Mathématiques 2

MP

2011

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures   Calculatrices autorisées

Rappels et notations

Pour tout entier naturel non nul n, on note :
- $[\![1;n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $1 \leqslant k \leqslant n$;
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes (respectivement l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes) à coefficients dans $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$; on dit que A est positive (respectivement définie positive) si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \geqslant 0 \quad (\text{respectivement } {}^tXAX > 0 \text{ si } X \neq 0).$$

L'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[X]$, et, pour tout entier naturel p, le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à p est noté $\mathbb{R}_p[X]$.

Objectifs

La première partie a pour but de démontrer une caractérisation des matrices réelles définies positives, à l'aide des déterminants de certaines matrices extraites.

La deuxième partie aborde l'étude d'une suite de polynômes orthogonaux pour un produit scalaire défini à l'aide d'une intégrale.

La troisième partie introduit les matrices de Hilbert et leur inverse, dont certaines propriétés sont étudiées dans la **partie IV**.

I Caractérisation des matrices symétriques définies positives

I.A – Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

I.A.1) Montrer que A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

I.A.2) Montrer que A est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

I.B – Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $i \in [\![1;n]\!]$, on note $A^{(i)}$ la matrice carrée d'ordre i extraite de A, constituée par les i premières lignes et les i premières colonnes de A.

Le but de cette question est de démontrer l'équivalence suivante :

$$A \text{ est définie positive} \iff \forall i \in [\![1;n]\!],\ \det(A^{(i)}) > 0.$$

I.B.1) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est définie positive.

Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, montrer que la matrice $A^{(i)}$ est définie positive et en déduire que $\det(A^{(i)}) > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on dira qu'une matrice A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $\mathcal{P}_n$ si $\det(A^{(i)}) > 0$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$.

I.B.2) Dans les cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$, montrer directement que toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_n$ est définie positive.

I.B.3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que toute matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_n$ est définie positive. On considère une matrice A de $\mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ et on suppose par l'absurde que A n'est pas définie positive.

a) Montrer alors que A admet deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à des valeurs propres (non nécessairement distinctes) strictement négatives.

b) En déduire qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ dont la dernière composante est nulle et tel que ${}^tXAX < 0$.

c) Conclure.

I.C – Soit A une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. A-t-on l'équivalence suivante :

$$A \text{ est positive} \iff \forall i \in [\![1;n]\!],\ \det(A^{(i)}) \geqslant 0\ ?$$

I.D – Écrire une procédure, dans le langage Maple ou Mathematica, qui prend en entrée une matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et qui, en utilisant la caractérisation du **I.B**, renvoie « true » si la matrice M est définie positive, et « false » dans le cas contraire.

II Étude d'une suite de polynômes

On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n = [X(X-1)]^n \end{cases}$$

De plus, on pose :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, \quad \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

II.A – Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

II.B – On note $P_n^{(n)}$ le polynôme dérivé n fois de P_n.
Déterminer le degré de $P_n^{(n)}$ et calculer $P_n^{(n)}(1)$.
On définit la suite de polynômes $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} L_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad L_n = \dfrac{1}{P_n^{(n)}(1)} P_n^{(n)}. \end{cases}$$

II.C – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\langle Q, L_n\rangle = 0$.
Indication : on pourra intégrer par parties.

II.D –

II.D.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 P_n(u)\,du$.
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de I_n.

II.D.2) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation : $\langle L_n, L_n\rangle = \dfrac{1}{2n+1}$.

II.E – Déterminer une famille de polynômes $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les deux conditions suivantes :
i. pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de K_n vaut n et son coefficient dominant est strictement positif ;
ii. pour tout $N \in \mathbb{N}$, $(K_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_N[X]$ pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
Justifier l'unicité d'une telle famille.

II.F – Calculer K_0, K_1 et K_2.

III Matrices de Hilbert

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la matrice H_n par :

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ (H_n)_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$$

où $(H_n)_{i,j}$ désigne le coefficient de place (i,j) de la matrice H_n.
On note de plus $\Delta_n = \det(H_n)$.

III.A – ***Étude de quelques propriétés de H_n***

III.A.1) Calculer H_2 et H_3. Montrer que ce sont des matrices inversibles et déterminer leur inverse.
Dans les questions suivantes de **III.A**, on désigne par n un entier naturel non nul.

