2, \dots, r_p des éléments de $\{0, 1\}$. Démontrer que φ donné par $\varphi = \varphi_{r_1} \circ \varphi_{r_2} \circ \dots \circ \varphi_{r_p}$ possède un unique point fixe que l'on ne cherchera pas nécessairement à exprimer simplement.

- c. Exhiber, à l'aide de l'application f , un point fixe de φ .

- d. Montrer que l'ensemble X des complexes z qui sont point fixe de la composée d'un nombre fini d'applications φ_0 et φ_1 est dense dans τ .

III.B - Dérivabilité de f

III.B.1. Supposons que f soit dérivable sur $[0; 1]$.

Soient $x \in [0; 1]$, $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ et $(\beta_n)_{n \geq 1}$ deux suites d'éléments de $[0; 1]$, convergentes vers x et telles que $\alpha_n \leq x \leq \beta_n$ et $\alpha_n < \beta_n$ pour tout n .

Montrer que la suite de terme général $\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$ converge vers $f'(x)$.

III.B.2. Soit $x \in [0; 1]$.

- a. Si $x \in [0, 1[$, en choisissant : $\alpha_n = \frac{r_1(x)}{2} + \dots + \frac{r_n(x)}{2^n}$ et $\beta_n = \alpha_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$, montrer que f n'est pas dérivable en x .

- b. Démontrer que f n'est pas dérivable en 1.

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – CENTRALE 2010 – MP

PARTIE I - Questions géométriques

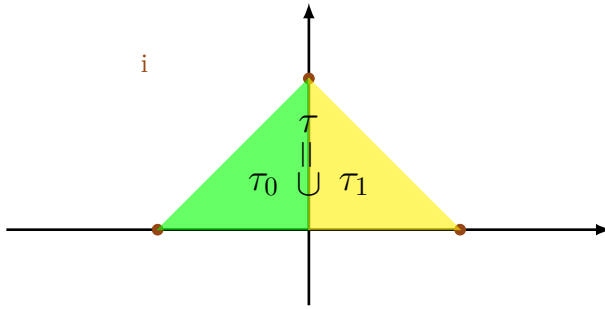
I.A

I.A.1. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in K$. On a

$$(\pm 1)\alpha + 0\beta + i\gamma = (\pm 1)\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) + (\mp 1)\frac{\beta}{2} + i\gamma$$

et donc, puisque $\left(\frac{\beta}{2}, \alpha + \frac{\beta}{2}, \gamma\right) \in K$ par positivité de chacun des termes, $\tau_0 \subset \tau$ et $\tau_1 \subset \tau$.

Par ailleurs $(-1)\alpha + 1\beta + i\gamma = \pm 1 \cdot |\beta - \alpha| + 0(\alpha + \beta - |\beta - \alpha|) + i\gamma$, où le signe est choisi de sorte que $\beta - \alpha = \pm 1 \cdot |\beta - \alpha|$. L'inégalité triangulaire montre qu'on a $(|\beta - \alpha|, \alpha + \beta - |\beta - \alpha|, \gamma) \in K$ et il en résulte qu'un élément de τ est dans τ_0 si $\beta \geq \alpha$ et dans τ_1 si $\alpha \geq \beta$. On en conclut $\tau = \tau_0 \cup \tau_1$.



I.A.2.

-1

1

I.A.3. a. Soit z et z' deux complexes. L'égalité $z' - a = e^{2i\theta} \overline{z - a}$ et équivalente à, par identification du module et de l'argument, $|z' - a| = |z - a|$ et, si ce module commun est non nul, $\arg(z' - a) = 2\theta - \arg(z - a) \pmod{2\pi}$, i.e. en notant A, M, Z et Z' les points du plan d'affixes $a, a + e^{i\theta}, z$ et z' respectivement, $AZ' = AZ$ et si cette distance commune est non nulle, $\widehat{MAZ'} = \widehat{ZAM}$, i.e. Z' est le symétrique de Z par rapport à la droite (AM) :

l'image z' du complexe z par la réflexion dont l'axe est la droite passant par a et dirigée par $e^{i\theta}$ vérifie la relation : $z' - a = e^{2i\theta} \overline{(z - a)}$.

b. Avec les notations précédentes, Z' est l'image de Z par l'homothétie de centre A et de rayon ρ si et seulement si $AZ' = \rho AZ$ et, si $Z \neq A$, $\widehat{ZAZ'} = 0$, i.e. $|z' - a| = \rho |z - a|$ et, si $z \neq a$, $(z' - a)/(z - a) \in \mathbf{R}_+$, i.e. $z' = a + \rho(z - a)$.

c. Lorsque a est un complexe de module distinct de 1, l'application $z \mapsto a\bar{z} + b$ admet $(a\bar{b} + b)/(1 - |a|^2)$ comme point fixe. En particulier -1 est point fixe de φ_0 . Il vient, pour z dans \mathbf{C} , $\varphi_0(z) + 1 = \frac{1+i}{2}(\bar{z} + 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{2i\pi/8}(\bar{z} + 1)$ et donc

φ_0 est la composée (commutative) de l'homothétie de centre -1 et de rapport $1/\sqrt{2}$ et de la symétrie par rapport à la droite passant par -1 et dirigée par $e^{i\pi/8}$.

