Première composition
ECP MP 2012

Notations :

On note :

$C(\mathbf{R})$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$.

$C_b(\mathbf{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbf{R})$ constitué des fonctions bornées appartenant à $C(\mathbf{R})$ et, pour toute fonction f de $C_b(\mathbf{R})$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbf{R}} |f(t)|$.

$L^1(\mathbf{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbf{R})$ constitué des fonctions intégrables sur $\mathbf{R}$ et appartenant à $C(\mathbf{R})$ et, pour toute fonction f de $L^1(\mathbf{R})$, on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

$L^2(\mathbf{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbf{R})$ constitué des fonctions de carré intégrable sur $\mathbf{R}$ et appartenant à $C(\mathbf{R})$ et, pour toute fonction f de $L^2(\mathbf{R})$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}$.

On admet que ces expressions définissent des normes sur les espaces en question.

Soit f une fonction complexe d'une variable réelle. Par définition, le support de f est l'adhérence de l'ensemble $A_f = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) \neq 0\}$. On dit que f est à support compact si son support est un compact de $\mathbf{R}$; en d'autres termes, f est à support compact si et seulement s'il existe un réel $A \geq 0$ tel que f soit nulle en dehors de $[-A, A]$.

Par définition, une approximation de l'unité est une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, continues par morceaux et intégrables sur $\mathbf{R}$, vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbf{N}, \quad f_n \text{ est positive sur } \mathbf{R}\ ; \\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad \displaystyle\int_{\mathbf{R}} f_n = 1\ ; \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} f_n = 0\ . \end{cases}$$

PARTIE I - Produit de convolution

Soit f, g dans $C(\mathbf{R})$. Lorsque la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$, on pose

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbf{R}} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t\ .$$

La fonction $f \star g$ est appelée produit de convolution de f par g.

I.A - Généralités

I.A.1) Dans chacun des deux cas suivants, montrer que $f \star g$ est définie et bornée sur $\mathbf{R}$ et donner une majoration de $\|f \star g\|_\infty$ pouvant faire intervenir $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$.

a) $f \in L^1(\mathbf{R})$, $g \in C_b(\mathbf{R})$;

b) f, g dans $L^2(\mathbf{R})$.

I.A.2) Soit f, g dans $C(\mathbf{R})$ telles que $f \star g(x)$ soit défini pour tout réel x. Montrer $f \star g = g \star f$.

I.A.3) Montrer que si f et g sont à support compact, alors $f \star g$ est à support compact.

I.B - Produit de convolution de deux éléments de $L^2(\mathbf{R})$

Pour toute fonction h de $C(\mathbf{R})$ et tout réel α, on définit la fonction $T_\alpha(h)$ en posant $T_\alpha(h)(x) = h(x-\alpha)$ pour tout x réel.

Dans cette sous-partie I.B, on suppose que f et g appartiennent à $L^2(\mathbf{R})$.

I.B.1) Montrer qu'une fonction h est uniformément continue sur $\mathbf{R}$ si et seulement si $\lim\limits_{\alpha\to 0} \|T_\alpha(h) - h\|_\infty = 0$.

I.B.2) Pour tout réel α, montrer $T_\alpha(f \star g) = (T_\alpha(f)) \star g$.

I.B.3) Pour tout réel α, montrer $\|T_\alpha(f \star g) - f \star g\|_\infty \leq \|T_\alpha(f) - f\|_2 \times \|g\|_2$.

I.B.4) En déduire que $f \star g$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}$ dans le cas où f est à support compact.

I.B.5) Montrer que $f \star g$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}$ dans le cas général.

I.C - Continuité, dérivabilité

I.C.1) On suppose $f \in L^1(\mathbf{R})$ et $g \in C_b(\mathbf{R})$.

a) Montrer que $f \star g$ est continue.

b) Montrer que si g est uniformément continue sur $\mathbf{R}$, alors $f \star g$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

I.C.2) Soit k un entier naturel non nul. On suppose que g est de classe C^k sur $\mathbf{R}$ et que toutes ses fonctions dérivées, jusqu'à l'ordre k, sont bornées sur $\mathbf{R}$.

Montrer que $f \star g$ est de classe C^k sur $\mathbf{R}$ et préciser sa fonction dérivée d'ordre k.

I.D - Approximation de l'unité

Soit f dans $C_b(\mathbf{R})$ et soit (δ_n) une suite de fonctions approximation de l'unité.

I.D.1) Montrer que la suite $(f \star \delta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers f sur $\mathbf{R}$.

I.D.2) Montrer que si f est à support compact, alors la suite $(f \star \delta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbf{R}$.

