MATHÉMATIQUES II

Les calculatrices sont autorisées

Notations :

- $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.
- On fixe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$.

Partie I -

I.A - On fixe une application φ de E^2 dans $\mathbb{K}$. On suppose que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E, c'est-à-dire que, pour tout $(x, y, z) \in E^3$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\varphi(x + \alpha y, z) = \varphi(x, z) + \alpha\varphi(y, z)$ et $\varphi(x, z) = \varphi(z, x)$.

I.A.1) Pour tout élément x de E, on note $h(x)$ l'application de E dans E telle que $\forall y \in E$, $h(x)(y) = \varphi(x, y)$.

a) Montrer que, pour tout x de E, $h(x)$ est élément du dual de E, noté E^*.

b) Montrer que h est une application linéaire de E dans E^*.

I.A.2) Si A est une partie de E, on note $A^{\perp\varphi} = \{x \in E / \forall a \in A \ \varphi(x, a) = 0\}$. Montrer que $A^{\perp\varphi}$ est un sous-espace vectoriel de E.
Par la suite, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on notera $A^{\perp}$ au lieu de $A^{\perp\varphi}$.

I.A.3) On dit que φ est non dégénérée si et seulement si $E^{\perp\varphi} = \{0\}$.
Montrer que φ est non dégénérée si et seulement si h est un isomorphisme.

I.A.4) Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

On note $e^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de e.

a) Montrer que la matrice de h dans les bases e et e^* est :

$$\mathrm{mat}(h, e, e^*) = (\varphi(e_i, e_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Cette dernière matrice sera également appelée la matrice de φ dans la base e et notée $\mathrm{mat}(\varphi, e)$

b) Soit $(x, y) \in E^2$. On note X et Y les matrices colonnes dont les coefficients sont les composantes de x et y dans la base e.

Montrer que $\varphi(x, y) = {}^tX\Omega Y$ où $\Omega = \mathrm{mat}(\varphi, e)$ et où ${}^tX$ désigne la matrice ligne obtenue en transposant X.

Filière MP

I.B - Si φ est une forme bilinéaire symétrique sur E, on note q_φ l'application de E dans $\mathbb{K}$ définie par : $\forall x \in E$, $q_\varphi(x) = \varphi(x, x)$. On dit que q_φ est la forme quadratique associée à φ. On note $Q(E)$ l'ensemble des q_φ où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

I.B.1) Soit $q \in Q(E)$.

Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire symétrique sur E, notée φ, telle que $q = q_\varphi$. On dira que φ est la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique q. On dira que q est non dégénérée si et seulement si φ est non dégénérée. Si e est une base de E, on notera $\mathrm{mat}(q, e) = \mathrm{mat}(\varphi, e)$. On l'appellera la matrice de q dans la base e.

I.B.2) Soit q une forme quadratique sur E. Soit E' un second $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et soit q' une forme quadratique sur E'.
On appelle isométrie de (E, q) dans (E', q') tout isomorphisme f de E dans E' vérifiant : pour tout $x \in E$, $q'(f(x)) = q(x)$. On dira que (E, q) et (E', q') sont isométriques si et seulement si il existe une isométrie de (E, q) dans (E', q').
Montrer que (E, q) et (E', q') sont isométriques si et seulement si il existe une base e de E et une base e' de E' telles que $\mathrm{mat}(q, e) = \mathrm{mat}(q', e')$.

I.B.3) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Notons $c = (c_1, \ldots, c_{2p})$ la base canonique de $\mathbb{K}^{2p}$.

$$\text{Pour tout } x = \sum_{i=1}^{2p} x_i c_i \in \mathbb{K}^{2p}, \text{ on pose } q_p(x) = 2\sum_{i=1}^{p} x_i x_{i+p}.$$

a) Montrer que q_p est une forme quadratique sur $\mathbb{K}^{2p}$ et calculer $\mathrm{mat}(q_p, c)$.

b) On appelle *espace de Artin (ou espace artinien)* de dimension $2p$ tout couple (F, q), où F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $2p$, et où q est une forme quadratique sur F telle que (F, q) et $(\mathbb{K}^{2p}, q_p)$ sont isométriques.
Montrer que dans ce cas, q est non dégénérée.
Lorsque $p = 1$, on dit que (F, q) est un plan artinien.

c) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et pour tout

$$x = \sum_{k=1}^{2p} x_k c_k \in \mathbb{C}^{2p}, \text{ on pose } q(x) = \sum_{k=1}^{2p} x_k^2$$

Montrer que $(\mathbb{C}^{2p}, q)$ est un espace de Artin.

d) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et pour tout

$$x = \sum_{i=1}^{2p} x_i c_i \in \mathbb{R}^{2p}, \text{ : on pose } q'(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{2p} x_i^2 .$$

Montrer que $(\mathbb{R}^{2p}, q')$ est un espace de Artin.

e) Si (F, q) est un espace de Artin de dimension $2p$, montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel G de F de dimension p tel que la restriction de q à G est identiquement nulle.

Partie II -

Pour toute la suite de ce problème, on suppose que φ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E, et on note q sa forme quadratique.

II.A -

II.A.1) Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On note encore $e^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de e. Soit $p \in \{1, \ldots, n\}$. On note F l'espace engendré par $e_1, \ldots, e_p$.

a) Montrer que $F^\perp$ est l'image réciproque par h de $\mathrm{Vect}(e_{p+1}^*, \ldots, e_n^*)$, où h est définie au I.A.1.

b) Montrer que $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$.

c) Montrer que $(F^\perp)^\perp = F$.

II.A.2) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

a) Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

b) Montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

II.A.3) Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note φ_F la restriction de φ à F^2. On dira que F est singulier si et seulement si φ_F est dégénérée.
Montrer que F est non singulier si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- $F \cap F^\perp = \{0\}$;
- $E = F \oplus F^\perp$;
- $F^\perp$ est non singulier.

II.A.4) On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont orthogonaux si et seulement si pour tout $(x,y) \in F \times G$, $\varphi(x, y) = 0$.
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E orthogonaux et non singuliers, montrer que $F \oplus G$ est non singulier.

II.B - Soit q' une seconde forme quadratique sur E dont la forme bilinéaire symétrique associée est notée φ'. Comme au I.A.1, on note, pour tout $(x,y) \in E^2$, $h(x)(y) = \varphi(x,y)$ et $h'(x)(y) = \varphi'(x,y)$.

Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On dit que e est q-orthogonale si et seulement si, pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, avec $i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$.

II.B.1) On suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $q(x,y) = x^2 - y^2$ et $q'(x,y) = 2xy$.

Déterminer une base q-orthogonale et une base q'-orthogonale.

II.B.2) Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^2$ orthogonale pour q et pour q' définies à la question II.B.1 ?

II.B.3) Supposons que e est à la fois q-orthogonale et q'-orthogonale.
Montrer que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, e_i est un vecteur propre de $h^{-1} \circ h'$.

II.B.4) On suppose que $h^{-1} \circ h'$ admet n valeurs propres distinctes.
Montrer qu'il existe une base de E orthogonale à la fois pour q et pour q'.

II.C -

II.C.1) Soit $x \in E$ tel que $q(x) = 0$ et tel que $x \neq 0$.

On se propose de démontrer qu'il existe un plan $\Pi \subset E$ contenant x et tel que $(\Pi, q_{/\Pi})$ soit un plan artinien (où $q_{/\Pi}$ désigne la restriction de l'application q au plan Π).

a) Démontrer qu'il existe $z \in E$ tel que $\varphi(x, z) = 1$

b) On pose $y = z - \frac{q(z)}{2}x$. Calculer $q(y)$.

c) Conclure.

II.C.2) Soit F un sous-espace vectoriel singulier de E. On suppose que $(e_1, \ldots, e_s)$ est une base de $F \cap F^\perp$. On note G un supplémentaire de $F \cap F^\perp$ dans F.

a) Montrer que G est non singulier.

b) Démontrer par récurrence sur la dimension de $F \cap F^\perp$ (en commençant par $\dim(F \cap F^\perp) = 1$, puis $\dim(F \cap F^\perp) > 1$) qu'il existe s plans $P_1, \ldots, P_s$ de E tels que les trois propriétés suivantes soient vérifiées :

1) Pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, $(P_i, q_{/P_i})$ est un plan artinien contenant e_i

2) Pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, s\}^2$ avec $i \neq j$, P_i est orthogonal à P_j.

3) Pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, P_i est orthogonal à G.

II.C.3) Montrer que $\bar{F} = G \oplus P_1 \oplus \ldots \oplus P_s$ est non singulier.
On dira que $\bar{F}$ est un complété non singulier de F.

II.C.4) Montrer que si $q_{/F} = 0$, alors $\dim(F) \leq \frac{n}{2}$.

II.C.5) On suppose que $n = 2p$. Montrer que (E,q) est un espace de Artin si et seulement si il existe un sous-espace vectoriel F de E de dimension p tel que $q_{/F} = 0$.

Partie III -

On note $O(E, q)$ l'ensemble des isométries de (E, q) dans lui-même, c'est-à-dire l'ensemble des automorphismes f de E vérifiant :

pour tout $x \in E$, $q(f(x)) = q(x)$.

III.A -

III.A.1) Soit f un endomorphisme de E .

a) Montrer que $f \in O(E, q)$ si et seulement si, pour tout $(x,y) \in E^2$: $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$.

Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E et si $f \in O(E, q)$, alors $f(F^{\perp}) = (f(F))^{\perp}$.

b) Soit e une base de E . Calculer la matrice de la forme bilinéaire :

$(x,y) \mapsto \varphi(f(x), f(y))$ en fonction de $\operatorname{mat}(f, e)$ et de $\operatorname{mat}(\varphi, e)$.

c) Posons $M = \operatorname{mat}(f, e)$ et $\Omega = \operatorname{mat}(\varphi, e)$.

Montrer que $f \in O(E, q)$ si et seulement si $\Omega = {}^t M \Omega M$.

d) Montrer que si $f \in O(E, q)$, alors $\det(f) \in \{1, -1\}$. On notera :

$$O^+(E, q) = \{f \in O(E, q)/\det(f) = 1\} \text{ et } O^-(E, q) = \{f \in O(E, q)/\det(f) = -1\} .$$

III.A.2) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On note s la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

a) Montrer que $s \in O(E, q)$ si et seulement si F et G sont orthogonaux (pour φ).

b) En déduire que les symétries de $O(E, q)$ sont les symétries par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$, où F est un sous-espace non singulier de E .

c) Lorsque H est un hyperplan non singulier, on appellera réflexion selon H la symétrie par rapport à H parallèlement à $H^{\perp}$. Montrer que toute réflexion de E est un élément de $O^-(E, q)$.

d) Soit $(x,y) \in E^2$ tel que $q(x) = q(y)$ et $q(x-y) \neq 0$.

On note s la réflexion selon $H = \{x-y\}^{\perp}$. Montrer que $s(x) = y$.

III.B -

III.B.1) Supposons que E est un espace artinien de dimension $2p$ et que F est un sous-espace de E de dimension p tel que $q/_F = 0$.

Si $f \in O(E, q)$ avec $f(F) = F$, montrer que $f \in O^+(E, q)$.

III.B.2) Soit F un sous-espace de E tel que $\overline{F} = E$ (où $\overline{F}$ est un complété non singulier de F). Montrer que si $f \in O(E, q)$ avec $f/_F = \mathrm{Id}_F$ (où Id_F est l'application identité de F dans F), alors $f \in O^+(E, q)$.

III.B.3) Soit $f \in O(E, q)$. On suppose que pour tout $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$, on a $f(x) - x \neq 0$ et $q(f(x) - x) = 0$.
On se propose de démontrer que $f \in O^+(E, q)$ et que E est un espace de Artin.

a) Montrer que $\dim(E) \geq 3$.

b) On note $V = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$. Montrer que $q/_V = 0$.

c) Soit $x \in E$ tel que $q(x) = 0$. Notons $H = \{x\}^\perp$. Montrer que $q/_H$ n'est pas identiquement nulle.
En déduire qu'il existe $y \in E$ tel que $q(x+y) = q(x-y) = q(y) \neq 0$.

d) On note $U = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$. Montrer que $q/_U = 0$.

e) Montrer que $U^\perp = V = U$.

f) En déduire que E est un espace de Artin et que $f \in O^+(E, q)$.

Partie IV -

IV.A - On souhaite démontrer le *théorème de Cartan-Dieudonné*, dont voici l'énoncé : « si $f \in O(E, q)$, f est la composée d'au plus n réflexions, où $n = \dim(E)$, en convenant que Id_E est la composée de 0 réflexion.»

IV.A.1) Montrer le théorème de Cartan-Dieudonné lorsque $n = 1$. On veut ensuite raisonner par récurrence. On suppose donc que $n > 1$ et que le théorème de Cartan-Dieudonné est démontré en remplaçant E par tout espace vectoriel de dimension $n-1$.

IV.A.2) Conclure lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = x$ avec $q(x) \neq 0$.

IV.A.3) Conclure lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$ et $q(f(x) - x) \neq 0$.

IV.A.4) Conclure dans les autres cas.

IV.B - On se propose de démontrer le *théorème de Witt*, dont voici l'énoncé : « soient F et F' deux sous-espaces vectoriels de E tels qu'il existe une isométrie f de $(F, q/_F)$ dans $(F', q/_{F'})$ (la définition d'une isométrie a été donnée au I.B.2). Alors il existe $g \in O(E, q)$ telle que $g/_F = f$.»

IV.B.1) Montrer qu'on peut se ramener au cas où F et F' sont non singuliers.

IV.B.2) On suppose que F et F' sont non singuliers, avec $\dim(F) = \dim(F') = 1$. Soit $x \in F$ avec $x \neq 0$. Posons $y = f(x)$.

a) Montrer que $q(x+y)$ ou $q(x-y)$ est non nul.

b) Montrer le théorème de Witt dans ce cas, en utilisant la question III.A.2-d).

IV.B.3) On suppose maintenant que F et F' sont non singuliers, avec $\dim(F) = \dim(F') > 1$.

a) Montrer qu'il existe F_1 et F_2 non singuliers, tels que $F_1 \perp F_2$ et $F = F_1 \oplus F_2$, avec $\dim(F_1) = \dim(F) - 1$.

b) Supposons qu'il existe $g \in O(E, q)$ telle que $g/_{F_1} = f/_{F_1}$. Notons $F'_1 = f(F_1)$. Montrer que $f(F_2) \subset F'^{\perp}_1$ et que $g(F_2) \subset F'^{\perp}_1$.

c) Montrer qu'il existe

$$h \in O(F'^{\perp}_1, q/_{F'^{\perp}_1}) \text{ telle que } h/_{g(F_2)} = (f \circ g^{-1})/_{g(F_2)}.$$

d) Montrer qu'il existe $k \in O(E, q)$ telle que $k/_F = f$.

IV.B.4) Démontrer le théorème de Witt.

••• FIN •••

Deuxième composition de mathématiques – Centrale-Supélec 2010 – MP

PARTIE I

C'est presque du cours, mais il est visiblement attendu des démonstrations !

