Centrale-Supélec 2011 - MP - Première composition

Développement asymptotique du reste des séries de Riemann convergentes

L'objet de ce problème est de donner une approximation de la somme des séries de Riemann convergentes $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement supérieur à 1. Pour cela, on étudie le reste $R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
Dans la première partie, on donne une première approximation du reste. Cette méthode se généralisant mal, on utilise dans la deuxième partie une formule de Taylor pour obtenir simplement un développement asymptotique du reste. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne donne aucun contrôle de l'erreur.
Dans la troisième partie, on retrouve à partir de la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin le même développement asymptotique avec une expression de l'erreur assez satisfaisante. On a besoin dans cette partie d'une étude succincte des polynômes de Bernoulli.
Dans la dernière partie, on étudie de manière assez précise le contrôle de cette erreur, pour conclure que les formules sommatoires étudiées ne sont pas nécessairement convergentes.

Rappels et notations
On note $[\,x\,]$ la partie entière d'un réel x.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles. On note $v_n = \mathrm{O}\,(u_n)$ si

$$\exists M \in \mathbf{R}\,,\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\,,\ \forall n \in \mathbf{N}\,, \quad n \geq n_0 \Longrightarrow |v_n| \leq M\,|u_n|\ .$$

PARTIE I - Étude préliminaire

I.A - Convergence des séries de Riemann

I.A.1. Soit f une fonction réelle, définie continue et décroissante sur $[a;+\infty[$, où $a \in \mathbf{R}$. Montrer que, pour tout entier $k \in [a+1;+\infty[$, on a $\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x$.

I.A.2. En déduire la nature de la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ selon la valeur de $\alpha \in \mathbf{R}$.

En cas de convergence, on pose $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

I.A.3. Pour tout réel $\alpha > 1$, montrer $1 \leq S(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$.

I.B - Première étude asymptotique du reste
Dans la suite du problème, on fixe α strictement supérieur à 1 et, pour tout entier naturel non nul n, on pose $R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

I.B.1. En utilisant l'encadrement de la question I.A.1, montrer $R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

I.B.2. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$. En appliquant à f la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 montrer, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$ où A_k est un réel vérifiant $0 \leq A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$.

I.B.3. En déduire $R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$.

On pourrait répéter le procédé pour obtenir un développement asymptotique plus précis de $R_n(\alpha)$, mais la partie suivante va donner une méthode plus rapide.

PARTIE II - Formule de Taylor et nombres de Bernoulli

II.A - Nombres de Bernoulli

II.A.1. Montrer qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ayant la propriété suivante : pour tout entier $p \in \mathbf{N}^*$, pour tout intervalle non réduit à un point I et pour toute fonction complexe f de classe C^∞ sur I, la fonction g définie sur I par $g = a_0 f + \cdots + a_{p-1} f^{(p-1)}$ vérifie

$$g' + \frac{1}{2!}g'' + \frac{1}{3!}g^{(3)} + \cdots + \frac{1}{p!}g^{(p)} = f' + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(p+\ell)}$$

où les $b_{\ell,p}$ sont des coefficients indépendants de f que l'on ne cherchera pas à calculer.

II.A.2. Montrer $a_0 = 1$ et, pour tout $p \geq 1$, $a_p = -\sum_{i=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-i}}{i!}$. En déduire $|a_p| \leq 1$ pour tout entier naturel p.

Déterminer a_1 et a_2.

II.A.3. a) Pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < 1$, justifier que la série $\sum_{p\geq 0} a_p z^p$ est convergente.

On note $\varphi(z)$ sa somme : $\varphi(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p$.

b) Pour $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < 1$, calculer le produit $(e^z - 1)\varphi(z)$. En déduire que, pour tout $z \in \mathbf{C}^*$ vérifiant $|z| < 1$, on a $\varphi(z) = \frac{z}{e^z - 1}$.

c) Montrer $a_{2k+1} = 0$ pour tout entier $k \geq 1$. Calculer a_4.

Les nombres $b_n = n!\, a_n$ sont appelés nombres de Bernoulli.

II.B - Formule de Taylor

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$, où α est un réel strictement supérieur à 1. Dans cette question II.B, on fixe un entier naturel non nul p et on note $g = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{2p-1} f^{(2p-1)}$. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on pose $R(k) = g(k+1) - g(k) - f'(k)$.

II.B.1. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $2p$, montrer qu'il existe un réel A tel que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $|R(k)| \leq A k^{-(2p+\alpha)}$.

II.B.2. En déduire le développement asymptotique du reste

$$R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = -\left(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right).$$

On obtient ainsi une valeur approchée de $S(\alpha)$ donnée par

$$\tilde{S}_{n,2p-2}(\alpha) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} - \left(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\right).$$

II.B.3. Donner le développement asymptotique de $R_n(3)$ correspondant à $\alpha = 3$ et $p = 3$.

PARTIE III - Polynômes de Bernoulli et formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

On peut calculer, pour $n = 100$: $\tilde{S}_{100,4}(3) = 1{,}202056903159594277\ldots$ tandis que $S(3)$ vaut $1{,}202056903159594285\ldots$ (constante d'Apéry). La méthode de la partie II semble satisfaisante mais ne fournit pas d'information précise sur le terme $\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$. C'est pourquoi on introduit dans cette partie les polynômes de Bernoulli et la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin.

III.A - Polynômes de Bernoulli

On définit une suite de polynômes $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant les conditions suivantes

$$A_0 = 1, \quad A'_{n+1} = A_n \text{ et } \int_0^1 A_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbf{N} \qquad \text{(III.1)}$$

Les polynômes $B_n = n!\, A_n$ sont appelés polynômes de Bernoulli.

III.A.1. **Propriétés élémentaires**

a) Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est déterminée de façon unique par les conditions III.1 ; préciser le degré de A_n ; calculer A_1, A_2 et A_3.

b) Montrer $A_n = (-1)^n A_n \circ (1-X)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

c) Pour tout entier $n \geq 2$, montrer $A_n(0) = A_n(1)$ et $A_{2n-1}(0) = 0$.

d) On pose provisoirement $c_n = A_n(0)$ pour tout entier naturel n. Montrer, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$A_n = c_0 \frac{X^n}{n!} + \cdots + c_{n-2}\frac{X^2}{2!} + c_{n-1}X + c_n$$

puis, si $n \geq 1$, $\dfrac{c_0}{(n+1)!} + \cdots + \dfrac{c_{n-2}}{3!} + \dfrac{c_{n-1}}{2!} + c_n = 0$.

e) En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $c_n = a_n$.

III.A.2. **Fonction génératrice**

a) Montrer que la série $\sum A_n(t)z^n$ converge pour tout réel t dans $[-1;1]$ et tout complexe z vérifiant $|z| < 1$.

Sous ces conditions on pose $f(t,z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t) z^n$.

b) Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t,z)$ est dérivable sur $[0;1]$ et exprimer sa dérivée en fonction de $f(t,z)$. En déduire, si $z \neq 0$ et $|z| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t)z^n = \frac{ze^{tz}}{e^z - 1}$.

c) Montrer, si $z \in \mathbf{C}$ et $0 < |z| < 2\pi$, $\dfrac{ze^{z/2}}{e^z-1} + \dfrac{z}{e^z-1} = 2\dfrac{z/2}{e^{z/2}-1}$. En déduire, pour tout entier naturel n, $A_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2^{n-1}} - 1\right) a_n$.