III.A.2) Montrer la relation :

$$\Delta_{n+1} = \frac{(n!)^4}{(2n)!\,(2n+1)!}\,\Delta_n$$

Indication : on pourra commencer par soustraire la dernière colonne de Δ_{n+1} à toutes les autres.

III.A.3) En déduire l'expression de Δ_n en fonction de n (on fera intervenir les quantités $c_m = \displaystyle\prod_{i=1}^{m-1} i!$ pour des entiers m adéquats).

III.A.4) Prouver que H_n est inversible, puis que $\det(H_n^{-1})$ est un entier.

III.A.5) Démontrer que H_n admet n valeurs propres réelles (comptées avec leur ordre de multiplicité) strictement positives.

III.B – Approximation au sens des moindres carrés

On note $C^0([0;1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. On convient d'identifier l'espace $\mathbb{R}[X]$ au sous-espace vectoriel de $C^0([0;1],\mathbb{R})$ constitué des fonctions polynomiales de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$; ainsi, pour tout entier naturel i, le polynôme X^i est confondu avec la fonction polynomiale définie par $X^i(t) = t^i$ pour tout $t \in [0,1]$.

On étend à $C^0([0;1],\mathbb{R})$ le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de la **partie II** en posant

$$\forall f, g \in C^0([0;1],\mathbb{R}), \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

(On ne demande pas de vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $C^0([0;1],\mathbb{R})$.)

On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire : pour toute fonction $f \in C^0([0;1],\mathbb{R})$, on a donc

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

III.B.1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\Pi_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\|\Pi_n - f\| = \min_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|Q - f\|$$

III.B.2) Montrer que la suite $(\|\Pi_n - f\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

III.B.3) Montrer que H_n est la matrice du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, restreint à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

III.B.4) Calculer les coefficients de Π_n à l'aide de la matrice H_{n+1}^{-1} et des réels $\langle f, X^i \rangle$.

III.B.5) Déterminer explicitement Π_2 lorsque f est la fonction définie pour tout $t \in [0,1]$ par $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

IV Propriétés des coefficients de H_n^{-1}

IV.A – Somme des coefficients de H_n^{-1}

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $h_{i,j}^{(-1,n)}$ le coefficient de place (i,j) de la matrice H_n^{-1} et on désigne par s_n la somme des coefficients de la matrice H_n^{-1}, c'est-à-dire :

$$s_n = \sum_{1\leqslant i,j \leqslant n} h_{i,j}^{(-1,n)}$$

IV.A.1) Calculer s_1, s_2 et s_3. Conjecturer de manière générale la valeur de s_n en fonction de n.

IV.A.2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer qu'il existe un unique n-uplet de nombres réels $(a_p^{(n)})_{0\leqslant p \leqslant n-1}$ vérifiant le système de n équations linéaires à n inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_0^{(n)} & + & \dfrac{a_1^{(n)}}{2} & + & \cdots & + & \dfrac{a_{n-1}^{(n)}}{n} & = & 1 \\ \dfrac{a_0^{(n)}}{2} & + & \dfrac{a_1^{(n)}}{3} & + & \cdots & + & \dfrac{a_{n-1}^{(n)}}{n+1} & = & 1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{a_0^{(n)}}{n} & + & \dfrac{a_1^{(n)}}{n+1} & + & \cdots & + & \dfrac{a_{n-1}^{(n)}}{2n-1} & = & 1 \end{array}\right.$$

b) Montrer que $s_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} a_p^{(n)}$.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme S_n par : $S_n = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}X + \cdots + a_{n-1}^{(n)}X^{n-1}$.

Dans les questions suivantes de **IV.A**, on désigne par n un entier naturel non nul.

IV.A.3) Montrer que

$$\forall Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1}X^{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \langle S_n, Q \rangle = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p$$

IV.A.4) Exprimer s_n à l'aide de la suite de polynômes $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie à la **question II.E**.

IV.A.5) Pour tout $p \in [\![0; n-1]\!]$, calculer $K_p(1)$.

IV.A.6) Déterminer la valeur de s_n.

IV.B – Les coefficients de H_n^{-1} sont des entiers

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0;n]\!]$, on note $\dbinom{n}{k}$ le coefficient binomial $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

IV.B.1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\dbinom{2p}{p}$ est un entier pair.

En déduire que, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1;n]\!]$, alors $\dbinom{n+p}{p}\dbinom{n}{p}$ est un entier pair.