I.A.1.a. Soit x, y et z dans E et α dans $\mathbf{K}$. L'application $h(x)$ est à valeurs dans $\mathbf{K}$ puisque φ l'est. On a, par symétrie et linéarité à gauche,

$$h(x)(\alpha y+z)=\varphi(x,\alpha y+z)=\varphi(\alpha y+z,x)=\alpha\varphi(y,x)+\varphi(z,x)=\alpha\varphi(x,y)+\varphi(x,z)$$

soit $h(x)(\alpha y+z)=\alpha h(x)(y)+h(x)(z)$ et donc $h(x)$ est linéaire. D'où $\boxed{h(x)\in E^*.}$

I.A.1.b. On vient de voir que h est une application de E dans E^*. Soit maintenant x, y et z dans E et α dans $\mathbf{K}$. On a, par définition,

$$h(\alpha x+y)(z)=\varphi(\alpha x+y,z)=\alpha\varphi(x,z)+\varphi(y,z)=\alpha h(x)(y)+h(x)(z)$$

et donc $h(\alpha x+y)=\alpha h(x)+h(y)$, donc h est linéaire, i.e. $\boxed{h\in\mathcal{L}(E,E^*).}$

I.A.2. Par symétrie de φ, on a $A^{\perp\varphi}=\cap_{a\in A}\operatorname{Ker}(h(a))$ et donc, en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels de E, $\boxed{A^{\perp\varphi}\text{ est un sous-espace vectoriel de }E.}$

I.A.3. Par définition $E^{\perp\varphi}=\operatorname{Ker}(h)$ et donc φ est non-dégénérée si et seulement si h est injective. Puisque $\dim(E)=\dim(E^*)<+\infty$, par dimension h est injective si et seulement si elle est bijective, d'où $\boxed{\varphi\text{ est non-dégénérée si et seulement si }h\text{ est bijective.}}$

I.A.4.a. Le coefficient d'indice (i,j) de la matrice de h relativement aux base e et e^* est donné par le coefficient de e_i^* dans l'écriture $h(e_j)$. Par définition de la base duale, si $h(e_j)$ s'écrit $h(e_j)=\sum_{k=1}^n\alpha_k e_k^*$, on a $h(e_j)(e_i)=\alpha_i$ et donc le coefficient cherché est $h(e_j)(e_i)$, i.e. $\varphi(e_j,e_i)$. Par symétrie de φ, on a donc $\boxed{\operatorname{Mat}(h,e,e^*)=(\varphi(e_i,e_j))_{1\le i,j\le n}.}$

I.A.4.b. Par définition ${}^{\mathrm{t}}X$ est la matrice ligne $(e_i^*(x))_{1\le i\le n}$ et Y est la matrice colonne $(e_i^*(y))_{1\le i\le n}$. On a donc, par bilinéarité,

$${}^{\mathrm{t}}X\Omega Y=\sum_{1\le i,j\le n}e_i^*(x)\varphi(e_i,e_j)e_j^*(y)=\varphi\left(\sum_{i=1}^n e_i^*(x)e_i,\sum_{j=1}^n e_j^*(y)e_j\right)=\varphi(x,y)$$

d'où $\boxed{\varphi(x,y)={}^{\mathrm{t}}X\Omega Y.}$

I.B.1. Soit q dans $Q(E)$ et φ une forme bilinéaire symétrique telle que $q=q_\varphi$. Par définition, pour x et y dans E, on a $q(x+y)-q(x-y)=4\varphi(x,y)$ de sorte que φ est entièrement déterminée par q : $\boxed{\text{il existe une unique forme bilinéaire symétrique telle que }q=q_\varphi.}$

I.B.2. On note φ et φ' les formes polaires de q et q'.

Soit f une isométrie de (E,q) dans (E',q') et e une base de E. Puisque f est bijective, l'image de e par f, notée e', est une base de E'. On note $e=(e_i)_{1\le i\le n}$ et $e'=(e'_i)_{1\le i\le n}$, de sorte que, pour i dans $[\![1;n]\!]$, on a $f(e_i) = e'_i$. On a donc, pour i et j dans $[\![1;n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\varphi(e_i, e_j) &= \frac{1}{4}\left(q(e_i+e_j) - q(e_i-e_j)\right) \text{ (par polarisation)} \\
&= \frac{1}{4}\left(q'(f(e_i+e_j)) - q'(f(e_i-e_j))\right) \\
&= \frac{1}{4}\Big(q'(e'_i+e'_j) - q'(e'_i-e'_j)\Big) \text{ (par linéarité de } f) \\
&= \varphi'(e'_i, e'_j) \text{ (par polarisation)}
\end{aligned}$$

et donc les matrices de q dans la base e et de q' dans la base e' coïncident.

Réciproquement soit e et e' deux bases de E et E' respectivement telles que les matrices de q dans la base e et de q' dans la base e' coïncident. On note Ω cette matrice. Soit f l'unique application linéaire de E dans E' qui envoie la base e sur e'. Comme e' est une base, f est un isomorphisme. Soit x dans E et X la matrice colonne de ses coefficients dans la base e. Par définition de f, X est aussi la matrice colonne des coefficients de $f(x)$ dans la base e'. D'après la question $IA4b$, on a $q(x) = {}^{\mathrm{t}}X\Omega X = q'(f(x))$ et donc

$\boxed{(E,q) \text{ et } (E',q') \text{ sont isométriques si et seulement s'il existe deux bases } e \text{ et } e' \text{ de } E \text{ et } E' \text{ respectivement telles que les matrices de } q \text{ dans la base } e \text{ et de } q' \text{ dans la base } e' \text{ coïncident.}}$

I.B.3.a. Soit φ la forme donnée par $\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{p}(c_i^*(x)c_{i+p}^*(y) + c_i^*(y)c_{i+p}^*(x))$. Elle est linéaire par rapport à chacune des variables puisque combinaison linéaire de la base duale de c. Elle est symétrique par construction et q est la forme quadratique associée à φ également par construction.

Par définition le coefficient d'indice (i,j) de $\mathrm{Mat}(q,c)$ est donné par $\varphi(c_i,c_j)$, i.e. par $\delta_{j,i+p} + \delta_{i,j+p}$ ou encore $\delta_{|j-i|,p}$. On a donc, en notant I_p la matrice identité de $\mathfrak{M}_p(\mathbf{K})$,

$$\boxed{q \text{ est une forme quadratique et } \mathrm{Mat}(q,c) = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}.}$$

I.B.3.b. D'après IA3 et IA4a, q est non-dégénérée si et seulement si sa matrice dans une base (et donc dans n'importe quelle base) est inversible. Or d'après IB2 la matrice de q dans une certaine base est $\begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$, ce qui est une matrice de permutation et, plus précisément, d'un produit de p transpositions. Son déterminant est donc non nul (égal à $(-1)^p$). Donc $\boxed{q \text{ est non-dégénérée.}}$

I.B.3.c. D'après l'identité, valables pour u et v complexes, $u^2+v^2 = (u+iv)(u-iv)$, on a pour k dans $[\![1;p]\!]$,

$$(c_k^*)^2 + (c_{k+p}^*)^2 = 2\frac{c_k^* + ic_{k+p}^*}{\sqrt{2}}\frac{c_k^* - ic_{k+p}^*}{\sqrt{2}}\ .$$

Soit f la famille $(f_k)_{1\leq k\leq 2p}$ avec, pour k dans $[\![1;p]\!]$,

$$f_k = \frac{c_k - ic_{k+p}}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad f_{k+p} = \frac{c_k + ic_{k+p}}{\sqrt{2}}\ ,$$

alors f est une base car la matrice de f dans la base c est $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I_p & \frac{1}{\sqrt{2}}I_p \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}I_p & \frac{i}{\sqrt{2}}I_p \end{pmatrix}$ dont le

déterminant se calcule en ajoutant les p dernières colonnes aux p premières afin de se ramener à une matrice triangulaire, ce qui donne i^p.
De plus, on a, toujours pour k dans $[\![1;p]\!]$,

$$f_k^* = \frac{c_k^* + ic_{k+p}^*}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad f_{k+p}^* = \frac{c_k^* - ic_{k+p}^*}{\sqrt{2}} ,$$

comme on le vérifie en évaluant ces formes linéaires sur la base f. On a donc, pour x dans E,

$$q(x) = 2\sum_{k=1}^{p} f_k^*(x) f_{k+p}^*(x)$$

et donc la matrice de q dans la base f est $\begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$, i.e. $\boxed{(\mathbf{C}^{2p}, q) \text{ est un espace de Artin.}}$

I.B.3.d. On effectue le même raisonnement que précédemment. On a pour k dans $[\![1;p]\!]$,

$$(c_k^*)^2 - (c_{k+p}^*)^2 = 2\frac{c_k^* + c_{k+p}^*}{\sqrt{2}}\frac{c_k^* - c_{k+p}^*}{\sqrt{2}} .$$