De même, pour z dans \mathbf{C} , $\varphi_1(z) - 1 = \frac{1-i}{2}(\bar{z} - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2i\pi/8}(\bar{z} - 1)$ et donc

φ_1 est la composée (commutative) de l'homothétie de centre 1 et de rapport $1/\sqrt{2}$ et de la symétrie par rapport à la droite passant par 1 et dirigée par $e^{-i\pi/8}$.

La composée d'une réflexion et d'une homothétie dont le centre appartient à l'axe de symétrie admet ce centre comme point fixe. Si on le note a , ces deux applications sont données par $z \mapsto a + e^{2i\theta}(z - a)$ et $z \mapsto a + \rho(z - a)$ respectivement. Leur composée est donc $z \mapsto a + \rho e^{2i\theta}(z - a)$ et ne dépend pas de l'ordre choisi. Il en résulte qu'une application de la forme $z \mapsto \alpha z + \beta$ (avec $\alpha \in \mathbf{C}^*$ et $\beta \in \mathbf{C}$) se décompose de la sorte si et seulement si $\alpha = \rho e^{2i\theta}$ et $\beta = a - \rho e^{2i\theta} \bar{a}$, i.e. $\rho = |\alpha|$, $2\theta = \arg(\alpha)$ et $\beta = a - \alpha \bar{a}$.

L'équation $\beta = a - \alpha \bar{a}$ entraîne aussi $\bar{\beta} = \bar{a} - \bar{\alpha} a$ et donc, en remplaçant \bar{a} par la valeur obtenue dans la seconde équation, $\beta = a - |\alpha|^2 a - \alpha \bar{\beta}$, soit $(1 - |\alpha|^2)a = \alpha \bar{\beta} + \beta$. Cette équation a une seule solution si $|\alpha| \neq 1$ et on vérifie qu'elle satisfait bien $\beta = a - \alpha \bar{a}$. Comme ici $\alpha = \frac{1 \pm i}{2}$, on est bien dans ce cas

et il en résulte que a est unique, de même que ρ et $e^{2i\theta}$ et, ainsi, ces décompositions sont uniques.

I.A.4. Soit (a, b, c) dans \mathbf{C}^3 et (α, β, γ) dans K . Si $z = \alpha a + \beta b + \gamma c$, on a

$$\varphi_0(z) = \frac{1 \pm i}{2} (\alpha \bar{a} + \beta \bar{b} + \gamma \bar{c}) + (\alpha + \beta + \gamma) \frac{\mp 1 + i}{2}$$

et donc $\varphi_0(z) = \alpha \varphi_0(a) + \beta \varphi_0(b) + \gamma \varphi_0(c)$, et mutatis mutandis pour φ_1 , de sorte que

les images du triangle plein \widehat{abc} par φ_0 et φ_1 sont respectivement les triangles pleins $\varphi_0(a)\varphi_0(b)\varphi_0(c)$ et $\varphi_1(a)\varphi_1(b)\varphi_1(c)$.

En particulier pour $a = -1$, $b = 1$ et $c = i$, il vient $\varphi_0(\tau) = \widehat{-1i0}$ et $\varphi_1(\tau) = \widehat{i10}$, i.e.

$$\varphi_0(\tau) = \tau_0 \text{ et } \varphi_1(\tau) = \tau_1.$$

I.B - Diamètre d'un triangle plein

I.B.1. a. Puisque $[0; 1]$ est un segment de \mathbf{R} , il est compact et il en est de même pour $[0; 1]^3$ en tant que produit cartésien de compacts. Or l'application, de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R} donnée par $(x, y, z) \mapsto x + y + z$ est linéaire donc continue (car \mathbf{R}^3 est de dimension finie) et donc l'image réciproque du fermé $\{1\}$ est fermée dans \mathbf{R}^3 . Comme intersection de ce fermé avec le compact $[0; 1]^3$, K est compact.

b. Puisque $[0; 1]$ est un intervalle, il est convexe et il en va donc de même pour $[0; 1]^3$ en tant que produit cartésien de convexes. Comme l'application, de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R} donnée par $(x, y, z) \mapsto x + y + z$ est linéaire, elle préserve les combinaisons linéaires et en particulier l'image réciproque du convexe $\{1\}$ est convexe. Comme intersection de convexes, K est convexe.

c. Soit (a, b, c) dans \mathbf{C}^3 , alors l'application de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{C} donnée par $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \alpha a + \beta b + \gamma c$ est linéaire, donc continue car \mathbf{R}^3 est de dimension finie. Comme \widehat{abc} est l'image de K par cette application, il en résulte qu'il est compact, par compacité de K et par le théorème de WEIERSTRASS, et convexe, par préservation des combinaisons linéaires. Autrement dit \widehat{abc} est compact et convexe.