III.A.3. **Variations des polynômes de Bernoulli**

On établit ici une majoration des polynômes de Bernoulli sur $[0;1]$.

a) Montrer, pour $n \geq 2$:

i. Si $n \equiv 2 \mod 4$, alors $A_n(0) = A_n(1) > 0 > A_n(\frac{1}{2})$; de plus A_n est strictement décroissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

ii. Si $n \equiv 0 \mod 4$, alors $A_n(0) = A_n(1) < 0 < A_n(\frac{1}{2})$; de plus A_n est strictement croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

iii. Si $n \equiv 1 \mod 4$, alors $A_n(0) = A_n(\frac{1}{2}) = A_n(1) = 0$; de plus $A_n < 0$ sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ et $A_n > 0$ sur $\left]\frac{1}{2};1\right[$.

iv. Si $n \equiv 3 \mod 4$, alors $A_n(0) = A_n(\frac{1}{2}) = A_n(1) = 0$; de plus $A_n > 0$ sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ et $A_n < 0$ sur $\left]\frac{1}{2};1\right[$.

b) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \in [0;1]$, montrer $|A_{2n}(x)| \leq |a_{2n}|$ et $|A_{2n+1}(x)| \leq \dfrac{|a_{2n}|}{2}$.

III.B - Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

III.B.1. Soit f une fonction complexe de classe C^∞ sur $[0;1]$.

a) Montrer, pour tout entier $q \geq 1$, $f(1) - f(0) = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1} \left[A_j(t) f^{(j)}(t)\right]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t)\,\mathrm{d}t$.

b) En tenant compte des relations trouvées dans la partie précédente, montrer pour tout entier naturel impair $q = 2p+1$

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2}\left(f'(0) + f'(1)\right) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\left(f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0)\right) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

III.B.2. Soit $n \in \mathbf{N}$ et soit f une fonction réelle de classe C^∞ sur $[n;+\infty[$. On suppose que f et toutes ses dérivées sont de signe constant sur $[n;+\infty[$ et tendent vers 0 en $+\infty$.

On pose $A_j^*(t) = A_j(t - [\,t\,])$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Montrer que la limite $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \int_n^N A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t$ existe. On la note $\displaystyle\int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t$. En appliquant, pour $k \geq n$, le résultat précédent à $f_k(t) = f(k+t)$, montrer

$$\sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2} f'(n) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Montrer

$$\left| \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \left| \frac{a_{2p}}{2} \right| \left| f^{(2p+1)}(n) \right|\ .$$

III.B.3. Montrer que, dans l'expression de $R_n(\alpha)$ du II.B.2, le terme $\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$ peut s'écrire sous la forme d'une intégrale.

PARTIE IV - Compléments sur l'erreur

Dans cette partie on fixe un réel $\alpha > 1$ et on considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$.

IV.A - Encadrement de l'erreur

IV.A.1. Soit g une fonction continue par morceaux croissante sur $[\,0;1\,]$. En remarquant $\int_0^1 = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1$, montrer :

— si $n \equiv 1 \mod 4$, alors $\displaystyle\int_0^1 A_n(t) g(t)\,\mathrm{d}t \geq 0\,;$

— si $n \equiv 3 \mod 4$, alors $\displaystyle\int_0^1 A_n(t) g(t)\,\mathrm{d}t \leq 0.$

IV.A.2. En reprenant les notations de II.B.2, montrer pour tout entier naturel $p \geq 1$

$$\tilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leq S(\alpha) \leq \tilde{S}_{n,4p+2}(\alpha)$$

et

$$\tilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leq S(\alpha) \leq \tilde{S}_{n,4p-2}(\alpha)\ .$$

En déduire que l'erreur $\left|S(\alpha) - \tilde{S}_{n,2p}(\alpha)\right|$ est majorée par $\left|a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n)\right|$.

IV.A.3. Dans cette question on reprend le cas de II.B.3. Sachant $6!\,a_6 = \dfrac{1}{42}$, retrouver que l'erreur $\left|S(3) - \tilde{S}_{100,4}(3)\right|$ est majorée par une expression de l'ordre 10^{-7}.

IV.B - Nombres de Bernoulli

IV.B.1. À l'aide de la question III.B.1, calculer pour $p \geq 1$ et $n \in \mathbf{Z}$ $\hat{A}_{2p}(n)$ avec $\hat{A}_p(n) = \displaystyle\int_0^1 A_p(x) e^{-2i\pi n x}\,\mathrm{d}x$.

IV.B.2. Pour $p \geq 1$ montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\hat{A}_{2p}(n) e^{2i\pi n x} + \hat{A}_{2p}(-n) e^{-2i\pi n x}\right)$ converge vers une fonction g_{2p} continue sur $\mathbf{R}$.

IV.B.3. Soit, pour $p \geq 1$. Montrer que A_{2p} est prolongeable sur $\mathbf{R}$ en une fonction $\tilde{A}_{2p}$ continue et 1-périodique sur $\mathbf{R}$.

En posant $h = \tilde{A}_{2p} - g_{2p}$, montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et tout $t \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} h(x) e^{-2i\pi n x}\,\mathrm{d}x = 0.$

En considérant la fonction donnée par $h(x)\big(1 + \cos(2\pi(x-t)) - \cos(2\pi\varepsilon)\big)^n$, pour ε suffisamment petit et n assez grand, en déduire que h est nulle.

IV.B.4. Pour $p \geq 1$, en déduire $a_{2p} = A_{2p}(0) = (-1)^{p+1} \dfrac{S(2p)}{2^{2p-1}\pi^{2p}}$.

IV.C - Comportement de l'erreur

IV.C.1. Montrer, pour tous entiers n et p dans $\mathbf{N}^*$,

$$\left| \frac{a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p} f^{(2p)}(n)} \right| = \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1) S(2p+2)}{4n^2\pi^2 S(2p)}\ .$$

IV.C.2. Que dire de l'approximation de $S(\alpha)$ par $\tilde{S}_{n,2p}(\alpha)$ lorsque, n est fixé, p tend vers $+\infty$? Pour le calcul numérique de $S(\alpha)$, comment doit-on choisir n et p ?

PARTIE I

I.A

I.A.1. Soit k dans $[a+1;+\infty[$. Par décroissance de f et puisque $[k-1;k+1] \subset [a;+\infty[$, on a

$$\forall x \in [k;k+1], f(x) \leq f(k) \quad \text{et} \quad \forall y \in [k-1;k], f(k) \leq f(y)\ .$$

L'inégalité de la moyenne appliquée à la fonction continue f et le fait que les intervalles $[k-1;k]$ et $[k;k+1]$ sont de longueur 1 fournissent $\boxed{\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x.}$

I.A.2. Pour α dans $\mathbf{R}_-$, la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ est grossièrement divergente. Pour $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, on pose $a = 1$ et on introduit la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ sur $[1;+\infty[$. Elle est alors continue, et même de classe C^∞, sur son domaine de définition en tant que fonction puissance, et donc en particulier sur $[a;+\infty[$. Puisque $\alpha > 0$, f est (strictement) décroissante sur $[a;+\infty[$. On en déduit, pour n entier tel que $n \geq 2$,

$$\int_2^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

d'après la question précédente et la relation de Chasles. Pour $\alpha \neq 1$, une primitive de f est donnée par $x \mapsto \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, alors que pour $\alpha = 1$, une primitive est ln.