Soit f la famille $(f_k)_{1\leq k\leq 2p}$ avec, pour k dans $[\![1;p]\!]$,

$$f_k = \frac{c_k - c_{k+p}}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad f_{k+p} = \frac{c_k + c_{k+p}}{\sqrt{2}} ,$$

alors f est une base car la matrice de f dans la base c est $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} I_p & \frac{1}{\sqrt{2}} I_p \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} I_p & \frac{1}{\sqrt{2}} I_p \end{pmatrix}$ dont le déterminant se calcule en ajoutant les p dernières colonnes aux p premières afin de se ramener à une matrice triangulaire, ce qui donne 1.
De plus, on a, toujours pour k dans $[\![1;p]\!]$,

$$f_k^* = \frac{c_k^* - c_{k+p}^*}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad f_{k+p}^* = \frac{c_k^* + c_{k+p}^*}{\sqrt{2}} ,$$

comme on le vérifie en évaluant ces formes linéaires sur la base f. On a donc, pour x dans E,

$$q(x) = 2\sum_{k=1}^{p} f_k^*(x) f_{k+p}^*(x)$$

et donc la matrice de q dans la base f est $\begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$, i.e. $\boxed{(\mathbf{R}^{2p}, q) \text{ est un espace de Artin.}}$

I.B.3.e. Soit f une isométrie de (F, q) sur $(\mathbf{K}^{2p}, q_p)$ et e la préimage de la base c par f. Soit alors G l'espace vectoriel engendré par $(e_i)_{1\leq i\leq p}$. C'est un espace de dimension p puisque e est une famille libre.

La restriction de q à G est une forme quadratique associée à la restriction à $G\times G$ de φ, où φ est la forme polaire de q. De plus, par définition la matrice de $q_{|G}$ dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq p}$

est la matrice extraite de celle de q dans la base e, obtenue en ne considérant que les p premières lignes et les p premières colonnes. Par définition d'une isométrie, la matrice de q dans la base e est $\begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$, et donc celle de $q_{|G}$ est la matrice nulle. Il résulte de IA4b que $\boxed{\text{la restriction de } q \text{ à } G \text{ est identiquement nulle.}}$

PARTIE II

II.A.1.a. Soit ψ dans E^*. On a $\psi = \sum_{i=1}^n \psi(e_i)e_i^*$ puisque ces deux formes linéaires coïncident sur les vecteurs de e. Il vient, pour x dans E tel que $\psi = h(x)$,

$$\psi = h(x) = \sum_{i=1}^n h(x)(e_i)e_i^* = \sum_{i=1}^n \varphi(x, e_i)e_i^*$$

et donc, par unicité des coordonnées de ψ dans la base e^*, ψ appartient à $\mathrm{V}ect\,(e_i^*)_{p+1\le i\le n}$ si et seulement si, pour tout i dans $[\![1;p]\!]$, $\varphi(x, e_i) = 0$, i.e. x appartient à l'orthogonal de $\mathrm{V}ect\,(e_i)_{1\le i\le p}$. Comme h est un isomorphisme, il en résulte $\boxed{F^\perp = h^{-1}\left(\mathrm{V}ect\,(e_i^*)_{p+1\le i\le n}\right).}$

II.A.1.b. Comme h est un isomorphisme, le résultat précédent entraîne $\dim(F^\perp) = n - p$ et donc, puisque $\dim(F) = p$, on a $\boxed{\dim(F) + \dim(F^\perp) = n.}$

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Si F est nul, $F^\perp = E$ et donc $\dim(F)+\dim(F^\perp) = n$. Sinon, soit f une base de E obtenue en complétant une base de F. On applique ce qui précède en prenant pour base e la base f. Il vient $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$ et donc pour **tout** sous-espace vectoriel F de E, on a $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$.

II.A.1.c. Par définition de $F^\perp$, on a $F \subset (F^\perp)^\perp$. D'après la remarque précédente appliquée au sous-espace vectoriel $F^\perp$, on a $\dim(F^\perp) + \dim((F^\perp)^\perp) = n$. Il en résulte, par égalité des dimensions $\boxed{F = (F^\perp)^\perp.}$

Tout comme pour la question précédente, ce résultat est valable pour tout sous-espace vectoriel F.

II.A.2.a. Comme $F \subset F + G$, on a $(F + G)^\perp \subset F^\perp$ et de même $(F + G)^\perp \subset G^\perp$, d'où $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$. Réciproquement soit x dans $F^\perp \cap G^\perp$ et y dans $F + G$. On peut écrire $y = f + g$ avec f et g dans F et G respectivement et il vient $\varphi(x, y) = \varphi(x, f) + \varphi(x, g) = 0$, d'où $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$. Par double inclusion, il vient $\boxed{(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp.}$

II.A.2.b. On applique ce qui précède aux deux sous-espaces vectoriels $F^\perp$ et $G^\perp$. Il vient $F \cap G = (F^\perp + G^\perp)^\perp$, grâce à la propriété IIA1c. On prend l'orthogonal de ces deux sous-espaces. Toujours d'après IIA1c, il vient $\boxed{(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.}$

II.A.3. La forme bilinéaire symétrique φ_F est non-dégénérée si et seulement si $F^{\perp\varphi_F} = \{0\}$. Or, puisque φ_F est la restriction de φ à F, $F^{\perp\varphi_F} = F^{\perp\varphi} \cap F = F^\perp \cap F$. D'où la première assertion.

On a $F \cap F^\perp = \{0\}$ si et seulement si F et $F^\perp$ sont en somme directe. Comme leurs dimensions sont complémentaires c'est le cas si et seulement si $E = F \oplus F^\perp$.

Enfin, en appliquant le résultat précédent à $F^\perp$, il vient que $F^\perp$ est non singulier si et seulement si $F^\perp \cap (F^\perp)^\perp = \{0\}$, i.e. grâce à IIA1c, $F \cap F^\perp = \{0\}$. D'où

$$\boxed{F \text{ est non singulier si et seulement si } F^\perp \text{ l'est ou encore } F \cap F^\perp = \{0\} \text{ ou encore } E = F \oplus F^\perp.}$$

II.A.4. Par hypothèse $F \subset G^\perp$ et donc, puisque G est non singulier, $F \cap G \subset G \cap G^\perp = \{0\}$. D'où $F \cap G = \{0\}$ et donc la somme $F + G$ est directe.
De plus $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, donc $(F+G) \cap (F+G)^\perp = (F+G) \cap F^\perp \cap G^\perp$. Soit x dans $F+G$. On écrit $x = f + g$ avec f et g dans F et G respectivement. Si x est orthogonal à F, on a, pour tout y dans F, $0 = \varphi(x,y) = \varphi(f,y) + \varphi(g,y)$. Comme F et G sont orthogonaux, on a $\varphi(g,y) = 0$ et il vient donc $\varphi(f,y) = 0$, d'où $f \in F \cap F^\perp$ et donc $f = 0$. En échangeant les rôles de F et G, et ceux de f et g, on en déduit que si x est orthogonal à G , alors $g = 0$. Et donc $(F+G) \cap F^\perp \cap G^\perp = \{0\}$, i.e. $F + G$ est non singulier. D'où $\boxed{F \oplus G \text{ est non singulier.}}$

II.B.1. Soit u et u' dans $\mathbf{R}^2$. On les écrit $u = (x,y)$ et $u' = (x',y')$ et alors $\varphi(u,u') = xx' - yy'$ et $\varphi'(u,u') = xy' + x'y$. Il en résulte que
$\boxed{(e_1,e_2) \text{ est une base } q\text{-orthogonale et } (e_1+e_2, e_1-e_2) \text{ est une base } q'\text{-orthogonale.}}$

II.B.2. Soit (u,v) une base q-orthogonale et q'-orthogonale. On écrit $u = (x,y)$ et $u' = (x',y')$ et on a donc $xx' - yy' = xy' + x'y = 0$. Le déterminant de ce système linéaire en (x',y') est $x^2 + y^2$. Comme u est non nul, ce déterminant est non nul et donc la seule solution du système linéaire homogène $xx' - yy' = xy' + x'y = 0$ est la solution triviale, i.e. $v = (0,0)$. Cette contradiction assure que $\boxed{\text{il n'existe pas de base à la fois } q\text{-orthogonale et } q'\text{-orthogonale.}}$