IV.B.2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'on peut écrire :

$$K_n = \sqrt{2n+1}\,\Lambda_n$$

où Λ_n est un polynôme à coefficients entiers que l'on explicitera.
Parmi les coefficients de Λ_n, lesquels sont pairs ?

IV.B.3)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer $h_{i,i}^{(-1,n)}$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$; on donnera en particulier une expression très simple de $h_{1,1}^{(-1,n)}$ et $h_{n,n}^{(-1,n)}$ en fonction de n.

b) Calculer $h_{i,j}^{(-1,n)}$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$; en déduire que les coefficients de H_n^{-1} sont des entiers.

c) Montrer que $h_{i,j}^{(-1,n)}$ est divisible par 4 pour tout couple $(i,j) \in [\![2;n]\!]^2$.

• • • FIN • • •

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – CENTRALE 2011 – MP

PARTIE I

I.A -

I.A.1) Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Soit alors $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de diagonalisation de A, $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ les valeurs propres associées et $(x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbf{R}^n$.

Si A est positive, en considérant ${}^{\mathrm{t}}X_iAX_i = \lambda_i$, alors ses valeurs propres sont positives. Réciproquement, si tel est le cas et si $X = \sum_{i=1}^{n} x_iX_i$, alors ${}^{\mathrm{t}}XAX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq 0$ et donc, puisqu'on a affaire à une base, A est positive, i.e.

$\boxed{A \text{ est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives.}}$

I.A.2) On reprend les mêmes notations que précédemment. Comme ${}^{\mathrm{t}}X_iAX_i = \lambda_i$, si A est définie positive, ses valeurs propres sont strictement positives. Réciproquement la formule précédente montre que ${}^{\mathrm{t}}XAX$ n'est nul que si tous les x_i sont nuls, i.e. $X = 0$ et donc

$\boxed{A \text{ est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.}}$

I.B -

I.B.1) Soit i dans $[\![1, n]\!]$, puisque A est symétrique, $A^{(i)}$ l'est. Soit maintenant X_i dans $\mathscr{M}_{i,1}(\mathbf{R})$. On définit X dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ en complétant X_i par des 0. On a alors ${}^{\mathrm{t}}XAX = {}^{\mathrm{t}}X_iA^{(i)}X_i$ et $X = 0$ si et seulement si $X_i = 0$. Comme A est définie positive, on a donc ${}^{\mathrm{t}}X_iA^{(i)}X_i > 0$ si $X_i \neq 0$ et donc $\boxed{A^{(i)} \text{ est définie positive.}}$

D'après I.A.2), ses valeurs propres sont donc strictement positives. Comme elle est diagonalisable, son déterminant est le produit de ses valeurs propres et donc $\boxed{\det(A^{(i)}) > 0.}$

I.B.2) Si $n = 1$, A est toujours symétrique et est définie positive si et seulement si son unique terme est strictement positif. Comme c'est aussi son déterminant, donc celui de $A^{(1)}$, si $\mathcal{P}_1$ est vraie, alors A est définie positive.

Si $n = 2$, on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Pour X dans $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, de sorte que A est symétrique définie positive si et seulement si la quantité $ax^2 + 2bxy + cy^2$ est positive pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et n'est nulle que si $x = y = 0$.

Soit donc (x, y) dans $\mathbf{R}^2$. Comme $\mathcal{P}_2$ est vraie, on a $\det(A^{(1)}) = a > 0$ et $\det(A^{(2)}) = \det(A) = ac - b^2 > 0$. On peut donc écrire

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left(\left(x + \frac{by}{a}\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2}y^2\right) \geq 0$$

et cette quantité est nulle si et seulement si $y = 0$ et $x + \dfrac{by}{a} = 0$, i.e. $x = y = 0$. Il en résulte que, $\boxed{\text{pour } n = 1 \text{ ou } n = 2, \text{ si } A \text{ vérifie } \mathcal{P}_n, \text{ elle est définie positive.}}$

I.B.3) a) Puisque A est symétrique réelle, elle est diagonalisable et comme on a

$$\det(A) = \det(A^{(n)}) > 0\,,$$

A possède un nombre pair de valeurs propres strictement négatives (comptées avec multiplicité) et aucune valeur propre nulle. D'après I.A.2), si A n'est pas définie positive, c'est donc qu'elle a au moins une valeur propre négative, donc au moins deux (éventuellement égales), i.e.