En particulier pour $\alpha > 1$, la seconde inégalité montre que les sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ sont majorées par $1 + (\alpha-1)^{-1}$. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, elle est donc convergente. Enfin pour $\alpha \leq 1$, la première inégalité montre que la série diverge vers $+\infty$. Par conséquent, $\boxed{\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$

I.A.3. Soit α un réel strictement supérieur à 1. D'après ce qui précède les sommes partielles de $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ sont majorées par $1 + (\alpha-1)^{-1}$, donc S aussi. Comme S est la somme d'une série à termes positifs dont le premier terme est 1, on a $1 \leq S$ et donc $\boxed{\forall \alpha \in [1;+\infty[,\ 1 \leq S \leq 1 + \dfrac{1}{\alpha-1}.}$

I.B

I.B.1. Soit n un entier supérieur à 2 et N supérieur à n. La double inégalité obtenue en I.A.1 appliquée comme en I.A.2 donne, grâce à la relation de Chasles

$$\int_n^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}\ .$$

En faisant tendre N vers l'infini, chacun des termes a une limite, puisque $\alpha > 1$, d'après les arguments donnés en I.A.2 et il vient

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq R_n(\alpha) \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}\ .$$

Par ailleurs on a

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

et donc
$$0 \leq R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$
i.e. $\boxed{R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).}$

I.B.2. En tant que multiple de fonction puissance, f est de classe C^∞ sur son domaine de définition, i.e. sur $\mathbf{R}_+^*$ puisque $\alpha > 1$. On peut donc lui appliquer la formule de TAYLOR-LAPLACE pour évaluer, avec $k \in \mathbf{N}^*$, $f(k+1)$ en fonction du développement de TAYLOR de f en k, i.e.
$$f(k+1) = f(k) + f'(k) + \frac{1}{2}f''(k) + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2}{2} f'''(t)\,\mathrm{d}t$$
ou encore
$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2}{2}\frac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t\ .$$
Or : la fonction $t \mapsto t^{-(\alpha+2)}$ est décroissante et positive sur $[k; k+1]$, $0 \leq k+1-t \leq 1$ sur ce même intervalle et $\alpha(\alpha+1)/2 \geq 0$; l'inégalité de la moyenne donne donc
$$0 \leq \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2}{2}\frac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\frac{1}{k^{\alpha+2}}\ .$$
Il vient

$\boxed{\text{pour tout } k \text{ dans } \mathbf{N}^*, \text{ il existe un réel } A_k \text{ tel que } f(k+1)-f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k \text{ et } 0 \leq A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\frac{1}{k^{\alpha+2}}.}$

I.B.3. Avec les notations précédentes, les séries de termes généraux $f(k+1) - f(k)$, $\frac{1}{k^\alpha}$, $\frac{1}{k^{\alpha+1}}$ et A_k sont convergentes. En effet la première est télescopique et $\lim_{+\infty} f = 0$, les deux suivantes sont des séries de RIEMANN et $\alpha+1 > \alpha > 1$ et enfin la dernière est absolument convergente par le critère de comparaison à une série de RIEMANN convergente puisque $A_k = \mathrm{O}\left(k^{-(\alpha+2)}\right)$ et $\alpha + 2 > 1$. On peut donc sommer la relation obtenue en I.B.2 et il vient
$$-f(n) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} = R_n(\alpha) - \frac{\alpha}{2}R_n(\alpha+1) + \sum_{k=n}^{+\infty} A_k\ .$$
Par sommation des relations de comparaison pour les séries convergentes à termes positifs, on a $\sum_{k=n}^{+\infty} A_k = \mathrm{O}\left(R_n(\alpha+2)\right)$. Or $R_n(\alpha+1) = \frac{1}{\alpha n^\alpha} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$, d'après I.B.1 et $R_n(\alpha+2) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$, toujours d'après I.B.1. Il en résulte $\boxed{R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).}$

PARTIE II

II.A

II.A.1. Soit $p \geq 1$ et $(a_0, \ldots, a_{p-1})$ des réels tels que
$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n!}X^n \sum_{n=0}^{p-1} a_n X^n = X + R_p$$

avec $R_p \in \mathbf{R}[X]$ de valuation supérieure à $p+1$ et de degré inférieur à $2p-1$. Soit α dans $\mathbf{R}$. En posant $a_p = \alpha$, il vient

$$\sum_{n=1}^{p+1} \frac{1}{n!} X^n \sum_{n=0}^{p} a_n X^n = X + R_p + \sum_{n=0}^{p} \frac{a_n}{(p+1-n)!} X^{p+1} + Q_p$$

avec Q_p dans $\mathbf{R}[X]$ de valuation supérieure à $p+2$. Par conséquent si $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{a_n}{(p+1-n)!}$ est égal à l'opposé du coefficient de degré $p+1$ de R_p le membre de droite s'écrit $X + R_{p+1}$ avec R_{p+1} dans $\mathbf{R}[X]$ de valuation supérieure à $p+2$. De plus puisque le polynôme du membre de gauche est de degré au plus $2p+1$, il en va donc de même pour R_{p+1}. Comme le coefficient de a_p, à savoir 1, n'est pas nul, on dispose d'un unique α tel que la propriété précédente soit vérifiée.
Comme, pour $p=1$, $a_0 = 1$ et $R_0 = 0$, on a $X \times a_0 = X + R_0$ avec R_0 de valuation $+\infty$ donc supérieure à 1 et de degré $-\infty$ donc inférieur à 1, on peut construire une suite par récurrence via la propriété précédente, i.e. on dispose d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels telle que, pour tout entier naturel non nul p, on ait

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n!} X^n \sum_{n=0}^{p-1} a_n X^n = X + R_p$$

avec $R_p \in \mathbf{R}[X]$ de valuation supérieure à $p+1$ et de degré inférieur à $2p-1$. On écrit alors

$$R_p = \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} X^{p+\ell}$$

avec $(b_{\ell,p})$ des réels et la convention que la somme est nulle (et la suite vide) si $p=1$.
Soit alors I un intervalle réel non réduit à un point. En considérant les polynômes de l'endomorphisme dérivation sur $C^\infty(I,\mathbf{C})$, noté $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, il vient par linéarité

$$\forall p \in \mathbf{N}^*, \quad \forall f \in \mathbf{C}^\infty(I,\mathbf{C}) \quad \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k f^{(k)}\right)^{(n)} = f' + R_p\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)(f)$$

ou encore, en posant $g = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} a_k f^{(k)}$,

$$\boxed{g' + \frac{1}{2!} g'' + \cdots + \frac{1}{p!} g^{(p)} = f' + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(p+\ell)}\ .}$$

Remarque : l'existence de ces suites résulte également de l'existence d'un développement limité de $\dfrac{x}{\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{x^n}{n!}}$ au voisinage de 0. On l'écrit $\displaystyle\sum_{n=0}^{p-1} a_n x^n + \mathrm{O}\left(x^p\right)$ et on obtient

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{p-1} a_n x^n = x + \mathrm{O}\left(x^{p+1}\right)$$

et on montre d'une part que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne dépend pas de p par unicité du développement limité et, d'autre part, que la partie $\mathrm{O}\left(x^{p+1}\right)$ est une fonction polynomiale ayant les bons degré et valuation.