d. Il en résulte que \widehat{abc}^2 est compact en tant que produit cartésien de compacts. Comme l'application de \mathbf{C}^2 dans \mathbf{C} donnée par $(z, z') \mapsto z' - z$ est linéaire, elle est continue car \mathbf{C}^2 est de dimension finie. Comme l'application $z \mapsto |z|$ est continue car c'est une norme (et est donc 1-lipschitzienne en vertu de l'inégalité triangulaire), la composée est continue et donc $\{|z' - z| \mid (z, z') \in \widehat{abc}^2\}$ est l'image continue d'un compact. D'après le théorème de WEIERSTRASS c'est un compact (de \mathbf{R}_+) et, en particulier sa borne supérieure est un maximum, i.e. $\max \{|z' - z|, (z, z') \in \widehat{abc}^2\}$ existe.

I.B.2. a. Soit (α, β, γ) dans K et $z' = \alpha a + \beta b + \gamma c$. On a, par convexité de la norme,

$$\begin{aligned} |z' - z| = |\alpha a + \beta b + \gamma c - (\alpha + \beta + \gamma)z| &\leq \alpha |z - a| + \beta |z - b| + \gamma |z - c| \\ &\leq (\alpha + \beta + \gamma) \max(|z - a|, |z - b|, |z - c|) \end{aligned}$$

avec égalité pour $z = a$, $z = b$ ou $z = c$. Il en résulte

$$\max \left\{ |z' - z| \mid z \in \widehat{abc} \right\} = \max(|z - a|, |z - b|, |z - c|).$$

- b. On dispose, grâce à I.B.1.d, de z et z' dans \widehat{abc} tels que $\delta(\widehat{abc}) = |z - z'|$. En particulier, d'après la question précédente, $|z - z'| \leq \max(|z - a|, |z - b|, |z - c|)$ et on peut donc supposer que z' est dans $\{a, b, c\}$. Il en va de même pour z' en appliquant à nouveau la question précédente et, finalement

$$\delta(\widehat{abc}) = \max(|a - b|, |b - c|, |c - a|).$$

Autrement dit : le diamètre d'un triangle est la longueur de son plus grand côté.

- I.B.3. Puisque φ_0 et φ_1 sont composées d'une symétrie et d'une homothétie de rapport $1/\sqrt{2}$, si \widehat{abc} est un triangle plein, ses images par φ_0 et φ_1 sont des triangles pleins (d'après I.A.4) $\widehat{a_0b_0c_0}$ et $\widehat{a_1b_1c_1}$ tels que $|a_0 - b_0| = |a - b|/\sqrt{2}$ etc. et donc des triangles pleins de diamètre $\frac{1}{\sqrt{2}}\delta(\widehat{abc})$.

Il en résulte que $\tilde{\tau}_n$ est un triangle plein de diamètre $\frac{2}{\sqrt{2}^n}$, i.e. $2^{1-(n/2)}$. Soit alors a et b deux points de

$\bigcap_{n \geq 1} \tilde{\tau}_n$, pour tout n dans \mathbf{N}^* , a et b appartiennent à $\tilde{\tau}_n$ et donc $|a - b| \leq \delta(\tilde{\tau}_n)$. Il en résulte $|a - b| = 0$

et donc $a = b$. L'intersection étudiée a donc au plus un point.

Par ailleurs d'après I.A.4 et I.A.1, φ_0 et φ_1 laissent τ stable, de sorte qu'on a $\tilde{\tau}_n \subset \tau$ pour tout entier n dans \mathbf{N}^* . Il en va donc de même pour leur intersection. De plus $\varphi_{r_{n+1}}(\tau) \subset \tau$ et donc $\tilde{\tau}_{n+1} \subset \tilde{\tau}_n$ et on a donc affaire à une suite décroissante de compacts inclus dans τ . Un théorème (hors-programme) permet alors de conclure que l'intersection est non vide.

Plus précisément pour n dans \mathbf{N}^* , on se donne x_n dans $\tilde{\tau}_n$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est à valeurs dans le compact τ . De plus pour p et q deux entiers tels que $0 < p < q$, on a $x_q \in \tilde{\tau}_q \subset \tilde{\tau}_p$ et donc $|x_p - x_q| \leq \delta(\tilde{\tau}_p) = 2^{1-(p/2)}$ et il en résulte que (x_n) admet au plus une valeur d'adhérence. Par réciproque partielle du théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, la suite (x_n) converge. Comme, pour p et n entiers avec $n \geq p$, $x_n \in \tau_p$ et que τ_p est fermé, la limite de (x_n) appartient à τ_p et donc finalement à l'intersection

de tous ces triangles pleins. Il en résulte $\bigcap_{n \geq 1} \tilde{\tau}_n$ est réduit à un seul point appartenant à τ .