$\boxed{\text{$A$ admet deux vecteurs propres indépendants associés à des valeurs propres strictement négatives.}}$

b) On dispose de (u, v) deux vecteurs propres indépendants associés à des valeurs propres strictement négatives. On note $P = \mathrm{V}ect\,(u, v)$ et (λ, μ) les valeurs propres associées à (u, v). Si $\lambda \neq \mu$, comme A est symétrique réelle, u et v sont orthogonaux. Sinon P est inclus dans $\mathrm{Ker}(A - \Lambda I_n)$ et, quitte à en changer, on peut supposer que (u, v) est une base orthogonale de P. En particulier si X est dans P et si (α, β) sont les coordonnées de X dans la base (u, v) de P. Il vient ${}^{\mathrm{t}}XAX = \lambda\alpha^2 + \mu\beta^2 < 0$.

On note H l'hyperplan formé des X de $\mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbf{R})$ de dernière composante nulle. Par dimension $P \cap H \neq \{0\}$ et donc

$\boxed{\text{il existe X dans $\mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbf{R})$ de dernière composante nulle et tel que ${}^{\mathrm{t}}XAX < 0$.}}$

c) Soit X_n le vecteur de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ donné par les n premières composantes de X. On a alors ${}^{\mathrm{t}}X_n A^{(n)} X_n = {}^{\mathrm{t}}XAX < 0$. Or $A^{(n)}$ vérifie $\mathcal{P}_n$ par hypothèse et est donc définie positive et donc X_n ne saurait exister. Cette contradiction assure que A est définie positive. Et donc le principe de récurrence permet de conclure

$\boxed{\text{$A$ est définie positive si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\det(A^{(i)}) > 0$.}}$

I.C -

La matrice A donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ vérifie $\det(A^{(1)}) = \det(A^{(2)}) = 0$ et est symétrique réelle, mais elle n'est pas positive puisque, pour $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a ${}^{\mathrm{t}}XAX = -1$.

$\boxed{\text{L'équivalence « A est positive si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\det(A^{(i)}) \geq 0$ » n'est pas vraie.}}$

I.D -

```
with(LinearAlgebra) :
defpos :=proc(A,n)
local i;
i :=1;
while i<=n and Determinant(SubMatrix(A,[1..i],[1..i]))>0
do i :=i+1 od;
evalb(i=n+1) end :
```

PARTIE II

II.A -

Soit P et Q dans $\mathbf{R}[X]$. Les fonctions polynomiales étant continues, elles sont intégrables sur tout segment de $\mathbf{R}$ et donc $\langle P \,|\, Q \rangle$ est bien défini.

Par bilinéarité du produit dans l'algèbre $\mathbf{R}[X]$ et linéarité de l'intégrale, on a bien affaire à une forme bilinéaire. Comme cette algèbre est commutative, $\langle P \mid Q\rangle = \langle Q \mid P\rangle$.
Comme l'intégrale est une forme linéaire positive, $\langle P \mid P\rangle \geq 0$.
Enfin l'intégrale d'une fonction continue positive sur un segment n'étant nulle que si cette fonction est nulle, on a $\langle P \mid P\rangle = 0 \Leftrightarrow P = 0$. Il en résulte que
$\boxed{(P, Q) \mapsto \langle P \mid Q\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbf{R}[X].}$

II.B -

Comme P_n est de degré $2n$, $\boxed{P_n^{(n)} \text{ est de degré } n.}$
Au voisinage de 1, on a $P_n(x) = (x-1)^n + o((x-1)^n)$ et donc la formule de Taylor donne $\boxed{P_n(1) = n!.}$

II.C -

Les fonctions intégrées étant de classe C^∞, on peut intégrer par parties. Comme P_n admet 1 et 0 comme racines de multiplicité n, 1 et 0 sont racines des dérivées de P_n jusqu'à l'ordre $n-1$. Il vient donc, pour Q dans $\mathbf{R}[X]$,

$$\langle Q \mid L_n\rangle = \frac{1}{n!}\left\langle Q \;\middle|\; P_n^{(n)}\right\rangle = -\frac{1}{n!}\left\langle Q' \;\middle|\; P_n^{(n-1)}\right\rangle$$

et donc, par une récurrence immédiate,

$$\langle Q \mid L_n\rangle = (-1)^n \frac{1}{n!}\left\langle Q^{(n)} \;\middle|\; P_n\right\rangle .$$