II.A.2. Puisque les suites précédentes peuvent être construites indépendemment de I et f, on peu spécialiser le résultat précédent pour $I = \mathbf{R}$ et f la fonction polynomiale associée à X^n. On évalue l'identité en 0 et il vient, pour $p = n = 1$, $\boxed{a_0 = 1.}$

Pour $m \geq 1$, avec $p = n = m+1$, il vient

$$a_m n! + \frac{1}{2!} a_{m-1} n! + \cdots \frac{1}{(m+1)!} a_0 n! = 0$$

puisque parmi les $f^{(k)}(0)$ pour $k \in \mathbf{N}$, seul $f^{(n)}(0)$ est non nul, et vaut $n!$. Il en résulte, pour $m \geq 1$,

$$\boxed{a_m = -\sum_{n=2}^{m+1} \frac{a_{m+1-n}}{n!}.}$$

Une récurrence immédiate permet de conclure que (a_n) est bornée par 1. En effet soit $(\mathbf{H}_p)$ le prédicat sur p dans $\mathbf{N}$: $\forall n \in [\![0; p]\!]$, $|a_n| \leq 1$. Alors puisque $a_0 = 1$, $(\mathbf{H}_0)$ est vrai. De plus d'après la relation que l'on vient de démontrer, pour tout p dans $\mathbf{N}$, on a

$$|a_p| \leq \sum_{n=2}^{p+1} \frac{|a_{p+1-n}|}{n!} \leq \max_{0 \leq n \leq p-1} |a_n| \sum_{n=2}^{p+1} \frac{1}{n!} \leq \max_{0 \leq n \leq p-1} |a_n| \, (e-2) \leq \max_{0 \leq n \leq p-1} |a_n|$$

puisque $3 \geq e = 2 + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$ et qu'on a affaire à une série à termes positifs. Il en résulte que le prédicat $(\mathbf{H}_p)$ est héréditaire et donc $\boxed{\forall p \in \mathbf{N},\ |a_p| \leq 1.}$

De plus la relation de récurrence donne $\boxed{a_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } a_2 = \frac{1}{12}.}$

II.A.3. a) La suite (a_p) est bornée, i.e. $a_p = \mathrm{O}(1)$, donc la série entière $\sum a_p z^p$ a un rayon de convergence supérieur à celui de $\sum z^p$, i.e. supérieur ou égal à 1. Donc $\boxed{\text{si } |z| < 1,\ \sum a_p z^p \text{ converge.}}$

b) Puisque le rayon de convergence de $\sum a_p z^p$ est au moins égal à 1 et que le rayon de convergence de $e^z - 1$, i.e. de $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n!}$, est infini, pour $|z| < 1$ le produit des sommes de ces séries est égal à la somme du produit de Cauchy de ces séries entières. Or le terme de degré 0 de $(e^z - 1)\varphi(z)$ est nul, celui de degré 1 est a_0, i.e. 1, et pour $n \geq 2$ il est égal à $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!} a_{n-i}$ et est donc nul d'après II.A.2.

On en déduit $\boxed{(e^z - 1)\varphi(z) = z.}$

En particulier si $0 < |z| < 1$, on a $e^z \neq 1$ et $\boxed{\varphi(z) = \frac{z}{e^z - 1}.}$

c) Si $0 < |z| < 1$, on a

$$\varphi(z) - a_1 z = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = z \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = z \coth\left(\frac{z}{2}\right)$$

et donc $z \mapsto \varphi(z) - a_1 z$ est une fonction paire (pour $|z| < 1$). Par unicité des coefficients d'une série entière, il vient $\boxed{\forall k \in \mathbf{N}^*,\ a_{2k+1} = 0.}$

La formule de récurrence donne alors $a_4 = -\frac{a_2}{3!} - \frac{a_1}{4!} - \frac{a_0}{5!}$, i.e. $\boxed{a_4 = -\frac{1}{720}.}$

II.B

II.B.1. En tant que multiple d'une fonction puissance f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$ et il en va donc de même pour g. On peut donc lui appliquer la formule de Taylor-Laplace en k à l'ordre $2p$. Il vient

$$g(k+1)-g(k)=\sum_{i=1}^{2p}\frac{1}{i!}g^{(i)}(k)+\int_k^{k+1}\frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!}g^{(2p+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc, en utilisant la relation donnée en II.A.1,

$$R(k)=\sum_{\ell=1}^{2p-1}b_{\ell,2p}f^{(2p+\ell)}(k)+\int_k^{k+1}\frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!}g^{(2p+1)}(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Or, si $\ell\in\mathbf{N}^*$, on a $f^{(2p+\ell)}(k)=\mathrm{O}\left(k^{1-\alpha-2p-\ell}\right)=\mathrm{O}\left(k^{-\alpha-2p}\right)$. Enfin l'inégalité de la moyenne et l'inégalité triangulaire donnent

$$\left|\int_k^{k+1}\frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!}g^{(2p+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right|\leq\frac{1}{(2p)!}\sum_{i=0}^{p-1}|a_i|\,f^{(2p+1+i)}(k)=\mathrm{O}\left(k^{-\alpha-2p}\right)$$

par décroissance de $\left|f^{(2p+1+i)}\right|$ sur $[\,k;k+1\,]$ et puisque $|k+1-t|\leq 1$ pour t dans ce même intervalle. Il en résulte $\boxed{R(k)=\mathrm{O}\left(k^{-(2p+\alpha)}\right).}$

II.B.2. Les mêmes arguments qu'en I.B.3 montrent que les séries de termes généraux $g(k+1)-g(k)$, $f'(k)$ et $R(k)$ sont convergentes et donc par sommation il vient, pour n dans $\mathbf{N}^*$,

$$-g(n)=R_n(\alpha)+\sum_{k=n}^{\infty}R(k)=R_n(\alpha)+O(R_n(\alpha+2p))=R_n(\alpha)+O(n^{1-\alpha-2p})$$

par sommation des relations de comparaison et d'après I.B.1. D'où, puisque $a_{2p-1}=0$ si $p\geq 2$,

$$\boxed{R_n(\alpha)=-\left(a_0f(n)+a_1f'(n)+a_2f''(n)+\cdots+a_{2p-2}f^{(2p-2)}(n)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right).}$$

II.B.3. On a donc $\boxed{R_n(3)=\dfrac{1}{2n^2}+\dfrac{1}{2n^3}+\dfrac{1}{4n^4}-\dfrac{1}{12n^6}+\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^8}\right).}$