I.D.3) Pour tout entier naturel n, on note h_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $h_n(t) = \dfrac{(1-t^2)^n}{\lambda_n}$ et nulle en dehors de $[-1, 1]$, le réel λ_n étant donné par la formule $\lambda_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une approximation de l'unité.

b) Montrer que si f est une fonction continue à support inclus dans $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, alors $f \star h_n$ est une fonction polynomiale sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ et nulle en dehors de l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$.

c) En déduire une démonstration du théorème de Weierstrass : toute fonction complexe continue sur un segment de $\mathbf{R}$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.

I.D.4) Existe-t-il une fonction g dans $C_b(\mathbf{R})$ telle que pour toute fonction f de $L^1(\mathbf{R})$, on ait $f \star g = f$?

PARTIE II - Transformée de Fourier

Pour toute fonction f dans $L^1(\mathbf{R})$, on appelle transformée de Fourier de f la fonction, notée $\hat{f}$, définie par

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \hat{f}(x) = \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-ixt} \,\mathrm{d}t \,.$$

II.A - Pour toute fonction f dans $L^1(\mathbf{R})$, montrer que $\hat{f}$ appartient à $C_b(\mathbf{R})$.

II.B - Transformée de Fourier d'un produit de convolution

Soit f, g dans $L^1(\mathbf{R})$.

II.B.1) On suppose que g est bornée. On admet que $f \star g$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ et qu'on a $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f \star g = \int_{\mathbf{R}} f \times \int_{\mathbf{R}} g$.

Montrer $\widehat{f \star g} = \hat{f} \times \hat{g}$.

II.B.2) Montrer qu'il existe deux fonctions f et g dans $L^1(\mathbf{R})$ telle que $f \star g(0)$ ne soit pas défini.

II.C - Sinus cardinal

On définit, pour tout entier naturel non nul n, la fonction k_n par

$$k_n(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{n} & \text{si } |x| \leq n \,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

II.C.1) Exprimer la transformée de Fourier $\widehat{k_n}$ à l'aide de la fonction définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^2 & \text{si } x \neq 0\,; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

II.C.2) Justifier que φ appartient à $L^1(\mathbf{R})$.

On admet $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \varphi = \pi$ et on pose $K_n = \dfrac{1}{2\pi}\widehat{k_n}$.

II.C.3) Montrer que la suite de fonctions $(K_n)_{n\geq 1}$ est une approximation de l'unité.

II.D - Inversion de Fourier

Soit f dans $L^1(\mathbf{R})$ telle que $\hat{f}$ appartienne à $L^1(\mathbf{R})$. On admet que, pour tout réel t et tout entier naturel non nul n, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} k_n(x)\hat{f}(-x)e^{-itx}\,\mathrm{d}x = (f \star K_n)(t)\ .$$

Montrer, pour tout réel t, $f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \hat{f}(x)e^{itx}\,\mathrm{d}x$.

PARTIE III - Convolution et codimension finie

Dans cette partie, on suppose que g appartient à $C_b(\mathbf{R})$. On s'intéresse à la codimension dans $L^1(\mathbf{R})$ du sous-espace vectoriel

$$N_g = \left\{ f \in L^1(\mathbf{R}) \mid f \star g = 0 \right\}\ .$$

On note V_g l'espace vectoriel engendré par les fonctions $T_\alpha(g)$:

$$V_g = \mathrm{Vect}\,(T_\alpha(g))_{\alpha\in\mathbf{R}}$$

où, comme au I.B, on note $T_\alpha(g)$ la fonction $x \mapsto g(x-\alpha)$.

III.A - À toute fonction g de $C(\mathbf{R})$, on associe la forme linéaire φ_g sur $L^1(\mathbf{R})$ définie par

$$\varphi_g(f) = \int_{\mathbf{R}} f(t)g(-t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Soit $(g_1, \ldots, g_p)$ une famille d'éléments de $C_b(\mathbf{R})$.

III.A.1) Montrer que la famille $(g_1, \ldots, g_p)$ est libre si et seulement si la famille $(\varphi_{g_1}, \ldots, \varphi_{g_p})$ est libre.

III.A.2) Soit E un espace vectoriel de dimension infinie et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille de formes linéaires sur E. On note

$$K = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Ker}(f_n)\ .$$

Montrer que la codimension de K dans E est égale au rang de la famille $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans l'espace dual E^* (on commencera par le cas où ce rang est fini).

III.A.3) Montrer que la codimension de N_g dans $L^1(\mathbf{R})$ est égale à la dimension de V_g.