II.B.3. Soit i dans $[\![1;n]\!]$. Comme e est q'-orthogonale, pour tout j dans $[\![1;n]\!]$ distinct de i, on a $h'(e_i)(e_j) = 0$ et donc $h'(e_i)$ est proportionnel à e_i^*. Pour la même raison $h(e_i)$ est aussi proportionnel à e_i^*. Comme, de plus, h est bijective, la restriction de h à $\mathbf{K}e_i$ réalise une bijection de $\mathbf{K}e_i$ sur $\mathbf{K}e_i^*$. D'où $h^{-1}(h'(e_i)) \in \mathbf{K}e_i$. Comme e_i n'est pas nul, $\boxed{e_i \text{ est vecteur propre de } h^{-1} \circ h'.}$

II.B.4. On pose $f = h^{-1} \circ h'$. Puisque f admet n valeurs propres distinctes, il est diagonalisable. Soit donc e une base de diagonalisation de f, avec $e = (e_i)_{1 \le i \le n}$, et $(\lambda_i)_{1 \le i \le n}$ des scalaires tous distincts tels que $f(e_i) = \lambda_i e_i$. On a donc, pour i et j distincts dans $[\![1;n]\!]$, par symétrie de φ'

$$\lambda_i \varphi(e_i,e_j) = \varphi(f(e_i),e_j) = h(f(e_i))(e_j) = h'(e_i)(e_j) = \varphi'(e_i,e_j) = \varphi'(e_j,e_i) = \lambda_j \varphi(e_j,e_i)$$

et donc, par symétrie de φ, $(\lambda_i - \lambda_j)\varphi(e_i,e_j) = 0$. Comme $\lambda_i \neq \lambda_j$, on a $\varphi(e_i,e_j) = 0$ et donc e est une base q-orthogonale. L'expression précédente entraîne aussi $\varphi'(e_i,e_j) = 0$ pour $i \neq j$ et donc $\boxed{e \text{ est une base à la fois } q\text{-orthogonale et } q'\text{-orthogonale.}}$

II.C.1.a. Puisque q est non-dégénérée, $h(x)$ n'est pas nulle et est donc surjective. Donc
$\boxed{\text{il existe } z \text{ dans } E \text{ tel que } \varphi(x,y) = 1.}$

II.C.1.b. On a $q(y) = q(z) - q(z)\varphi(z,x) + \dfrac{q(z)^2}{4} q(x) = q(z) - q(z)$, i.e. $\boxed{q(y) = 0.}$

II.C.1.c. Soit Π l'espace engendré par (x,y). Puisque $\varphi(x,y) = \varphi(x,z) - \dfrac{1}{2} q(z) q(x) = 1$ et $\varphi(x,x) = q(x) = 0$, y n'est pas proportionnel à x et donc, puisque x est non nul, la famille (x,y) est libre et Π est un plan. D'après les calculs précédents la matrice de q_Π dans la base (x,y) est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, i.e. $\boxed{\Pi \text{ est un plan artinien contenant } x.}$

II.C.2.a. Soit x dans $G \cap G^\perp$. On a donc $x \in F$. Soit y dans F. On écrit $y = a + b$ avec a dans $F \cap F^\perp$ et b dans G. Comme x est dans F et $a \in F^\perp$, $\varphi(x,a) = 0$. Comme $x \in G^\perp$ et $b \in G$, $\varphi(x,b) = 0$, d'où $\varphi(x,y) = 0$ et donc $x \in F^\perp$. Il en résulte $x \in F \cap F^\perp$ et, comme $x \in G$, il vient $x = 0$. D'où $G \cap G^\perp = \{0\}$, i.e. $\boxed{G \text{ est non singulier.}}$

II.C.2.b. On a $G \subset F$ donc $F^\perp \subset G^\perp$ et $F \cap F^\perp \subset G^\perp$. On peut donc appliquer le résultat de IIC1 à l'espace $G^\perp$, la forme quadratique $q_{G^\perp}$ qui est non-dégénérée puisque $G^\perp$ est non singulier, et le vecteur e_1. Soit donc P_1 un plan artinien contenant e_1 et inclus dans $G^\perp$. La propriété cherchée est donc vraie si $s = 1$.

Si $s > 1$, on considère $E_1 = \mathbf{K}e_1$, $F_1 = \mathrm{V}ect\,(e_i)_{2 \le i \le s}$ de sorte qu'on a $F = E_1 \oplus^\perp F_1 \oplus^\perp G$ et $F \cap F^\perp = E_1 \oplus^\perp F_1$. Or $(F_1 + G)^\perp$ n'est pas inclus dans $E_1^\perp$, car sinon on aurait $E_1 \subset F_1 + G$. Donc on peut trouver z dans $(F_1 + G)^\perp$ tel que $\varphi(e_1, z) = 1$. Soit alors $y = z - \dfrac{q(z)}{2} e_1$ et $P_1 = \mathrm{V}ect\,(e_1, z)$. D'après les calculs effectués en IIC1, P_1 est un plan artinien. Par construction, il orthogonal à $F_1 + G$.

On considère maintenant F' avec $F' = F + P_1 = F_1 \oplus^\perp P_1 \oplus^\perp G$. On a alors $(F')^\perp = F_1^\perp \cap P_1^\perp \cap G^\perp$. Soit x dans $F' \cap (F')^\perp$. On l'écrit $x = e + f + g$ avec e dans P_1, f dans F_1 et g dans G. Soit g' dans G, comme e et f sont dans $G^\perp$, on a $0 = \varphi(x, g') = \varphi(g, g')$, de sorte que g appartient à $G \cap G^\perp$ et donc $g = 0$. De même, puisque P_1 est un plan artinien et est donc non singulier, on a, pour tout e' dans P_1, $0 = \varphi(x, e') = \varphi(e, e')$ et donc $e = 0$. Réciproquement F_1 est bien orthogonal à lui-même ainsi qu'à P_1 (par construction) et G (par hypothèse). Donc $F' \cap (F')^\perp = F_1$. On choisit $P_1 + G$ comme supplémentaire de $F' \cap (F')^\perp$ dans F' et on obtient, par hypothèse de récurrence, $s-1$ plans $P_2, \cdots, P_s$, tous artiniens, deux à deux orthogonaux et orthogonaux à $P_1 + G$, donc à P_1 et à G.

Par conséquent

il existe $P_1, \cdots, P_s$ des plans artiniens orthogonaux deux à deux ainsi qu'à G contenant respectivement $e_1, \cdots, e_s$.

II.C.3. Les plans $P_1, \cdots, P_s$ étant artiniens, ils sont non singuliers. La somme $G + P_1 + \cdots + P_s$ est donc une somme de sous-espaces non singuliers orthogonaux deux à deux. Par une récurrence immédiate à partir du résultat IIA4, c'est donc une somme directe et la somme est non singulière, i.e. $\boxed{G \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus P_s \text{ est non singulier.}}$

II.C.4. Si $q_{|F} = 0$, alors $F \subset F^\perp$ et on a $F \cap F^\perp = F$ et $G = 0$ avec les notations de la question IIC2. Or $\overline{F}$ est un sous-espace de E de dimension $2s + \dim(G)$, i.e. $2s$, donc $2s \le n$, soit $\boxed{s \le n/2.}$

II.C.5. Le sens direct a déjà été démontré en IB3e. Réciproquement soit F de dimension p tel que $q_{|F} = 0$. Alors $F \subset F^\perp$ et on a $F \cap F^\perp = F$ et $G = 0$ avec les notations de la question IIC2. Et donc $\overline{F}$ est somme directe orthogonale de p plans artiniens. Il est en particulier de dimension $2p$ et c'est donc E. On note $P_i = \mathrm{V}ect\,(e_i, f_i)$, pour $1 \le i \le p$, avec $q(e_i) = q(f_i) = 0$ et $\varphi(e_i, f_i) = 1$. Alors $(e_1, \cdots, e_p, f_1, \cdots, f_p)$ est une base de E et la matrice de φ dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$. Il en résulte, d'après IB2, que (E, q) est un espace de Artin. D'où

$$\boxed{(E, q) \text{ est un espace de Artin si et seulement s'il existe } F \text{ de dimension } p \text{ tel que } q_{|F} = 0.}$$

PARTIE III

III.A.1.a. C'est une conséquence directe de l'identité de polarisation. Pour le sens réciproque, la spécialisation en $y = x$ de la propriété de φ donne $\forall x \in E$, $q(f(x)) = q(x)$. De plus si y appartient à $\mathrm{Ker}(f)$, alors pour tout x dans E, on a $\varphi(x, y) = \varphi(f(x), f(y)) = 0$ et donc $y = 0$, puisque q est non-dégénérée. Par conséquent f est un automorphisme et $f \in \mathcal{O}(E, q)$.