PARTIE III

III.A

III.A.1. a) Si, pour n dans $\mathbf{N}$, A_n est un polynôme, alors l'équation $P'=A_n$ définit un unique polynôme P s'annulant en 0 et si on note $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t=\alpha$, ce qui est licite puisque P est continu donc intégrable sur $[\,0;1\,]$, les deux relations imposées à A_{n+1} se traduisent par $A_{n+1}=P-\alpha$ puisque ces deux polynômes doivent différer d'une constante. Il en résulte que A_{n+1} est alors uniquement déterminé. De plus si A_n est non nul, alors $\deg(A_{n+1})=\deg(A_n)+1$ et une récurrence immédiate fournit

$\boxed{\text{la suite } (A_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est uniquement déterminée et, pour tout } n \text{ dans } \mathbf{N},\ \deg(A_n)=n.}$

On calcule directement

$$\boxed{A_1=X-\frac{1}{2},\ A_2=\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{2}X+\frac{1}{12}\ \text{ et }\ A_3=\frac{1}{6}X^3-\frac{1}{4}X^2+\frac{1}{12}X.}$$

b) Pour n dans $\mathbf{N}$, on pose $P_n = (-1)^n A_n \circ (1-X)$. On a donc $P_0 = A_0 = 1$. De plus pour n dans $\mathbf{N}$, on a

$$P'_{n+1} = (-1)^{n+2} A'_{n+1} \circ (1-X) = (-1)^n A_n \circ (1-X) = P_n$$

et

$$\int_0^1 P_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^{n+1} \int_0^1 A_{n+1}(1-t)\,\mathrm{d}t = (-1)^{n+1} \int_0^1 A_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

par changement de variable affine bijectif dans l'intégrale. Par unicité des polynômes de BERNOULLI, il vient $\forall n \in \mathbf{N}$, $P_n = A_n$, i.e.

$\boxed{\text{pour } n \text{ dans } \mathbf{N} \text{ et } t \text{ dans } \mathbf{R},\ A_n(t) = (-1)^n A_n(1-t).}$

c) Pour $n \geq 2$, on a

$$A_n(1) - A_n(0) = \int_0^1 A'_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

puisque $n-1 \geq 1$ et donc, d'après III.A.1b), $A_n(0) = (-1)^n A_n(1)$ et ainsi $A_n(0) = (-1)^n A_n(0)$, ce qui impose $A_n(0) = 0$ si n est impair. Autrement dit, pour $n \geq 2$,

$\boxed{A_n(0) = A_n(1) \text{ et } A_{2n-1}(0) = 0.}$

d) Par récurrence immédiate, pour n et k entiers naturels avec $k \leq n$, on a $A_n^{(k)} = A_{n-k}$ et donc la formule de TAYLOR donne, pour tout n dans $\mathbf{N}$, $\boxed{A_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{X^{n-k}}{k!}.}$

En particulier, si $n \geq 1$, on a $A_{n+1}(1) = A_{n+1}(0) = c_{n+1}$ et il vient, en spécialisant l'égalité précédente en $X = 1$, $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{(n+1-k)!} = 0.}$

e) Puisque $c_0 = A_0(0) = 1 = a_0$ et que la relation de récurrence précédente est la même que celle établie pour la suite (a_n), on a donc pour tout n $\boxed{c_n = a_n.}$

III.A.2. a) Pour t dans $[\,-1;1\,]$ et n dans $\mathbf{N}$, on a, d'après II.A.2 et III.A.1d),

$$|A_n(t)| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|a_k|}{(n+1-k)!} \leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} = \mathrm{O}(1)$$

et il en résulte que, si $|t| \leq 1$, $\sum A_n(t) z^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1, i.e. $\boxed{\sum A_n(t) z^n \text{ converge pour tout réel } t \text{ dans } [\,-1;1\,] \text{ et tout complexe } z \text{ tel que } |z| < 1.}$

b) On considère la série de fonctions $\sum z^n A_n$. Comme (A_n) est une suite de fonctions polynomiales, ce sont des fonctions de classe C^∞ et on peut en particulier considérer la série des dérivées, i.e. $\sum_{n \geq 1} z^n A'_n$ ou encore $z \sum z^n A_n$ d'après la propriété de définition des polynômes de BERNOULLI. Cette série est normalement convergente sur $[0;1\,]$ puisque

$$\left\| z^{n+1} A_n \right\|_{\infty,[\,0;1\,]} \leq |z|^{n+1} (e-1)$$

d'après le calcul effectué en III.A.2a. Comme la série $\sum z^n A_n$ est simplement (en fait normalement) convergente, on en déduit, grâce au théorème de dérivation des séries de fonctions, que sa dérivée est obtenue par dérivation terme à terme, i.e. pour z tel que $|z| < 1$

$\boxed{t \mapsto f(t,z) \text{ est dérivable sur } [0;1\,] \text{ et on a } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t,z) = z f(t,z).}$

Comme $f(0,z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \varphi(z)$ d'après III.A.1e, l'équation différentielle précédente donne $f(t,z) = \varphi(z)e^{tz}$ pour t dans $[0;1]$ et $|z| < 1$. D'après II.A.3b, on en déduit, pour t dans $[0;1]$ et $0 < |z| < 1$, $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) z^n = \frac{z e^{tz}}{e^z - 1}.}$

c) Pour z dans $\mathbf{C}$, on a $e^z - 1 = (e^{z/2}-1)(e^{z/2}+1)$ et donc, si $e^z \neq 1$, $\frac{e^{z/2}+1}{e^z-1} = \frac{1}{e^{z/2}-1}$. La dernière condition s'écrit $z \notin 2i\pi\mathbf{Z}$ et elle est donc vérifiée si $0 < |z| < 2\pi$.

$$\boxed{\text{Si } 0 < |z| < 2\pi,\ \frac{z e^{z/2}}{e^z - 1} + \frac{z}{e^z - 1} = 2\frac{z/2}{e^{z/2} - 1}.}$$

On en déduit, si $0 < |z| < 1$, $f\left(\frac{1}{2}, z\right) + f(0,z) = 2f\left(0, \frac{z}{2}\right)$. Par unicité du développement en série entière au voisinage de 0, il vient, pour tout entier naturel n, $A_n\left(\frac{1}{2}\right) + A_n(0) = 2A_n(0)\frac{1}{2^n}$, i.e.

$$\boxed{A_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right) a_n.}$$

III.A.3. a) On démontre le résultat de cette question par récurrence sur n, pour $n \geq 2$.

On remarque néanmoins que la propriété $A_n(0) = A_n(1) = A_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ pour n impair (supérieur à 3 donc) résulte de III.A.1c et III.A.2c. Pour n pair les mêmes questions fournissent $A_n(0) = A_n(1)$ et le signe de $A_n(0)$ et celui de $A_n\left(\frac{1}{2}\right)$ sont opposés.

Pour $n = 2$, on a $A_2(0) = A_2(1) = \frac{1}{12} > 0 > A_n\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{24}$. De plus $A_2' = A_1$ et donc $A_2' < 0$ sur $\left[0; \frac{1}{2}\right[$, $A_2' > 0$ sur $\left]\frac{1}{2}; 1\right]$ et le résultat s'en déduit.

Supposons maintenant le résultat vrai pour un certain entier $n-1$, avec $n \geq 3$.