III.A.4) a) Soit β dans $\mathbf{R}$ et g la fonction définie par $g(t) = e^{i\beta t}$ pour tout t réel. Déterminer la codimension de N_g dans $L^1(\mathbf{R})$.

b) Soit n un entier naturel. Montrer qu'il existe une fonction g de $C_b(\mathbf{R})$ telle que N_g soit de codimension n dans $L^1(\mathbf{R})$.

III.B - Hypothèse A

Soit g dans $C_b(\mathbf{R})$. On dit que g vérifie l'hypothèse A si g est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, bornée et dont les fonctions dérivées à tout ordre sont bornées sur $\mathbf{R}$.

III.B.1) Montrer que, si N_g est de codimension finie dans $L^1(\mathbf{R})$ et si g vérifie l'hypothèse A, alors g est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

On admettra que g est alors donnée, pour tout x réel, par $g(x) = \sum_{k=1}^{r} P_k(x)e^{z_k x}$ pour des nombres complexes deux à deux distincts $z_1, \ldots, z_k$ et des polynômes $P_1, \ldots, P_r$ de $\mathbf{C}[X]$.

III.B.2) En déduire l'ensemble des fonctions g vérifiant l'hypothèse A et telles que N_g soit de codimension finie dans $L^1(\mathbf{R})$.

III.C - Cas général

Soit g dans $C_b(\mathbf{R})$. On suppose que N_g est de codimension finie n dans $L^1(\mathbf{R})$.

III.C.1) Montrer qu'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et des fonctions $m_1, \ldots, m_n$ d'une variable réelle telles que, pour tout réel α,

$$T_\alpha(g) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(g) .$$

III.C.2) Soit F un sous-espace de dimension finie, notée p, de $C(\mathbf{R})$. Pour toute fonction f dans $C(\mathbf{R})$ et pour tout réel x, on note $e_x(f) = f(x)$.

a) Montrer qu'il existe des réels $a_1, \ldots, a_p$ tels que $(e_{a_1}, \ldots, e_{a_p})$ soit une base de l'espace dual F^*.

b) Si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une famille d'éléments de F, montrer que $\det(f_i(a_j))_{1\le i,j\le p}$ est non nul si et seulement si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base de F.

III.C.3) En appliquant la question III.C.2) à V_g, montrer que si g est de classe C^k alors les fonctions $m_1, \ldots, m_n$ sont de classe C^k.

III.C.4) Montrer que, pour tout entier naturel r non nul, $V_{h_r \star g}$ est de dimension finie (les fonctions h_r sont celles de la question I.D.3).

III.C.5) Montrer que pour r assez grand la dimension de $V_{h_r \star g}$ est égale à celle de V_g.

III.C.6) En déduire que les fonctions $m_1, \ldots, m_n$ sont de classe C^∞.

III.C.7) Déterminer l'ensemble des fonctions g dans $C_b(\mathbf{R})$ telles que N_g soit de codimension finie dans $L^1(\mathbf{R})$.

Première composition – ECP 2012 MP

PARTIE I - Produit de convolution

I.A - Généralités

I.A.1) a) Puisque f, g et les applications affines sont continus sur $\mathbf{R}$, il en va de même pour $t \mapsto f(t)g(x-t)$ pour tout réel x. Cette fonction est majorée, en module, par $\|g\|_\infty \times |f|$, qui est continu, positif et intégrable, et est donc intégrable, par comparaison.

D'après l'inégalité triangulaire et l'inégalité de la moyenne, on a

$$\left|\int_{\mathbf{R}} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_{\mathbf{R}} |f(t)g(x-t)|\,\mathrm{d}t \le \|g\|_\infty \int_{\mathbf{R}} |f(t)|\,\mathrm{d}t \le \|f\|_1 \times \|g\|_\infty$$

et il en résulte que $\boxed{f \star g \text{ est défini et borné sur } \mathbf{R} \text{ par } \|f\|_1 \times \|g\|_\infty.}$

b) Par changement de variable affine bijectif, pour tout x réel la fonction g_x définie par $t \mapsto g(x-t)$ est dans $L^2(\mathbf{R})$ et $\|g_x\|_2 = \|g\|_2$. Comme $L^2(\mathbf{R})$ muni de $\|\cdot\|_2$ est un espace préhilbertien, fg_x est dans L^1, i.e. $f\star g$ est bien défini et, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\|fg_x\|_1 = |\langle f \mid g_x\rangle| \le \|f\|_2 \times \|g_x\|_2$. Donc $\boxed{f \star g \text{ est défini et borné sur } \mathbf{R} \text{ par } \|f\|_2 \times \|g\|_2.}$

I.A.2) Par continuité de f et g, pour x réel, $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est continu sur $\mathbf{R}$. De plus $t \mapsto x-t$ est une fonction affine bijective, donc les fonctions $t \mapsto f(x-t)g(t)$ et $t \mapsto f(t)g(x-t)$ sont simultanément intégrables sur $\mathbf{R}$. Il en résulte que si $f\star g$ est défini, $g\star f$ aussi et, par changement de variable $t \mapsto x-t$ dans l'intégrale, il vient $\boxed{f \star g = g \star f.}$

I.A.3) Si f et g sont des fonctions continues à support compact, elles sont intégrables, et même de carré intégrable. D'après I.A.1.b), $f \star g$ est donc bien défini.