PARTIE II - Construction de l'application f

- II.1. Une application affine fixant 1 et envoyant 0 sur -1 est de pente 2 et donc s'écrit $z \mapsto 2(z - 1) + 1$; de plus une fonction affine est continue et donc f_0 est donné par $f_0(z) = 2z - 1$.

- II.2. Puisque φ_0 , φ_1 sont des composées d'une symétrie et d'une homothétie de rapport $1/\sqrt{2}$, elles sont $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -lipschitziennes et donc continues. Soit alors g dans \mathcal{E} . Comme g est continue, il en est de même pour Tg sauf peut-être en $1/2$ puisque Tg est composée de φ_0 ou φ_1 , de g et d'une application affine sur $\left[0; \frac{1}{2} \left[\text{ et } \left] \frac{1}{2}; 1 \right]$. La limite à gauche est aussi la valeur en $1/2$, à savoir $\varphi_0(g(1))$, i.e. $\varphi_0(1)$, soit i . La limite à droite en $1/2$ est $\varphi_1(g(0))$, i.e. $\varphi_1(-1)$, soit encore i et donc Tg est continue sur $[0; 1]$.

Enfin $Tg(0) = \varphi_0(g(0)) = \varphi_0(-1) = -1$ et $Tg(1) = \varphi_1(g(1)) = \varphi_1(1) = 1$. Il en résulte $Tg \in \mathcal{E}$.

- II.3. Il est licite de considérer les normes infinies, puisqu'on a affaire à des fonctions continues sur des segments. De plus $\sqrt{2}\varphi_0$ et $\sqrt{2}\varphi_1$ sont des isométries. Il vient alors, pour x dans $\left[0; \frac{1}{2} \right]$

$$|Tg_1(x) - Tg_2(x)| = |\varphi_0(g_1(x)) - \varphi_0(g_2(x))| = \frac{|g_1(2x) - g_2(2x)|}{\sqrt{2}}$$

et donc $\|Tg_1 - Tg_2\|_{[0;1/2],\infty} = \frac{\|g_1 - g_2\|_\infty}{\sqrt{2}}$. De plus, pour x dans $\left] \frac{1}{2}; 1 \right]$,

$$|Tg_1(x) - Tg_2(x)| = \frac{|g_1(2x-1) - g_2(2x-1)|}{\sqrt{2}}$$

et donc $\|Tg_1 - Tg_2\|_{[1/2;1],\infty} = \frac{\|g_1 - g_2\|_\infty}{\sqrt{2}}$. Il s'ensuit $\|Tg_1 - Tg_2\|_\infty = \frac{\|g_1 - g_2\|_\infty}{\sqrt{2}}$.

II.4. a. Une récurrence immédiate donne, pour n dans \mathbf{N}^* ,

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}} \|f_n - f_{n-1}\|_\infty = 2^{-n/2} \|f_1 - f_0\|_\infty.$$

Il en résulte la série $\sum (f_{n+1} - f_n)$ est normalement convergente puisque la série des normes est une série géométrique de raison positive et strictement inférieure à 1. Cette série converge donc uniformément sur $[0; 1]$, ce qui est équivalent au fait que la suite (f_n) y converge uniformément. Les évaluations en 0 et 1 étant continues, car 1-lipschitziennes, \mathcal{E} est fermé dans E en tant qu'intersection de fermés et donc $\boxed{\text{la suite } (f_n) \text{ converge uniformément sur } [0; 1] \text{ vers une fonction de } \mathcal{E}.}$

b. Soit n dans \mathbf{N} , on a $\|Tf - f_{n+1}\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}} \|f - f_n\|_\infty$, de sorte que la suite (f_{n+1}) converge vers Tf au sens de la convergence uniforme. Par unicité de la limite pour une suite extraite, il en résulte $\boxed{Tf = f.}$

c. Soit, pour n dans \mathbf{N} , (\mathbf{H}_n) le prédicat défini par : $\forall x \in [0; 1], f_n(x) = \overline{-f_n(1-x)}$.

Puisque le graphe de f_0 est symétrique par rapport à $(1/2, 0)$, en tant que segment dont c'est le milieu, et que f_0 est à valeurs réelles, (\mathbf{H}_0) est vrai.

Soit n dans \mathbf{N} tel que (\mathbf{H}_n) soit vrai et x dans $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. On a donc

$$f_{n+1}(x) = \varphi_0(f_n(2x)) \quad \text{et} \quad f_{n+1}(1-x) = \varphi_1(f_n(1-2x))$$

le cas $x = 1/2$ étant obtenu, pour la seconde relation, en faisant tendre x vers $1/2$ par valeurs inférieures, par continuité des fonctions considérées. Or, pour z dans \mathbf{C} , $-\varphi_1(\overline{z}) = \varphi_0(-\overline{z})$ et donc

$$\overline{-f_{n+1}(1-x)} = \varphi_0(\overline{-f_n(1-2x)}) = \varphi_0(f_n(2x))$$

par hypothèse de récurrence. D'où $f_{n+1}(x) = \overline{-f_{n+1}(1-x)}$. Il en résulte aussi $f_{n+1}(1-x) = \overline{-f(x)}$ et donc la relation $f_{n+1}(x) = \overline{-f_{n+1}(1-x)}$ est aussi vraie sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Et, finalement (\mathbf{H}_{n+1}) est vraie.