Si Q est dans $\mathbf{R}_{n-1}[X]$, on a $Q^{(n)} = 0$ et il vient $\boxed{\langle Q \mid L_n\rangle = 0.}$

II.D -

II.D.1) On a $I_0 = 1$. Soit n dans $\mathbf{N}^*$. Par intégration par parties, il vient

$$I_n = -\frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(x-1)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

et donc, par une récurrence immédiate,

$$I_n = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)\cdots(2n)}\int_0^1 x^{2n}(x-1)^0\,\mathrm{d}x = (-1)^n (n!)\frac{n!}{(2n)!}\frac{1}{2n+1}$$

i.e., puisque cette formule est également vraie en 0, $\boxed{I_n = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.}$

II.D.2) D'après les calculs effectués en II.C, on a

$$\langle L_n \mid L_n\rangle = \frac{(-1)^n}{n!}\left\langle L_n^{(n)} \;\middle|\; P_n\right\rangle = \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left\langle P_n^{(2n)} \;\middle|\; P_n\right\rangle$$

et donc, puisque P_n est de degré $2n$ et de coefficient dominant 1, $P_n^{(2n)} = (2n)!P_0$ et il vient $\langle L_n \mid L_n\rangle = \frac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2} I_n$, soit $\boxed{\langle L_n \mid L_n\rangle = \frac{1}{2n+1}.}$

II.E -
Soit $n \in \mathbf{N}$. On pose $K_n = \sqrt{2n+1}L_n$. Puisque P_n est unitaire, $P_n^{(n)}$ a un coefficient dominant strictement positif. Comme $n! > 0$, il en va de même pour L_n et donc aussi de K_n puisque $\sqrt{2n+1} > 0$. Comme $P_n^{(n)}$ est de degré n, il en est de même pour L_n et K_n. Enfin comme $\langle L_n \mid L_n\rangle = \dfrac{1}{2n+1}$, on a $\langle K_n \mid K_n\rangle = 1$.
Soit maintenant m un entier distinct de n. On a donc soit $K_n \in \mathbf{R}_{m-1}[X]$, soit $K_m \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$ et il résulte donc de II.D.2) qu'on a $\langle K_n \mid K_m\rangle = 0$. Par conséquent

$\boxed{\text{$(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille de polynômes orthonormée, à coefficients dominants strictement positifs et échelonnée en degré. En particulier, pour N dans $\mathbf{N}$, $(K_n)_{0\le n\le N}$ est une base orthonormale de $\mathbf{R}_N[X]$.}}$

Soit N dans $\mathbf{N}$. Par définition $(K_n)_{0\le n\le N}$ est l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbf{R}_N[X]$ et ceci montre l'unicité de $(K_n)_{0\le n\le N}$ et, par suite, $\boxed{\text{l'unicité de } (K_n)_{n\in\mathbf{N}}}$.

II.F -
On a $K_0 = L_0 = P_0 = 1$. Puis $K_1 = \sqrt{3}L_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{1!}(X(X-1))' = \sqrt{3}(2X-1)$. Enfin

$$K_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}(X^2(X-1)^2)'' = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(2X^2 + 2(X-1)^2 + 8X(X-1)\right)$$

d'où $\boxed{K_0 = 1,\ K_1 = \sqrt{3}(2X-1) \text{ et } K_2 = \sqrt{5}(6X^2-6X+1).}$

PARTIE III

III.A -

III.A.1) Par définition, on a $\boxed{H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \text{ et } H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}}.$

On a donc $\det(H_2) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$ et $\det(H_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/12 & 1/12 \\ 0 & 1/12 & 4/45 \end{vmatrix}$, i.e. $\det(H_3) = \dfrac{1}{12}\dfrac{1}{180}$. D'où

$\boxed{\text{$H_2$ et H_3 sont inversibles.}}$

Un calcul direct donne $\boxed{H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \text{ et } H_3^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}}.$