Si $n \equiv 0 \mod 4$, puisqu'on a $A_{n-1} > 0$ sur $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ et $A_{n-1} < 0$ sur $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$, A_n est strictement croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Comme $A_n(0)$ et $A_n\left(\frac{1}{2}\right)$ sont de signes opposés (et sont non nuls car l'un au moins est non nul par croissance stricte), on a $A_n(0) = A_n(1) < 0$ et $A_n\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

Si $n \equiv 1 \mod 4$, puisque A_{n-1} est strictement croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, A_n y est strictement convexe. Puisqu'elle est nulle en 0 et 1/2, on a $A_n < 0$ sur $\left]0; \frac{1}{2}\right[$. De même A_n est strictement concave sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et ainsi $A_n > 0$ sur $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$.

Si $n \equiv 2 \mod 4$, puisqu'on a $A_{n-1} < 0$ sur $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ et $A_{n-1} > 0$ sur $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$, A_n est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Comme $A_n(0)$ et $A_n\left(\frac{1}{2}\right)$ sont de signes opposés (et sont non nuls car l'un au moins est non nul par croissance stricte), on a $A_n(0) = A_n(1) > 0$ et $A_n\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

Enfin si $n \equiv 3 \mod 4$, puisque A_{n-1} est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, A_n y est strictement concave. Puisqu'elle est nulle en 0 et 1/2, on a $A_n > 0$ sur $\left]0; \frac{1}{2}\right[$. De même A_n est strictement convexe sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et ainsi $A_n < 0$ sur $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$.

$\boxed{\text{Les variations cherchées en découlent.}}$

b) D'après ce qui précède, pour n pair et non nul, les extrema locaux de A_n sont en 0, 1/2 et 1. D'après III.A.2c, $\left|A_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq |A_n(0)|$ et on en déduit, puisque $A_n(0) = A_n(1) = a_n$, $\|A_n\|_{\infty,[0;1]} = |a_n|$.

Si n est impair, l'inégalité des accroissements finis (théorème de Lagrange) fournit, puisque $A_n(1/2) = 0$, pour tout t dans $[0;1]$,

$$|A_n(t)| \leq \left|t - \frac{1}{2}\right| \|A_n'\|_{\infty,[0;1]}$$

et donc $\|A_n\|_{\infty,[0;1]} \leq \frac{1}{2}|a_{n-1}|$. Autrement dit, pour n dans $\mathbf{N}^*$ et x dans $[0;1]$, on a

$$\boxed{|A_{2n}(x)| \leq |a_{2n}| \text{ et } |A_{2n+1}(x)| \leq \frac{|a_{2n}|}{2}.}$$

III.B

III.B.1. a) Soit q dans $\mathbf{N}^*$. On considère $\int_0^1 A_q(t)f^{(q+1)}(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui est licite puisque l'intégrande est de classe C^∞ en tant que produit de deux telles fonctions. On peut donc lui appliquer une intégration par partie et on obtient

$$\int_0^1 A_q(t)f^{(q+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \left[A_q f^{(q)}\right]_0^1 - \int_0^1 A_{q-1}(t)f^{(q)}(t)\,\mathrm{d}t$$

puisque $A_q' = A_{q-1}$. Une récurrence immédiate fournit alors

$$\int_0^1 A_q(t)f^{(q+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k \left[A_{q-k}f^{(q-k)}\right]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_0(t)f'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

i.e. d'après le théorème de Leibniz-Newton (théorème fondamental du calcul différentiel et intégral) et après multiplication par $(-1)^q$ et réindexation de la somme

$$\boxed{f(1) - f(0) = \sum_{k=1}^{q}(-1)^{k+1}\left[A_k f^{(k)}\right]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_q(t)f^{(q+1)}(t)\,\mathrm{d}t.}$$

b) On spécialise le résultat précédent en $q = 2p+1$ avec $p \in \mathbf{N}$, et donc $q \geq 1$. D'après III.A.1c il vient, puisque $a_1 = -\frac{1}{2}$ et $A_1(1) = \frac{1}{2}$,

$$\boxed{f(1) - f(0) = \frac{1}{2}\left(f'(0) + f'(1)\right) - \sum_{k=1}^{2p} a_{2k}\left(f^{(2k)}(1) - f^{(2k)}(0)\right) - \int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t.}$$

III.B.2. Puisque f est de classe C^∞ sur $[n;+\infty[$, pour tout k entier avec $k \geq n$, la fonction f_k est de classe C^∞ sur $[0;1]$ et on peut lui appliquer le résultat précédent. Il vient

$$\begin{aligned} f(k+1) - f(k) &= \frac{1}{2}\left(f'(k) + f'(k+1)\right) - \sum_{j=1}^{2p} a_{2j}\left(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)\right) \\ &\quad - \int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

et donc, en sommant ces égalités pour k entre n et un certain entier N avec $N > n$, il vient

$$\begin{aligned} f(N+1) - f(n) &= \sum_{k=n}^{N} f'(k) + \frac{1}{2}\left(f'(N+1) - f'(n)\right) - \sum_{j=1}^{2p} a_{2j}\left(f^{(2j)}(N+1) - f^{(2j)}(n)\right) \\ &\quad - \int_n^{N+1} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

puisque l'intégrale est bien définie (grâce à la relation de Chasles) car A^*_{2p+1} est continue par morceaux sur $[n;+\infty[$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{N} f'(k) &= f(N+1) - f(n) + \frac{1}{2}\left(f'(n) - f'(N+1)\right) + \sum_{j=1}^{2p} a_{2j}\left(f^{(2j)}(N+1) - f^{(2j)}(n)\right) \\ &\quad + \int_n^{N+1} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t\ . \end{aligned}$$

Comme f' est de signe constant et f tend vers 0 en l'infini, par comparaison avec une intégrale (i.e. en appliquant I.A.1 à f' ou à $-f'$), la série $\sum_{k\geq n} f'(k)$ est convergente (car de termes de signe constant et bornée). On peut donc faire tendre N vers l'infini dans le membre de gauche de l'égalité précédente. Dans le membre de droite, puisque f et toutes ses dérivées ont une limite nulle en l'inifni, tous les termes sauf au plus un ont une limite (à savoir l'intégrale). On en déduit que

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} \int_n^{N+1} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t \text{ existe.}}$$

De plus il vient $\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2} f'(n) - \sum_{j=1}^{2p} a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t.}$

Pour x dans $\mathbf{R}$, avec $x \geq n$, l'inégalité de la moyenne fournit, en tenant compte du fait que $f^{(2p+2)}$ est de signe constant et de III.A.3b,

$$\left|\int_n^x A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{|a_{2p}|}{2} \int_n^x \left|f^{(2p+2)}(t)\right| \mathrm{d}t = \frac{|a_{2p}|}{2}\left|f^{(2p+1)}(x) - f^{(2p+1)}(n)\right|$$

et donc, en prenant la limite quand x tend vers l'infini

$$\boxed{\left|\int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{|a_{2p}|}{2}\left|f^{(2p+1)}(n)\right|.}$$