Le principe de récurrence permet de conclure que, pour tout x dans $[0; 1]$ et tout n dans \mathbf{N} , $f_n(x) = \overline{-f_n(1-x)}$. En passant à la limite en n , il vient

$$\boxed{\forall x \in [0; 1], f(x) = \overline{-f(1-x).}}$$

L'application $z \mapsto -\overline{z}$ est la symétrie (orthogonale) par rapport à l'axe imaginaire. Il en résulte :

Le graphe de l'application $\text{Im}(f)$ admet une symétrie par rapport à l'axe d'équation $x = \frac{1}{2}$; celui de l'application $\text{Re}(f)$ admet une symétrie par rapport au point $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. La surface (dans $\mathbf{R} \times \mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^3$) admet une symétrie par le retournement d'axe d'équations $x - \frac{1}{2} = y = 0$. Quant à l'image de f , i.e. $f([0; 1])$, elle admet une symétrie par rapport l'axe imaginaire.

PARTIE III - Propriétés de f III.A - Image de f

III.A.1. a. On a $\left(\frac{r_n}{2^n}\right) = O(2^{-n})$ et donc, par comparaison à une série géométrique, $\sum \frac{r_n}{2^n}$ converge.

On note $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{2^n}$. Comme, pour tout entier n dans \mathbf{N}^* , on a $0 \leq \frac{r_n}{2^n} \leq 2^{-n}$, par sommation des encadrements il vient $0 \leq x \leq \frac{1}{2} = 1$, i.e. $x \in [0; 1]$.

b. Soit, pour p dans \mathbf{N} , (\mathbf{H}_p) le prédicat : $f(x) = \varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_p}(f(x_p))$.

Pour $p = 0$, on a $x_p = x$ et le prédicat s'écrit $f(x) = f(x)$. Il est donc vrai.

Soit maintenant p dans \mathbf{N} tel que (\mathbf{H}_p) soit vrai. On a $x_p = \frac{r_{p+1}}{2} + \frac{1}{2}x_p$.

Si $r_{p+1} = 0$, alors $x_p \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ et $2x_p = x_{p+1}$, de sorte que $f(x_p) = Tf(x_p) = \varphi_0(f(2x_p)) = \varphi_{r_{p+1}}(f(x_{p+1}))$.

Si $r_{p+1} = 1$, alors $x_p \in [1/2, 1]$ et $x_{p+1} = 2x_p - 1$. Par ailleurs d'après II.2, pour x dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et g dans \mathcal{E} , on a $Tg(x) = \varphi_1(g(2x - 1))$ par continuité de Tg , de g , de φ_1 et des fonctions affines. Il en résulte $f(x_p) = Tf(x_p) = \varphi_1(f(2x_p - 1)) = \varphi_{r_{p+1}}(f(x_{p+1}))$ et donc (\mathbf{H}_{p+1}) est vrai. Le principe de récurrence permet de conclure pour p dans \mathbf{N}^* ,

$$f(x) = \varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_p}(f(x_p)).$$

III.A.2. a. Soit n dans \mathbf{N}^* . On a, par définition, $[2^{n-1}x] \leq 2^{n-1}x < [2^{n-1}x] + 1$ et donc $2[2^{n-1}x] \leq 2^n x < 2[2^{n-1}x] + 2$, de sorte qu'on a $2[2^{n-1}x] \leq [2^n x] \leq 2^n x < 2[2^{n-1}x] + 2$, par définition de la partie entière $[2^n x]$. Puisqu'on a affaire à des nombres entiers, $2[2^{n-1}x] \leq [2^n x] < 2[2^{n-1}x] + 2$ entraîne $2[2^{n-1}x] \leq [2^n x] \leq 2[2^{n-1}x] + 1$, i.e. $r_n(x) \in \{0, 1\}$.

b. Soit N dans \mathbf{N} . La somme $\sum_{n=1}^N \frac{[2^n x] - 2[2^{n-1}x]}{2^n}$ s'écrit $\sum_{n=1}^N \left(\frac{[2^n x]}{2^n} - \frac{[2^{n-1}x]}{2^{n-1}} \right)$ et est donc téles-

copique. Comme $[x] = 0$, il vient $\sum_{n=1}^N \frac{r_n(x)}{2^n} = \frac{[2^N x]}{2^N}$.