III.A.2) Soit n dans $\mathbf{N}^*$. Pour i et j dans $[\![1,n]\!]$, avec $j \neq n$, on a

$$\frac{1}{i+j-1} - \frac{1}{i+n-1} = \frac{n-j}{n+i-1}\frac{1}{i+j-1}\ .$$

Par conséquent en retirant la dernière colonne de H_{n+1} aux autres, puis en mettant en facteur $(n+i-1)^{-1}$ dans la i-ème ligne et $n-j$ dans la j-ème colonne, Δ_{n+1} est égal au déterminant

de la matrice H_{n+1} dans laquelle la dernière colonne a été remplacée par des 1, multiplié par $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{n-j}{n+i-1}$, i.e. par $\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.
En retirant cette fois-ci la dernière ligne de la matrice ainsi obtenue à toutes les autres lignes on obtient encore une matrice dont les coefficients sont $\dfrac{n-j}{n+i-1}\dfrac{1}{i+j-1}$ si $j<n$ et $i<n$ et sont nuls si $j=n$ et $i<n$. En factorisant, il en résulte que Δ_{n+1} est égal au produit de $\dfrac{(n!)^4}{(2n+1)!(2n)!}$ par le déterminant de la matrice H_{n+1} dans laquelle la dernière ligne est une ligne de 1, et dans la dernière colonne ne se trouvent que des 0 (en dehors de la dernière ligne). En développant ce dernier déterminant par rapport à la dernière colonne, il vient $\boxed{\Delta_{n+1}=\dfrac{(n!)^4}{(2n+1)!(2n)!}\Delta_n.}$

III.A.3) Puisque $\Delta_1=1$, il vient directement $\boxed{\Delta_n=\dfrac{c_n^4}{c_{2n}}.}$

III.A.4) En particulier, puisque les quantités c_m sont produits d'entiers non nuls, $\boxed{H_n \text{ est inversible.}}$
La relation de récurrence III.A.2) s'écrit aussi

$$\det(H_{n+1}^{-1})=\binom{2n}{n}\binom{2n+1}{n}(n+1)\det(H_n^{-1})$$

et donc, puisque $\det(H_1^{-1})=1$, il vient $\det(H_n^{-1})=n!\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\binom{2k}{k}\binom{2k+1}{k}$ et donc, en tant que produit d'entiers, $\boxed{\det(H_n^{-1}) \text{ est entier.}}$

III.A.5) On remarque tout d'abord que H_n est symétrique réelle. On reprend alors les notations de I.B. Soit k dans $[\![1,n]\!]$. On a $H_n^{(k)}=H_k$ et donc $\det(H_n^{(k)})=\dfrac{c_k^4}{c_{2k}}>0$. D'après I.B., il en résulte que H_n est symétrique définie positive et donc, d'après I.A.2., que
$\boxed{H_n \text{ admet } n \text{ valeurs propres réelles strictement positives.}}$

III.B -

III.B.1) Puisque $\mathbf{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'espace préhilbertien réel $C^0([0,1],\mathbf{R})$, il possède un supplémentaire orthogonal et la projection orthogonale sur $\mathbf{R}_n[X]$ est bien définie. Le théorème de Pythagore assure que le projeté orthogonal de f sur $\mathbf{R}_n[X]$ est l'unique élément de $\mathbf{R}_n[X]$ à réaliser la distance de f à $\mathbf{R}_n[X]$. En particulier
$\boxed{\text{il existe un unique } \Pi_n \text{ dans } \mathbf{R}_n[X] \text{ tel que } \|\Pi_n-f\|=\min_{Q\in\mathbf{R}_n[X]}\|Q-f\|.}$

III.B.2) Pour n dans $\mathbf{N}$, puisque $\mathbf{R}_n[X]\subset\mathbf{R}_{n+1}[X]$, on a $\Pi_n\in\mathbf{R}_{n+1}[X]$ et donc, par définition de Π_{n+1}, $\|\Pi_{n+1}-f\|\leq\|\Pi_n-f\|$.
On dispose, grâce au théorème d'approximation de Weierstrass, d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes dans $\mathbf{R}[X]$ telle que $\left(\sup_{[0,1]}|f-P_n|\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0. D'après l'inégalité de la moyenne,

il en résulte que $(\|f-P_n\|)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0, puisque positive et majorée par une suite tendant vers 0. Il en résulte, par définition de Π_n, que la suite $\left(\left\|f-\Pi_{\deg(P_n)}\right\|\right)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

Or la suite $((\|f-\Pi_n\|)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et positive. Si elle ne convergeait par vers 0, elle serait minorée par une constante α strictement positive et ceci contredirait la propriété précédente. Il en résulte que $\boxed{((\|f-\Pi_n\|)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est décroissante et tend vers } 0.}$

III.B.3) Un calcul direct montre, pour i et j dans $\mathbf{N}$,

$$\left\langle X^i \;\middle|\; X^j\right\rangle = \int_0^1 t^{i+j}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{i+j+1}$$

et donc

$\boxed{H_n \text{ est la matrice du produit scalaire } \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle \text{ restreint à } \mathbf{R}_{n-1}[X], \text{ exprimé dans sa base canonique.}}$

III.B.4) Soit $\Pi_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ l'expression de Π_n dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$. Soit j dans $[\![0,n]\!]$.