Quant au sens direct on a, pour x et y dans E

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right) = \frac{1}{4}\left(q(f(x+y)) - q(f(x-y))\right)$$

et donc, par linéarité de f : $\varphi(x,y) = \dfrac{1}{4}\left(q(f(x)+f(y)) - q(f(x)-f(y))\right)$, d'où $\boxed{\varphi(x,y) = \varphi(f(x), f(y)).}$

Soit F un sous-espace vectoriel de E, x dans F et y dans E. On a $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x,y)$. D'où $y \in F^\perp \Leftrightarrow f(y) \in (f(F))^\perp$. Or f est un automorphisme, donc $y \in F^\perp \Leftrightarrow f(y) \in f(F^\perp)$. Il en résulte $\boxed{f(F^\perp) = (f(F))^\perp.}$

III.A.1.b. Soit x et y deux vecteurs de E et X et Y les vecteurs colonnes associés dans la base e. Les vecteurs colonnes associés à $f(x)$ et $f(y)$ sont donc $\mathrm{Mat}(f,e)X$ et $\mathrm{Mat}(f,e)Y$ et donc on a $\varphi(f(x), f(y)) = {}^{\mathrm{t}}(\mathrm{Mat}(f,e)X)\,\mathrm{Mat}(\varphi,e)\,\mathrm{Mat}(f,e)Y$ et donc la matrice de la forme bilinéaire (symétrique) $(x,y) \mapsto \varphi(f(x), f(y))$ est $\boxed{{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Mat}(f,e)\,\mathrm{Mat}(\varphi,e)\,\mathrm{Mat}(f,e).}$

III.A.1.c. Deux formes bilinéaires symétriques sont égales si et seulement si leurs matrices dans une certaine base sont égales. Celle de φ est Ω et celle de $(x,y) \mapsto \varphi(f(x), f(y))$ est ${}^{\mathrm{t}}M\Omega M$. D'après IIIA1a on a donc $\boxed{f \in O(E,q) \Leftrightarrow \Omega = {}^{\mathrm{t}}M\Omega M.}$

III.A.1.d. D'après ce qui précède, si $f \in O(E,q)$, alors $\Omega = {}^{\mathrm{t}}M\Omega M$ et donc, en prenant le déterminant, $\det(\Omega) = \det(M)^2 \det(\Omega)$ puisque le déterminant est multiplicatif et est invariant par passage à la transposée. Comme q est non-dégénérée, Ω est inversible, donc $\det(\Omega) \neq 0$ et on en déduit $\det(M)^2 = 1$. D'où $\boxed{\det(M) \in \{-1, 1\}.}$

III.A.2.a. Soit x dans F et y dans G, on a $s(x) = x$ et $s(y) = -y$ et donc $\varphi(s(x), s(y)) = -\varphi(x,y)$. Par conséquent si $s \in O(E,q)$, alors $\varphi(x,y) = 0$ et donc F et G sont orthogonaux. Réciproquement, soit x et y dans E. On écrit $x = a+b$ et $y = c+d$ avec a et c dans F et b et d dans G. Il vient $s(x) = a - b$ et $s(y) = c - d$ et donc $\varphi(s(x), s(y)) = \varphi(a,b) + \varphi(c,d)$, puisque $\varphi(a,d) = \varphi(b,c) = 0$. Pour la même raison $\varphi(x,y) = \varphi(a,b) + \varphi(c,d)$ et donc $f \in O(E,q)$: $\boxed{f \in O(E,q) \text{ si et seulement si } F \text{ et } G \text{ sont orthogonaux.}}$

III.A.2.b. Par dimension, on a $F \oplus G = E$ avec $F \perp G$ si et seulement si $E = F \oplus F^\perp$ et $G = F^\perp$, i.e. F est non-singulier et $G = F^\perp$. D'où

$\boxed{\text{les symétries de } O(E,q) \text{ sont les symétries par rapport à un espace non singulier et parallèlement à son orthogonal.}}$

III.A.2.c. Soit s une réflexion par rapport à un hyperplan H non singulier. On a $\dim(\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)) = \dim(H) = n-1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)) = \dim(H^\perp) = \mathrm{codim}(H) = 1$ et donc s est diagonalisable avec comme valeurs propres 1, de multiplicité $n-1$, et -1, de multiplicité 1. Son déterminant étant le produit de ses valeurs propres, comptées avec multiplicité, c'est -1, i.e. $\boxed{\text{toute réflexion est dans } O^-(E,q).}$

III.A.2.d. Puisque $q(x-y) \neq 0$, $x-y$ n'est pas orthogonal à lui-même et donc $\mathbf{K}(x-y) \cap H = \{0\}$. Il en résulte, par IIA3, que $\mathbf{K}(x-y)$ est non singulier et donc aussi, toujours par IIA3, que H est également non singulier. Soit $a = (x+y)/2$ et $b = (x-y)/2$. On a $\varphi(a,b) = \dfrac{1}{4}(q(x) - q(y))$ et donc a appartient à H et b à $H^\perp$. Comme $x = a+b$, on a $s(x) = a - b$, i.e. $\boxed{s(x) = y.}$

III.B.1. Puisque $F \cap F^{\perp} = F$, d'après IIC3, E est somme orthogonale de plans artiniens $\mathrm{V}ect\,(e_i, f_i)$ avec $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de F et dans la base $(e_1, \cdots, e_p, f_1, \cdots, f_p)$, φ admet pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$. Puisque F est f-stable, la matrice de f dans cette base est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où A, B et C sont dans $\mathfrak{M}_p(\mathbf{K})$. On a donc $\det(f) = \det(A)\det(C)$. De plus, si $f \in O(E, q)$, on a, d'après IIIA1c et étudiant les blocs antidiagonaux, ${}^{\mathrm{t}}AC = I_p$. Il en résulte $1 = \det({}^{\mathrm{t}}AC) = \det(A)\det(C)$, d'où $\boxed{f \in O^{+}(E, q).}$

III.B.2. Si F est non-singulier, alors $\overline{F} = F$ et donc $f = \mathrm{Id}_E$ et $\det(f) = 1$. Sinon on écrit E comme somme directe orthogonale de G et de plans artiniens, où G est un supplémentaire de $F \cap F^{\perp}$ dans F.

Comme f est l'identité sur F, elle l'est sur G et donc G est f-stable et $\det(f_{|G}) = 1$.

D'après IIIA1a, $G^{\perp}$ est aussi f-stable. Comme f est un automorphisme sur E, sa restriction à $G^{\perp}$ l'est aussi. Pour la même raison, il est orthogonal, i.e. $f_{|G^{\perp}}$ est dans $O(G^{\perp}, q_{|G^{\perp}})$. Enfin, comme G est non-singulier, il en va de même pour $G^{\perp}$ d'après IIA3 et donc $q_{|G^{\perp}}$ est non-dégénérée.