Comme $2^N x - 1 < [2^N x] \leq 2^N x$, on a aussi $x - 2^{-N} < \frac{[2^N x]}{2^N} \leq x$ et, par encadrement des limites,

$\lim_N \frac{[2^N x]}{2^N} = x$. Au vu de ce qui précède, il en résulte $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{2^n}$.

c. Soit x dans $\mathbf{Z} \left[\frac{1}{2}\right]$. On dispose de k dans \mathbf{Z} et N dans \mathbf{N} tel que $x = \frac{k}{2^N}$ (avec, en fait $0 \leq k < 2^N$).

Par conséquent pour n entier avec $n > N$, on a $2^{n-1}x \in \mathbf{Z}$ et donc $[2^{n-1}x] = 2^{n-1}x$, $[2^n x] = 2^n x$.

Par conséquent pour tout entier naturel $n > N$, on a $r_n(x) = 0$.

d. On reprend les notations de III.A.1 et on applique III.A.1.b grâce au résultat de III.A.2.b.

Pour $x = \frac{1}{2}$, on a $(r_n(x)) = (1, 0, \dots)$ et donc $x_1 = 0$. Il en résulte $f(x) = \varphi_1(f(0)) = \varphi_1(-1)$,

d'après II.4.a. D'où $f\left(\frac{1}{2}\right) = i$.

Pour $x = \frac{1}{4}$, on a $(r_n(x)) = (0, 1, 0, \dots)$ et donc $x_1 = \frac{1}{2}$. Il en résulte $f(x) = \varphi_0(f(x_1)) = \varphi_0(i)$.

$$\boxed{f\left(\frac{1}{4}\right) = 0.}$$

Puisque φ_0 est composée (commutative) d'une symétrie et d'une homothétie et qu'une symétrie est involutive, $\varphi_0 \circ \varphi_0$ est le carré de l'homothétie de centre -1 et de rapport $1/\sqrt{2}$, i.e.

$$\boxed{\varphi_0 \circ \varphi_0 \text{ est l'homothétie de centre } -1 \text{ et de rapport } 1/2.}$$

D'une façon générale, si $x = 2^{-k}$, avec $k \in \mathbf{N}^*$, on a $(r_n(x)) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ avec un 1 en k -ième position, de sorte que $x_k = 0$ et donc $f(x) = \varphi_0^{k-1} \circ \varphi_1(f(0))$. En utilisant les calculs précédents, il vient pour k pair

$$1 + f(x) = \frac{1}{2^{(k-2)/2}} \left(1 + f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$$

et, pour k impair,

$$1 + f(x) = \frac{1}{2^{(k-1)/2}} \left(1 + f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

et donc, puisque la formule obtenue est aussi valable pour k nul,

$$\boxed{\text{si } k \text{ est pair, } f(2^{-k}) = 2^{1-(k/2)} - 1 \text{ et sinon } f(2^{-k}) = (1+i)2^{-(k-1)/2} - 1.}$$

III.A.3. a. En reprenant le raisonnement de III.A.2.d, pour x dans $\mathbf{Z} \left[\frac{1}{2}\right] \cap [0; 1[$, la suite $(r_n(x))$ étant stationnaire égale à 0 d'après III.A.2.c, $f(x)$ est égal à un produit de φ_0 et de φ_1 appliqué à $f(0)$, i.e. à -1 . Comme i est dans τ , d'après I.A.4, il en va de même pour $f(x)$. De plus $f(1) = 1$ est aussi dans τ et donc

$$\boxed{f\left(\mathbf{Z} \left[\frac{1}{2}\right] \cap [0; 1]\right) \subset \tau.}$$

b. D'après III.A.2.b tout élément de $[0; 1] \setminus \left(\mathbf{Z} \left[\frac{1}{2}\right] \cap [0; 1]\right)$ est limite d'éléments de $\mathbf{Z} \left[\frac{1}{2}\right] \cap [0; 1]$. Par continuité de f et puisque τ est fermé, il en résulte $\boxed{f([0; 1]) \subset \tau.}$

III.A.4. a. On a $z_0 = z$. Comme $z \in \tau$, d'après I.A.1 soit $z \in \tau_0$, soit $z \in \tau_1$. Il en résulte que r_1 est bien défini. De plus φ_0 et φ_1 sont composées de deux bijections et le sont donc également. D'après I.A.4 $\varphi_0^{-1}(\tau_0) = \tau$ et $\varphi_1^{-1}(\tau_1) = \tau$. Il en résulte que z_1 est bien défini et $z_1 \in \tau$. Le même raisonnement montre que si $(z_k)_{0 \leq k \leq n}$ et $(r_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont définis pour un certain entier naturel n , alors z_{n+1} et r_{n+1} aussi et, de plus, $z_{n+1} \in \tau$. Il en résulte que

$$\boxed{\text{on peut définir } (z_n)_{n \geq 0} \text{ et } (r_n)_{n \geq 1} \text{ comme dans l'énoncé et que la première suite est à valeurs dans } \tau.}$$