III.B.3. On applique ce qui précède à la fonction f définie en II.B, avec $n = 1$. Il s'agit bien d'une fonction de classe C^∞, telle qu'elle-même et toutes ses dérivées sont de signe constant sur $\mathbf{R}_+^*$ et de limite nulle en $+\infty$. On peut donc appliquer ce qui précède. Il en résulte que, dans l'expression de $R_n(\alpha)$ trouvée en II.B.2, le terme $\mathrm{O}\left(n^{1-\alpha-2p}\right)$ est égal à

$$\boxed{\int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t) \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+2p)}{t^{\alpha+2p+1}}\,\mathrm{d}t.}$$

PARTIE IV

IV.A

IV.A.1. Puisque g est continue par morceaux et que A_n est polynomiale, le produit est intégable sur $[0;1]$. Il résulte, pour n entier impair, de la relation de Chasles, par changement de variables affine bijectif $(t \mapsto 1-t)$ et en utilisant III.A.1b :

$$\begin{aligned}\int_0^1 A_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{1/2} A_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{1/2}^1 A_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{1/2} (A_n(t)g(t) + A_n(1-t)g(1-t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{1/2} A_n(t)(g(t) + (-1)^n g(1-t))dt \\ &= \int_0^{1/2} A_n(t)(g(t) - g(1-t))dt\end{aligned}$$

et donc, par croissance de g, l'intégrande est du signe opposé à celui de A_n. En utilisant III.A.3, il vient

$$\boxed{\text{si } n \equiv 1 \mod 4 \text{ alors } \int_0^1 A_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t \geq 0 \text{ et si } n \equiv 3 \mod 4 \text{ alors } \int_0^1 A_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq 0.}$$

IV.A.2. Soit $p \geq 1$. Avec les notations de II.B.2, III.B.2 donne

$$R_n(\alpha) = \tilde{S}_{n,2p-2}(\alpha) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} + \int_n^{+\infty} A^*_{2p-1}(t)f^{(2p)}(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$S(\alpha) = \tilde{S}_{n,2p-2}(\alpha) + \int_n^{+\infty} A^*_{2p-1}(t)f^{(2p)}(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Or on a, par relation de Chasles, 1-périodicité de A^* et changement de variable affine bijectif dans les intégrales :

$$\int_n^{+\infty} A^*_{2p-1}(t)f^{(2p)}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_0^1 A_{2p-1}(t)f^{(2p)}(t+k)\,\mathrm{d}t\ .$$

Puisque les dérivées paires de f sont négatives et croissantes sur $\mathbf{R}_+^*$, la question précédente montre que l'intégrale du membre de gauche est négative, i.e. $\tilde{S}_{n,2p-2}(\alpha)$ est un majorant de $S(\alpha)$ si et seulement si $2p-1 \equiv 3 \mod 4$, i.e. p est pair. On en conclut

$$\boxed{\tilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leq S(\alpha) \leq \tilde{S}_{n,4p+2}(\alpha) \text{ et } \tilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leq S(\alpha) \leq \tilde{S}_{n,4p-2}(\alpha).}$$

Autrement dit $S(\alpha)$ est compris dans l'intervalle entre deux termes pairs consécutifs de la suite $(\tilde{S}_{n,2p}(\alpha))_{p\in\mathbf{N}^*}$. Il vient, pour $p \geq 1$,

$$\left|S(\alpha) - \tilde{S}_{n,2p}(\alpha)\right| \leq \left|\tilde{S}_{n,2p+2}(\alpha) - \tilde{S}_{n,2p}(\alpha)\right|$$

i.e. $\boxed{\left|S(\alpha) - \tilde{S}_{n,2p}(\alpha)\right| \leq \left|a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)\right|.}$

IV.A.3. Pour $\alpha = 3$, $n = 100$ et $p = 2$, il vient, pour $x > 0$, $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^{-2}$ et donc $f^{(6)}(x) = -\dfrac{7!}{2!}x^{-8}$. D'où, en tenant compte de $6!\,a_6 = \dfrac{1}{42}$, $\left|S(3) - \tilde{S}_{100,4}(3)\right| \leq \dfrac{7!}{84 \times 6!}10^{-16} = \dfrac{1}{12}10^{-16}$ et donc $\boxed{\left|S(3) - \tilde{S}_{100,4}(3)\right| \leq 10^{-1}}$

IV.B

IV.B.1. Par définition, pour $p \geq 1$, on a $\hat{A}_p(0) = \displaystyle\int_0^1 A_p(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Soit n dans $\mathbf{Z}^*$ et f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = e^{-2i\pi nt}$. C'est une fonction de classe C^∞ et III.B.1 donne, pour $p \geq 1$,

$$0 = f'(0) + (-1)^p \int_0^1 A_p(t) f^{(p+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

par périodicité de f et de ses dérivées et compte-tenu du fait qu'on a $A_k(0) = A_k(1)$ si $k \geq 1$ d'après III.A.1c. Puisque $f' = -2i\pi n f$ et $f^{(p+1)} = (-2i\pi n)^{p+1} f$, il vient

$$2i\pi n = (-1)^p (-2i\pi n)^{p+1} \hat{A}_p(n)$$

et donc $\hat{A}_p(n) = -\dfrac{1}{(2i\pi n)^p}$. En conclusion $\boxed{\hat{A}_p(n) = 0 \text{ si } n = 0 \text{ et } \hat{A}_p(n) = -\dfrac{1}{(2i\pi n)^p} \text{ sinon.}}$

IV.B.2. Soit $p \geq 1$. D'après ce qui précède la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \left(\hat{A}_{2p}(n) e^{2i\pi nx} + \hat{A}_{2p}(-n) e^{-2i\pi nx}\right)$ est normalement convergente sur $\mathbf{R}$ puisque la norme infinie du terme général est majoré par $\left|\hat{A}_{2p}(n)\right| + \left|\hat{A}_{2p}(-n)\right|$, i.e. par $\dfrac{1}{2^{2p-1}\pi^{2p} n^{2p}}$, et donc dominé par le terme général d'une série de Riemann convergente. Comme le terme général est une fonction continue, sa somme l'est aussi, i.e. $\boxed{g_{2p} \text{ existe et est une fonctio}}$

IV.B.3. Soit $p \geq 1$. Comme $A_{2p}(1) = A_{2p}(0)$ d'après III.A.1c et que A_{2p} est continue sur $[0;1]$, elle est prolongeable sur $\mathbf{R}$ en une fonction 1-périodique donnée par la formule $\tilde{A}_{2p}(x) = A_{2p}(x - [x])$. Par continuité sur $]0;1[$, continuité à gauche en 1 et à droite en 0, $\tilde{A}_{2p}$ est continue sur $[0;1]$ donc sur $\mathbf{R}$, i.e. $\boxed{\tilde{A}_{2p} \text{ est 1-périodique et continue sur } \mathbf{R}.}$

Comme g_{2p} est 1-périodique, en tant que somme d'une série de telles fonctions, et continue, h possède les mêmes propriétés, par linéarité. Pour tout n dans $\mathbf{Z}$ la fonction $x \mapsto h(x)e^{-2i\pi nx}$ est donc 1-périodique et son intégrale sur une période ne dépend pas de la période choisie. Par linéarité on a de plus

$$\int_0^1 h(x)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 A_{2p}(x)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 g_{2p}(x)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x\ .$$

Puisque g_{2p} est la somme d'une série de fonctions normalement convergentes, on peut intervertir les signes de sommation et il vient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 h(x)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x &= \hat{A}_{2p}(n) - \sum_{k=1}^{+\infty} \hat{A}_{2p}(k) \int_0^1 e^{2i\pi(k-n)x}\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{+\infty} \hat{A}_{2p}(-k) \int_0^1 e^{2i\pi(-k-n)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \hat{A}_{2p}(n) - \hat{A}_{2p}(n) = 0
\end{aligned}$$

et donc, pour tous t réel et n entier, $\boxed{\displaystyle\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} h(x)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x = 0.}$

Puisque h est continue sur $[0;1]$, d'après le théorème de Weierstrass, elle y atteint son maximum, noté M. Par 1-périodicité c'est aussi son maximum sur $\mathbf{R}$, i.e. $\|h\|_\infty = M$.