Par ailleurs $G^{\perp}$ est somme directe orthogonale de plans artiniens et est donc artinien. Or $F \cap G^{\perp} = F \cap F^{\perp}$, $q_{|F\cap F^{\perp}} = 0$, $f_{|F\cap F^{\perp}} = \mathrm{Id}_{F\cap F^{\perp}}$ et $\dim(F \cap F^{\perp}) = \dfrac{1}{2}\dim(G^{\perp})$ par définition du complété non-singulier. Comme $F \cap F^{\perp}$ est f-stable, la question précédente appliquée à la restriction de f à $G^{\perp}$ donne $\det(f_{G^{\perp}}) = 1$. Une décomposition par blocs de f adaptée à la somme directe f-stable $G \oplus G^{\perp}$ donne alors $\det(f) = \det(f_{|G})\det(f_{|G^{\perp}}) = 1$, i.e. $\boxed{f \in \mathcal{O}^{+}(E, q).}$

III.B.3.a. Puisque q est non-dégénérée, elle n'est pas nulle. On dispose donc de x tel que $q(x) \neq 0$. On a alors

$$\varphi(f(x) - x, x) = \varphi(f(x), x) - q(x) = \frac{2\varphi(f(x), x) - q(x) - q(f(x))}{2} = -\frac{1}{2}q(f(x) - x) = 0$$

et donc $x \in \mathrm{V}ect\,(f(x) - x)^{\perp}$. En particulier, puisque $q(x) \neq 0$, $x \notin \mathrm{V}ect\,(f(x) - x)$. Comme $f(x) - x \neq 0$, $\dim(\mathrm{V}ect\,(f(x) - x)) = 1$ et donc $\dim(\mathrm{V}ect\,(x, f(x) - x)) = 2$. Comme $x \in \mathrm{V}ect\,(f(x) - x)^{\perp}$, $f(x) - x \in \mathrm{V}ect\,(x)^{\perp}$ et donc, puisque $q(f(x) - x) = 0$, $f(x) - x \in \mathrm{V}ect\,(x, f(x) - x)^{\perp}$ et $\dim(\mathrm{V}ect\,(x, f(x) - x)^{\perp}) \geq 1$. Il résulte de IIA1b, $\dim(E) = \dim(\mathrm{V}ect\,(x, f(x) - x)) + \dim(\mathrm{V}ect\,(x, f(x) - x)^{\perp})$, puisque q est non-dégénérée, et donc $\boxed{\dim(E) \geq 3.}$

III.B.3.b. On a $\forall x \in E$, $q(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq x$ et donc, par contraposée, $\boxed{q_{|V} = 0.}$

III.B.3.c. D'après IIC4, si $q_{|H} = 0$, alors $\dim(H) \leq \dfrac{1}{2}\dim(E)$. Or $\dim(H) = \mathrm{codim}(\mathrm{V}ect\,(x)) = \dim(E) - 1$, d'où $\dim(E) \leq 2$. C'est absurde, d'après IIIB3a, donc $\boxed{q_{[H} \neq 0.}$

Soit y dans H tel que $q(y) \neq 0$. On a alors $q(x \pm y) = q(y) + q(x) \pm 2\varphi(x, y) = q(y)$, i.e. $\boxed{q(x + y) = q(x - y) = q(y) \neq 0.}$

III.B.3.d. Soit x dans E. Si $q(x) \neq 0$, alors $q(f(x) - x) = 0$. Sinon on dispose de y dans E vérifiant $q(x + y) = q(x - y) = q(y) \neq 0$ et donc, en posant $g = f - \mathrm{Id}_E$, on a aussi $q(g(x + y)) = q(g(x - y)) = q(g(y)) = 0$. Par linéarité de f et donc de g, on a

$$0 = \frac{q(g(x) + g(y)) + q(g(x) - g(y))}{2} = q(g(x)) + q(g(y)) = q(g(x))$$

et donc $q(f(x)-x)=0$. D'où $\boxed{q_{|U}=0.}$

III.B.3.e. D'après IIC4 U et V sont de dimensions inférieures à $\frac{1}{2}\dim(E)$ et, d'après le théorème du rang, $\dim(U)+\dim(V)=\dim(E)$. Il en résulte $\dim(U)=\dim(V)=\frac{1}{2}\dim(E)$ et $\dim(U^\perp)=\operatorname{codim}(U)=\dim(U)$. Puisque $q_{|U}=0$, $U\subset U^\perp$ et donc par dimension $U=U^\perp$. Soit maintenant x dans V et y dans E, on a $f(x)=x$ et

$$\varphi(x,f(y)-y)=\varphi(x,f(y))-\varphi(x,y)=\varphi(f(x),f(y))-\varphi(x,y)=0$$

et donc $V\subset U^\perp$. Par dimension, il vient $\boxed{U=V=U^\perp.}$

III.B.3.f. Puisque $q_{|U}=0$ et $\dim(U)=\frac{1}{2}\dim(E)$, d'après IIC5, $\boxed{E \text{ est un espace de Artin.}}$ Comme $f_{|V}=\mathrm{Id}_V$ et $q_{|V}=0$, d'après IIIB1, $\boxed{f\in\mathcal{O}^+(E,q).}$

PARTIE IV

IV.A.1. D'après IIIA1d, $\mathcal{O}(E,q)\subset\{\pm\mathrm{Id}_E\}$ et par bilinéarité de φ_q l'inclusion réciproque est vraie également. Or $-\mathrm{Id}_E$ est une symétrie par rapport à l'hyperplan $\{0\}$ et donc, d'après la convention sur Id_E, $\boxed{\text{le théorème de Cartan-Dieudonné est vrai en dimension 1.}}$

IV.A.2. On dispose de x tel que $f(x)=x$ et $q(x)\neq 0$. Autrement dit $\mathrm{V}ect\,(x)$ est une droite f-stable et est non-singulier. Soit H le q-orthogonal de $\mathrm{V}ect\,(x)$, il est donc également f-stable (IIIA1a) et non-singulier (IIA3) et donc $f_{|H}$ est un automorphisme orthogonal de H pour $q_{|H}$. Puisque $\dim(H)=\operatorname{codim}(\mathrm{V}ect\,(x))=\dim(E)-1$, par hypothèse de récurrence, $f_{|H}$ s'écrit comme produit d'au plus $\dim(H)$ réflexions de H : $f=s_1\circ\cdots s_k$. Soit alors $\tilde{s}_j$ l'application définie sur E par $\tilde{s}_j(h)=s_j(h)$ si $h\in H$ et $\tilde{s}_j(x)=x$. Alors $\tilde{s}_j$ est une réflexion par rapport à $\mathrm{Ker}(s_j-\mathrm{Id}_H)\oplus\mathrm{V}ect\,(x)$ et cet hyperplan de E est non-singulier d'après IIIA2b et IIA4, ce qui démontre que $\boxed{\text{le théorème de Cartan-Dieudonné est vrai dans ce cas.}}$

Remarquons que, plus précisément, dans ce cas, f est produit d'au plus $\dim(E)-1$ réflexions.

IV.A.3. On dispose de x et y dans E tels que $y=f(x)$, $q(x)\neq 0$ et $q(x-y)\neq 0$. Comme q est orthogonal, $q(y)=q(x)$ et donc, d'après IIIA2d, on dispose d'une réflexion s telle que $s(x)=y$. Et donc $s\circ f$ est un automorphisme orthogonal (en tant que composé de deux automorphismes) tel que $s\circ f(x)=s(y)=s^{-1}(y)=x$. Comme $q(x)\neq 0$, la question précédente montre que $s\circ f$ est produit au plus $\dim(E)-1$ réflexions et donc f, qui est égal à $s\circ(s\circ f)$, est produit d'au plus $\dim(E)$ réflexions, i.e. $\boxed{\text{le théorème de Cartan-Dieudonné est vrai dans ce cas.}}$

IV.A.4. Dans les autres cas, on est dans les hypothèses de la question IIIB3 et donc E est artinien et $f\in\mathcal{O}^+(E,q)$. Puisque q est non-dégénérée, elle est non nulle et on dispose de x dans E tel que $q(x)\neq 0$. Alors $\mathrm{V}ect\,(x)$ est non-singulier et donc la symétrie s par rapport à $\mathrm{V}ect\,(x)^\perp$ est une réflexion. Donc $s\circ f\in\mathcal{O}^-(E,q)$. En particulier $s\circ f$ ne peut pas vérifier les hypothèses de IIIB3 et donc le théorème de Cartan-Dieudonné est vrai pour $s\circ f$. Elle est donc produit d'au plus $\dim(E)$ réflexions. D'après IIIA2c le nombre de réflexions intervenant est impair et donc, puisque E est de dimension paire, $s\circ f$ est produit d'au plus $\dim(E)-1$ réflexions. Et donc f, qui est égal à $s\circ(s\circ f)$, est produit d'au plus $\dim(E)$ réflexions, i.e. $\boxed{\text{le théorème de Cartan-Dieudonné est vrai.}}$

IV.B.1. Soit F et F' deux sous-espaces vectoriels de E et f une isométrie de F sur F'.