b. Par construction $(r_n)_{n \geq 1} \in \{0, 1\}^{\mathbf{N}^*}$ et, pour n dans \mathbf{N} , $z = z_0 = \varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_n}(z_n)$ et donc, avec la notation de I.B.3, $z \in \tilde{\tau}_n$. Il en résulte $\bigcap_{n \geq 1} \tilde{\tau}_n = \{z\}$. Or, d'après III.A.2 on a aussi, pour tout p dans

$$\mathbf{N}^*, f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{2^n}\right) \in \tilde{\tau}_p, \text{ puisque } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{n+p}}{2^n} \in [0; 1] \text{ et } f([0; 1]) \subset \tau. \text{ On en conclut } \boxed{f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{2^n}\right) = z.}$$

c. Pour p dans \mathbf{N}^* et $(r_n)_{n \geq 1}$ dans $\{0, 1\}^{\mathbf{N}^*}$, on a $0 \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{r_n}{2^n} \leq 2^{-p}$, d'où la fonction suivante, écrite en Python,

```

from math import log
i=complex(0,1)

def approx(z, epsilon):
    x=0
    a=1.
    while a>epsilon :
        a/=2
        if z.real <=0 : z=(1.+i)*z.conjugate()+i
        else :
            z=(1.-i)*z.conjugate()+i
            x+=a
    return(x)

```

III.A.5. a. Soit x dans $[0; 1]$. Si $f(x) \in i\mathbf{R}$, alors $f(x) = f(1-x)$ et donc, si $x \neq \frac{1}{2}$, f ne saurait être injective.

Or, d'après III.A.2.d, $x = 1/4$ convient puisque $f(1/4) = 0$ et donc f n'est pas injective.

b. Supposons l'existence d'une bijection continue g de $[0; 1]$ sur τ . Comme τ a trois sommets et $[0; 1]$ deux extrémités, on dispose d'un sommet s de τ différent de $g(0)$ et de $g(1)$. On note a l'antécédent de s . L'ensemble $\tau \setminus \{s\}$ est convexe donc connexe par arcs alors que $[0; 1] \setminus \{a\}$ ne l'est pas. Il en résulte que g^{-1} ne saurait être continue sur $\tau \setminus \{s\}$, d'après le théorème de BOLZANO.

On dispose donc de z dans $\tau \setminus \{s\}$ et de $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ à valeurs dans $\tau \setminus \{s\}$ convergeant vers z mais telle que $(g^{-1}(z_n))_{n \in \mathbf{N}}$ ne converge pas vers $g^{-1}(z)$. On dispose alors de ε dans \mathbf{R}_+ tel que l'ensemble des n dans \mathbf{N} tels que $|g^{-1}(z_n) - g^{-1}(z)| \geq \varepsilon$ est infini. En particulier $[0; 1] \setminus]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$ est non vide, compact en tant qu'intersection du compact $[0; 1]$ et du fermé $\mathbf{R} \setminus]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$. D'après le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS on dispose donc d'une valeur d'adhérence ℓ de $(g^{-1}(z_n))_{n \in \mathbf{N}}$, dans $[0; 1] \setminus]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$. Mais, par continuité de g , il vient $g(\ell) = \lim_n g(g^{-1}(z_n)) = \lim_n z_n = z$ et donc $\ell = g^{-1}(z)$. Cette contradiction finale assure que τ n'existe pas de bijection continue de $[0; 1]$ sur τ .

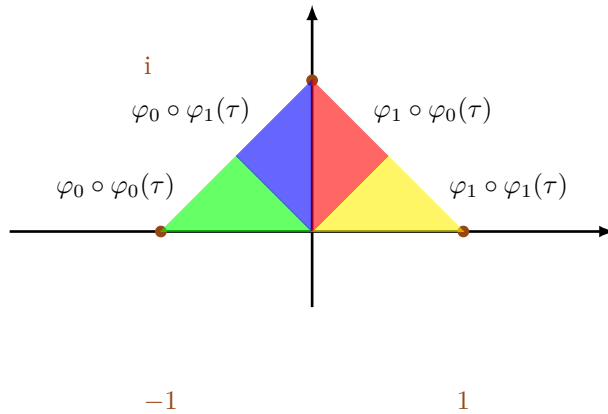
Remarque : si g est continue et bijective de $[0; 1]$ sur τ , alors l'image de tout fermé de $[0; 1]$ est l'image continue d'un compact et est donc un compact de τ . Il en résulte que l'image réciproque par g^{-1} d'un fermé de $[0; 1]$ est un fermé de τ et donc que g^{-1} est continue, i.e. g est un homéomorphisme (c'est la version sophistiquée du théorème de la bijection). En particulier g^{-1} envoie continûment τ dans $[0; 1]$ et c'est impossible par l'argument de connexité par arcs déjà mentionné.

III.A.6. a. On a déjà vu que

$\varphi_0 \circ \varphi_0$ est l'homothétie de centre -1 et de rapport $1/2$. De même $\varphi_1 \circ \varphi_1$ est l'homothétie de centre 1 et de rapport $1/2$.