On a, puisque $f-\Pi_n\in\mathbf{R}_n[X]^\perp$, $\langle f \mid X^j\rangle = \langle \Pi_n \mid X^j\rangle$ et donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{i+j-1} = \left\langle f \;\middle|\; X^j\right\rangle$, i.e.

$$H_{n+1}\begin{pmatrix} a_0\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\langle f\,|\,1\rangle\\ \vdots\\ \langle f\,|\,X^n\rangle\end{pmatrix}.$$ Il en résulte $\boxed{\Pi_n = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \text{ avec } \begin{pmatrix} a_0\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} = H_{n+1}^{-1}\begin{pmatrix}\langle f\,|\,1\rangle\\ \vdots\\ \langle f\,|\,X^n\rangle\end{pmatrix}}.$

III.B.5) On a $\langle f\,|\,1\rangle = [\arctan]_0^1 = \dfrac{\pi}{4}$, $\langle f\,|\,X\rangle = \dfrac{1}{2}[\ln(1+t^2)]_0^1 = \dfrac{\ln(2)}{2}$ et $\langle f \mid 1+X^2\rangle = 1$, d'où $\langle f \mid X^2\rangle = 1-\dfrac{\pi}{4}$. Enfin

$$\begin{pmatrix} 9 & -36 & 30\\ -36 & 192 & -180\\ 30 & -180 & 180\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\pi}{4}\\ \dfrac{\ln(2)}{2}\\ 1-\dfrac{\pi}{4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30-\dfrac{21}{4}\pi-18\ln(2)\\ -180+36\pi+96\ln(2)\\ 180-\dfrac{75}{2}\pi-90\ln(2)\end{pmatrix}$$

et donc

$$\boxed{\Pi_2(f) = 30-\frac{21}{4}\pi-18\ln(2)+(-180+36\pi+96\ln(2))\,X+\left(180-\frac{75}{2}\pi-90\ln(2)\right)X^2.}$$

PARTIE IV

IV.A -

IV.A.1) Il vient $\boxed{s_1=1,\ s_2=4 \text{ et } s_3=9}$ et on peut donc conjecturer $\boxed{s_n=n^2.}$

IV.A.2)

a) Puisque H_n est inversible, tout système linéaire représenté par H_n admet une unique solution : $\boxed{\text{il existe un unique tel } n\text{-uplet.}}$

b) On a donc $\begin{pmatrix} a_0^{(n)} \\ \vdots \\ a_{n-1}^{(n)} \end{pmatrix} = H_n^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} H_n^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = s_n \,,$$

i.e. $\boxed{s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)}.}$

IV.A.3) Par définition de S_n, pour j dans $[\![0, n-1]\!]$, on a $\left\langle S_n \;\middle|\; X^j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k-1}^{(n)}}{j+k-1} = 1$ et donc, par linéarité, $\boxed{\langle S_n \,|\, Q \rangle = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p.}$

IV.A.4) D'après IV.A.2.b) et la question précédente, $s_n = \langle S_n \,|\, S_n \rangle$. Puisqu'on a affaire à une base orthonormée, il vient $s_n = \sum_{p=0}^{n-1} \langle S_n \,|\, K_p \rangle^2$. Or la question précédente peut aussi s'écrire $\langle S_n \,|\, Q \rangle = Q(1)$ et il vient $\boxed{s_n = \sum_{p=0}^{n-1} K_p(1)^2.}$

IV.A.5) D'après l'étude faire en partie II, $K_p(1) = \sqrt{2p+1} L_p(1) = \sqrt{2p+1}$, puisque $L_p(1) = 1$ par définition : $\boxed{\text{pour } p \text{ dans } [\![0, n-1]\!],\ K_p(1) = \sqrt{2p+1}.}$

IV.A.6) On conclut $s_n = \sum_{p=0}^{n-1} (2p+1) = n + 2\frac{(n-1)n}{2}$, i.e. $\boxed{s_n = n^2.}$

IV.B -

IV.B.1) On a $\sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} = 2^{2p}$ et donc $\binom{2p}{p} = 2^{2p} - 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k}$ par symétrie du triangle de Pascal.