Soit t réel tel que $h(t)$ soit non nul. On dispose alors de ε strictement positif tel que h ne s'annule pas sur $]t - 2\varepsilon; t + 2\varepsilon[$ et y garde donc un signe constant. Quitte à diminuer ε, on peut supposer $\varepsilon < \dfrac{1}{6}$.

Pour de tels t et ε, pour tout n dans $\mathbf{N}$ la fonction $x \mapsto (1 + \cos(2\pi(x-t)) - \cos(2\pi\varepsilon))^n$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des fonctions $x \mapsto e^{2i\pi kx}$, pour $k \in \mathbf{Z}$, et donc

$$\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} h(x)(1+\cos(2\pi(x-t))-\cos(2\pi\varepsilon))^n \,\mathrm{d}x = 0 \ .$$

Par changement de variable affine bijectif, on a donc

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(t+x)(1+\cos(2\pi x)-\cos(2\pi\varepsilon))^n \,\mathrm{d}x = 0 \ .$$

Si $2\varepsilon \leq |x| \leq \dfrac{1}{2}$, on a $4\pi\varepsilon \leq |2\pi x| \leq \pi$ et donc $-1 \leq \cos(2\pi x) \leq \cos(4\pi\varepsilon)$. Dans ces conditions, et puisqu'on a $0 < 2\pi\varepsilon \leq \dfrac{\pi}{3}$, et donc $\dfrac{1}{2} \leq \cos(2\pi\varepsilon) < 1$ et aussi $\cos^2(2\pi\varepsilon) \leq \cos(2\pi\varepsilon)$, il vient

$$1-\cos(2\pi\varepsilon)+\cos(4\pi\varepsilon) = 2\cos^2(2\pi\varepsilon)-\cos(2\pi\varepsilon) \leq \cos(2\pi\varepsilon)$$

et

$$-\cos(2\pi\varepsilon) \leq 1+\cos(2\pi x)-\cos(2\pi\varepsilon) \leq 1-\cos(2\pi\varepsilon)+\cos(4\pi\varepsilon) < \cos(2\pi\varepsilon) \ .$$

Pour tout n dans $\mathbf{N}$, il vient par inégalité de la moyenne

$$\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{-2\varepsilon} h(t+x)(1+\cos(2\pi x)-\cos(2\pi\varepsilon))^n \,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{2}M\cos(2\pi\varepsilon)^n = \mathrm{O}\,(1)$$

et

$$\left|\int_{2\varepsilon}^{\frac{1}{2}} h(t+x)(1+\cos(2\pi x)-\cos(2\pi\varepsilon))^n \,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{2}M\cos(2\pi\varepsilon)^n = \mathrm{O}\,(1) \ .$$

On en déduit, par relation de Chasles, et puisque l'intégrale sur $\left[\,-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\,\right]$ est nulle,

$$\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} h(t+x)(1+\cos(2\pi x)-\cos(2\pi\varepsilon))^n \,\mathrm{d}x = \mathrm{O}\,(1) \ .$$

Par ailleurs h est de signe constant sur $\left]t-2\varepsilon;t+2\varepsilon\right[$ et donc

$$\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} |h(t+x)|\,(1+\cos(2\pi x)-\cos(2\pi\varepsilon))^n \,\mathrm{d}x = \mathrm{O}\,(1) \ .$$

Si $|x| \leq 2\varepsilon$, on a $0 \leq |2\pi x| \leq 4\pi\varepsilon$ et donc

$$1+\cos(2\pi x)-\cos(2\pi\varepsilon) \geq 1-\cos(2\pi\varepsilon)+\cos(4\pi\varepsilon) = \cos(2\pi\varepsilon)\,(2\cos(2\pi\varepsilon)-1) \geq 0$$

puisque $\cos(2\pi\varepsilon) \geq \dfrac{1}{2}$. De plus, si $|x| \leq \varepsilon$, alors

$$1+\cos(2\pi x)-\cos(2\pi\varepsilon) \geq 1-\cos(2\pi\varepsilon)+\cos(2\pi\varepsilon) = 1$$

et on en déduit, par positivité de l'intégrale,

$$\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} |h(t+x)|\,(1+\cos(2\pi x)-\cos(2\pi\varepsilon))^n \,\mathrm{d}x \geq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |h(t+x)| \,\mathrm{d}x \ .$$

Or $|h|$ est continue et positive sur le segment $[\,t-\varepsilon;t+\varepsilon\,]$ et ne s'y annule pas. L'intégrale précédente est donc un réel strictement positif et ceci contredit le fait que le membre de gauche est dans $\mathrm{O}\,(1)$. Par conséquent $\boxed{h \text{ est nulle.}}$

IV.B.4. D'après la question précédente, pour $p \geq 1$, on a $A_{2p} = g_{2p}$ et en particulier en 0 il vient $\boxed{a_{2p} = A_{2p}(0) = (-1)^{p-}}$

IV.C

IV.C.1. Pour $k \geq 2$ et x dans $\mathbf{R}_+^*$, on a $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-2)\dfrac{1}{x^{\alpha+k-1}}$. Pour n et p dans $\mathbf{N}^*$, la formule précédente donne $\boxed{\left|\dfrac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)}\right| = \dfrac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2\pi^2S(2p)}.}$

IV.C.2. D'après I.A.3 $\lim S(2p) = 1$ et donc le quotient précédent est équivalent à $\dfrac{1}{n^2\pi^2}p^2$ lorsque p vers l'infini. En particulier il tend vers l'infni. L'approximation trouvée en II.B.2 est donc la somme de deux termes : l'un est la somme partielle de la série définissant $S(\alpha)$ et le second est la somme partielle d'une série alternée grossièrement divergente. Autrement dit $\boxed{\text{à } n \text{ fixé, l'approximation de } S(\alpha) \text{ par } \tilde{S}_{n,2p} \text{ est grossièrement}}$ La suite des majorants trouvés en IV.A.2, i.e. $\left(\left|a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)\right|\right)_{p\in\mathbf{N}^*}$, étant croissante à partir d'un certain rang, d'après la question précédente, elle atteint un minimum en un certain $p(n)$, avec $p(n) \simeq \pi n$ pour n grand. À n fixé, on choisit donc $p = p(n)$. Autrement dit $\boxed{\text{on choisit } n \text{ et } p \text{ grands avec } p \simeq \dfrac{n}{\pi}.}$