Pour z dans \mathbf{C} , on calcule directement : $\varphi_0 \circ \varphi_1(z) = \frac{i}{2}(z+1)$ et $\varphi_1 \circ \varphi_0(z) = \frac{i}{2}(1-z)$, et donc

$\varphi_0 \circ \varphi_1$ est la similitude directe de centre $\frac{-1+2i}{5}$, d'angle $\pi/2$ et de rapport $\frac{1}{2}$ et $\varphi_1 \circ \varphi_0$ est la similitude directe de centre $\frac{1+2i}{5}$, d'angle $-\pi/2$ et de rapport $\frac{1}{2}$.



- b. On a vu en I.A.3 qu'une application de la forme $z \mapsto \alpha \bar{z} + \beta$ admet un unique point fixe lorsque $|\alpha| \neq 1$. Plus directement c'est aussi le cas d'une application de la forme $z \mapsto \alpha z + \beta$ si $\alpha \neq 1$. Ici α est un produit (non vide) de complexes de module $1/\sqrt{2}$ et est donc de module strictement inférieur à 1. Il en résulte que φ a un unique point fixe.
- c. On complète r_1, \dots, r_p en une suite périodique de période p en posant, pour k dans $\llbracket 1; p \rrbracket$ et n dans \mathbf{N} , $r_{np+k} = r_k$. Alors, avec les notations de III.A.1, $x_p = x$ et donc $f(x)$ est point fixe de $\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_p}$. Par définition de x , on a

$$x = \sum_{k=1}^p \frac{r_k}{2^k} \left(1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{2p}} + \dots \right)$$

et donc $f \left(\frac{\sum_{k=1}^p 2^{p-k} r_k}{2^p - 1} \right)$ est l'unique point fixe de $\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_p}$.

- d. Soit z dans τ , on lui associe comme en III.A.4 une suite $(r_n)_{n \geq 1}$. Soit alors ε dans \mathbf{R}_+ . On dispose de N dans \mathbf{N}^* tel que $2^{-N} \leq \varepsilon$. On considère alors la suite N périodique construite à partir de r_1, \dots, r_N et le point fixe de $\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_N}$ obtenu par la construction précédente. On a alors $\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{2^n} - \sum_{n=1}^N \frac{r_n}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^N}$ et donc, puisque $\varphi_{r_1} \circ \dots \circ \varphi_{r_p}$ est $2^{-p/2}$ -lipschitzienne, donc contractante, $|z - f(x)| \leq \frac{1}{2^N}$. Comme $f(x) = x$, on a $|z - x| \leq \varepsilon$ et, finalement, X est dense dans τ .

III.B - Dérivabilité de f

III.B.1. Remarquons, si $\alpha_n < x < \beta_n$,

$$f(\beta_n) - f(\alpha_n) = (\beta_n - x) \frac{f(\beta_n) - f(x)}{\beta_n - x} + (x - \alpha_n) \frac{f(x) - f(\alpha_n)}{x - \alpha_n}$$

de sorte que $\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$ est barycentre de $\frac{f(\beta_n) - f(x)}{\beta_n - x}$ et de $\frac{f(x) - f(\alpha_n)}{x - \alpha_n}$ affectés respectivement des poids positifs $\beta_n - x$ et $x - \alpha_n$.

Soit maintenant ε dans \mathbf{R}_+ . On dispose de n_0 tels que $\frac{f(\beta_n) - f(x)}{\beta_n - x}$ et de $\frac{f(x) - f(\alpha_n)}{x - \alpha_n}$ appartiennent à la boule de centre $f'(x)$ et de rayon ε pour n supérieur à n_0 . Par convexité de cette boule, elle contient donc aussi $\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$ au moins si $\alpha_n < x < \beta_n$. Le cas où il y a une égalité est direct et on a donc

montré que la suite $\left(\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \right)$ converge vers $f'(x)$.

III.B.2. a. Avec les notations de l'énoncé, il vient

$$f(\alpha_n) = \varphi_{r_1(x)} \circ \cdots \circ \varphi_{r_n(x)}(f(0)) \quad \text{et} \quad f(\beta_n) = \varphi_{r_1(x)} \circ \cdots \circ \varphi_{r_n(x)}(f(1)) .$$

Puisque les applications φ_0 et φ_1 sont $1/\sqrt{2}$ -lipschitziennes, il en résulte

$$|f(\beta_n) - f(\alpha_n)| = 2^{-n/2}|f(1) - f(0)| = 2^{1-(n/2)}$$

et donc $\left| \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \right| = 2^{1+(n/2)}$ et la suite $\left(\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \right)$ n'est donc pas bornée. Elle ne saurait converger et ainsi f n'est pas dérivable en x .

b. D'après l'équation fonctionnelle II.4.c, si f est dérivable à gauche en 1, elle l'est à droite en 0. On vient de voir que ce n'est pas le cas et donc f n'est pas dérivable en 1.