Puisque f est bijective, $f(F^{\perp\varphi_F}) = {F'}^{\perp\varphi_{F'}}$. En effet, pour x dans E, on a

$$\begin{cases} x \in F \\ \forall y \in F\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \in f(F) \\ \forall f(y) \in f(F)\ \varphi(f(x), f(y)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \in F' \\ \forall z \in F'\ \varphi(f(x), z) = 0 \end{cases}$$

et donc $f(F \cap F^{\perp}) = F' \cap {F'}^{\perp}$. En particulier F et F' sont simultanément non-singuliers.
On suppose F singulier (et donc F' aussi). Soit alors $\overline{F}$ un complété non-singulier de F avec $F \cap F^{\perp} = \mathrm{V}ect\,(e_1, \cdots, e_s)$ et $\overline{F} = G \oplus^{\perp} P_1 \oplus^{\perp} \cdots \oplus^{\perp} P_s$ avec P_i artinien et $P_i = \mathrm{V}ect\,(e_i, f_i)$, $q(f_i) = 0$ et $\varphi(e_i, f_i) = 1$. Par bijectivité $(f(e_1), \cdots, f(e_s))$ est une base de $F' \cap {F'}^{\perp}$.
Toujours puisque f est bijective

$$F' = f(F) = f(F \cap F^{\perp} \oplus^{\perp} G) = f(F \cap F^{\perp}) \oplus^{\perp} f(G) = F' \cap {F'}^{\perp} \oplus^{\perp} f(G)$$

et, d'après IIC2b, on peut construire un complété non-singulier $\overline{F'}$ de F' tel que $F' = f(G) \oplus^{\perp} P'_1 \oplus^{\perp} \cdots \oplus^{\perp} P'_s$ avec P'_i artinien et $P'_i = \mathrm{V}ect\,(f(e_i), g_i)$. Le nombre de plans artiniens est s puisque c'est la dimension commune de $F \cap F^{\perp}$ et $F' \cap {F'}^{\perp}$
L'application $\overline{f}$ de $\overline{F}$ dans $\overline{F'}$ qui est définie par $\overline{f}(x) = f(x)$ si x est dans F et $\overline{f}(f_i) = g_i$ est bijective puisqu'on a les sommes directes

$$\overline{F} = F \oplus \mathrm{V}ect\,(f_1, \cdots, f_s) \quad \text{et} \quad \overline{F'} = F' \oplus \mathrm{V}ect\,(g_1, \cdots, g_s)$$

et c'est une isométrie puisque c'en est une sur chacun des sous-espaces orthogonaux entre eux G, P_1, $\cdots$, P_s d'une part et $f(G)$, P'_1, $\cdots$, P'_s d'une part. Pour G c'est la restriction de l'isométrie f à G. Pour P_i, on a une isométrie de P_i sur $\mathbf{K}^2$ et une autre de $\mathbf{K}^2$ dans P'_i dont la composée est la restriction de $\overline{f}$ à P_i, ce qui prouve que ce sont des isométries.
Par conséquent si on sait prolonger $\overline{f}$ en une isométrie de E, on obtiendra un prolongement de f. $\boxed{\text{Il suffit de traiter le cas où } F \text{ est non-singulier.}}$

IV.B.2. Comme $x \neq 0$, $F = \mathrm{V}ect\,(x)$.

IV.B.2.a. On a $q(x+y)+q(x-y) = 2(q(x)+q(f(x))) = 4q(x)$. Or $\mathrm{V}ect\,(x) = F$ et F est non-singulier, donc $q(x) \neq 0$. Leur somme étant non nulle,
$\boxed{\text{l'un au moins parmi } q(x+y) \text{ et } q(x-y) \text{ est non nul.}}$

IV.B.2.b. On a $q(y) = q(-y) = q(f(x)) = q(x)$. D'après ce qui précède et IIIA2d, on peut trouver une réflexion telle que $s(x) = \pm y$ et donc $\pm \mathrm{Id}_E \circ s(x) = f(x)$. Comme (x) est une base de F il vient $\pm \mathrm{Id}_E \circ s_{|F} = f$. Enfin $\pm \mathrm{Id}_E$ est une isométrie, tout comme sa composée avec une autre isométrie, i.e. $\boxed{\text{le théorème de Witt est vrai pour } F \text{ non-singulier de dimension 1.}}$

IV.B.3.a. Puisque F est non-singulier, $q_{|F}$ est non-dégénérée et donc non nulle. Soit alors x dans F tel que $q(x) \neq 0$. Alors, si $F_2 = \mathrm{V}ect\,(x)$, F_2 est non-singulier et, si $F_1 = F_2^{\perp\varphi_F}$, alors $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et donc, par dimension, $F = F_1 \oplus F_2$. De plus puisque q_F est non-dégénérée et F_2 est non-singulier, d'après IIA3, F_1 est également non-singulier, i.e.
$\boxed{F = F_1 \oplus^{\perp} F_2 \text{ avec } F_1 \text{ et } F_2 \text{ non-singuliers et } \dim(F_1) = \dim(F) - 1.}$

IV.B.3.b. Soit x dans F_2. Pour y dans F_1, on a $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x,y) = 0$ et donc $f(x)$ appartient à ${F'_1}^{\perp}$, d'où $\boxed{f(F_2) \subset {F'_1}^{\perp}.}$ De plus, puisque q est non-dégénérée, $g(F_2) \subset g(F_1^{\perp}) = g(F_1)^{\perp}$ et donc puisque $g(F_1) = f(F_1) = F'_1$, $\boxed{g(F_2) \subset {F'_1}^{\perp}.}$

IV.B.3.c. Puisque F_1 et F_2 sont non-singuliers, il en est de même pour F_1' et F_2' puisque ce sont leurs images par un automorphisme orthogonal, et donc $F_1'^{\perp}$ est non-singulier. De plus $f(F_2)$ et $g(F_2)$ en sont des sous-espaces non-singuliers de dimension 1.

Or g est dans $\mathcal{O}(E,q)$ donc g^{-1} existe et appartient aussi à $\mathcal{O}(E,q)$; aussi $g^{-1}_{|g(F_2)}$ est une isométrie de $g(F_2)$ sur F_2. Comme f est une isométrie de F sur F', $f_{|F_2}$ est une isométrie de F_2 sur $f(F_2)$ et donc, par composition, $f \circ g^{-1}$ est une isométrie de $g(F_2)$ sur $f(F_2)$. On peut alors appliquer le théorème de Witt sur $F_1'^{\perp}$ avec $f \circ g_{|}^{-1} g(F_2)$ et donc, d'après la question précédente, $\boxed{\text{il existe } h \text{ dans } \mathcal{O}(F_1'^{\perp}, q_{|F_1'^{\perp}}) \text{ tel que } h_{|g(F_2)} = f \circ g^{-1}_{|g(F_2)}.}$

IV.B.3.d. On définit k sur la somme directe orthogonale $F_1 \oplus^{\perp} F_1^{\perp}$ par ses restrictions. Alors, pour que k soit orthogonal, il faut et il suffit que ses restrictions le soient. On pose $k_{|F_1} = f_{|F_1}$ et $k_{|F_1^{\perp}} = h \circ g_{|F_1^{\perp}}$. En particulier, sur F_2, on a $k_{|F_2} = h_{|g(F_2)} \circ g_{|F_2} = f_{|F_2}$ et donc $k_{|F} = f$. Comme f, g et h sont orthogonaux, k l'est aussi : $\boxed{\text{il existe } k \text{ dans } \mathcal{O}(E,q) \text{ tel que } k_{|F} = f.}$

IV.B.4. D'après IVB2, le théorème de Witt est vrai pour F non-singulier de dimension 1. D'après IVB3, s'il est vrai pour F non-singulier de dimension n avec $n \geq 1$, il l'est aussi pour F de dimension $n+1$. Par récurrence il est donc vrai pour F non-singulier de dimension quelconque. D'après IVB1 il est donc vrai en toute généralité, i.e. $\boxed{\text{Le théorème de Witt est vrai.}}$