Puisque $2p > 0$, on en déduit que $\boxed{\binom{2p}{p} \text{ est pair.}}$

Soit n dans $\mathbf{N}^*$ et p dans $[\![1, n]\!]$. On a

$$\binom{n+p}{p}\binom{n}{p} = \frac{n!(n+p)!}{(p!)^2 n!(n-p)!} = \frac{(2p)!(n+p)!}{(p!)^2 (2p)!(n-p)!} = \binom{2p}{p}\binom{n+p}{2p}$$

et donc, en tant que produit d'un entier par un entier pair, $\boxed{\binom{n+p}{p}\binom{n}{p} \text{ est pair.}}$

IV.B.2) D'après la partie II, $K_n = \sqrt{2n+1}L_n$ et on a $L_n = \dfrac{1}{n!}(X^n(X-1)^n)^{(n)}$, d'où, par la formule du binôme de Newton et par linéarité de la dérivation,

$$L_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{1}{n!}\left(X^{n+k}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}X^k$$

et donc, d'après la question précédente,

$\boxed{K_n = \sqrt{2n+1}\Lambda_n, \text{ avec } \Lambda_n = L_n \text{ et } \Lambda_n \text{ est un polynôme à coefficients entiers.}}$

On a de plus que des coefficients pairs sauf le terme constant qui vaut $(-1)^n$:

$\boxed{\text{les coefficients pairs de } \Lambda_n \text{ sont les coefficients des termes non constants.}}$

IV.B.3)

a) Soit $(e_k)_{k=0}^{n-1}$ la base duale de la base canonique de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. Soit i dans $[\![0, n-1]\!]$. D'après III.B.4), $h_{i,i}^{(-1,n)}$ est le coefficient de degré $i-1$ du projeté de e_{i-1} sur $\mathbf{R}_{n-1}[X]$, donc de e_{i-1} puisque $e_{i-1} \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$. Puisque $(e_k)_{k=0}^{n-1}$ est la base duale de la base canonique, ce coefficient de degré $i-1$ est simplement le produit scalaire avec e_{i-1}, d'où $h_{i,i}^{(-1,n)} = \langle e_i \mid e_i \rangle$.

Par orthonormalité de $(K_p)_{0\leq p\leq n-1}$, on a $h_{i,i}^{(-1,n)} = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}\langle e_i \mid K_p\rangle^2 = \sum_{p=0}^{n-1}(2p+1)\langle e_i \mid L_p\rangle^2$ et

donc $\boxed{h_{i,i}^{(-1,n)} = \displaystyle\sum_{p=i-1}^{n-1}(2p+1)\binom{p}{i-1}^2\binom{p+i-1}{i-1}^2.}$

En particulier, $\boxed{h_{n,n}^{(-1,n)} = (2n+1)\dbinom{2n-2}{n-1}^2}$ et $h_{1,1}^{(-1,n)} = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}(2p+1)$ et $\boxed{h_{1,1}^{(-1,n)} = n^2.}$

b) D'après a), il vient $h_{i,j}^{(-1,n)} = \langle e_i \mid e_j\rangle = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}(2p+1)\langle L_p \mid e_i\rangle\langle L_p \mid e_j\rangle$, soit

$$\boxed{h_{i,j}^{(-1,n)} = \sum_{p=\min(i,j)}^{n-1}(-1)^{i+j}(2p+1)\binom{p}{i-1}\binom{p+i-1}{i-1}\binom{p}{j-1}\binom{p+j-1}{j-1}.}$$

Il résulte de IV.B.1) qu'on a affaire à une somme de termes entiers, et donc

$\boxed{\text{les coefficients de } H_n^{-1} \text{ sont entiers.}}$

c) Soit $(i,j) \in [\![2, n]\!]^2$. Dans la formule précédente $\min(i,j) \geq 2$ et donc d'après IV.B.1) $h_{i,j}^{(-1,n)}$ est une somme de produits de quatre termes : un signe, un nombre impair et deux nombres pairs, donc de multiples de 4. Il en résulte que $\boxed{h_{i,j}^{(-1,n)} \text{ est divisible par 4.}}$