Soit x réel. L'intégrande dans la définition de $f \star g$ est nul en dehors du support de f et en dehors de l'image par la symétrie de centre $x/2$ du support de g. Or, pour x assez grand le support de f et l'image de celui de g par cette symétrie sont disjoints et donc l'intégrande est nul et, a fortiori, $f\star g(x)$ aussi : plus précisément si le support de f est inclus dans $[-A, A]$ et celui de g dans $[-B, B]$ pour A et B réels positifs, alors le symétrique évoqué précédemment est $[x-B, x+B]$ et donc pour $|x| > A+B$, $f \star g(x) = 0$. Il en résulte que $\boxed{f \star g \text{ est à support compact.}}$

I.B - Produit de convolution de deux éléments de $L^2(\mathbf{R})$

I.B.1) Pour h une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad |y-x| < \eta \Rightarrow |f(y)-f(x)| \le \varepsilon \\
\iff\ &\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^* \quad \sup_{(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ |x-y|<\eta} |f(y)-f(x)| \le \varepsilon \\
\iff\ &\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^* \quad \sup_{(x,\alpha)\in\mathbf{R}\times]-\eta;\eta[} |f(x-\alpha)-f(x)| \le \varepsilon \\
\iff\ &\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^* \quad \sup_{(x,\alpha)\in\mathbf{R}\times]-\eta;\eta[} |T_\alpha(f)(x)-f(x)| \le \varepsilon
\end{aligned}$$

Or, pour une quantité dépendant de deux variables, on a $\sup\limits_I \sup\limits_J = \sup\limits_{I\times J} = \sup\limits_J \sup\limits_I$ et donc

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad |y-x| < \eta \Rightarrow |f(y)-f(x)| \le \varepsilon \\
\iff\ &\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^* \quad \sup_{\alpha\in]-\eta;\eta[}\ \sup_{x\in\mathbf{R}} |T_\alpha(f)(x)-f(x)| \le \varepsilon \\
\iff\ &\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^* \quad \sup_{\alpha\in]-\eta;\eta[} \|T_\alpha(f)-f\|_\infty \le \varepsilon \\
\iff\ &\lim_{\alpha\to 0} \|T_\alpha(f)-f\|_\infty = 0
\end{aligned}$$

i.e. $\boxed{h \text{ est uniformément continue sur } \mathbf{R} \text{ si et seulement si } \lim_{\alpha\to 0} \|T_\alpha(h)-h\|_\infty = 0.}$

I.B.2) Soit x et α des réels. Par changement de variable affine bijectif, $T_\alpha(f)$ appartient à $L^2(\mathbf{R})$ puisque c'est le cas pour f. Donc, d'après I.A.1.b) $g \star T_\alpha(f)$ et $T_\alpha(f) \star g(x)$ sont définis. En utilisant I.A.2 il vient

$$f \star g(x-\alpha) = g \star f(x-\alpha) = g \star T_\alpha(f)(x) = T_\alpha(f) \star g(x)$$

et donc $\boxed{T_\alpha(f \star g) = (T_\alpha(f)) \star g.}$

Remarque : techniquement, il y a une erreur d'énoncé car T_α n'est défini que pour les fonctions continues et on ne sait pas encore que $f \star g$ l'est puisque c'est l'objet de I.C..1.

I.B.3) Soit α un réel. Par changement de variable affine bijectif, $T_\alpha(f)$ appartient à $L^2(\mathbf{R})$ puisque c'est le cas pour f, et donc puisqu'on a affaire à un espace vectoriel, $T_\alpha(f) - f \in L^2(\mathbf{R})$.

Par linéarité de l'intégrale et en utilisant le résultat précédent $T_\alpha(f \star g) - f \star g = T_\alpha(f) \star g - f \star g = (T_\alpha(f) - f) \star g$ et donc, par I.A.1.b) $\boxed{\|T_\alpha(f \star g) - f \star g\|_\infty \leq \|T_\alpha(f) - f\|_2 \times \|g\|_2.}$

I.B.4) On suppose f à support compact, de sorte qu'on dispose de A tel que f soit nulle en dehors de $[-A; A]$. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R} \times]-1; 1[$ par $g(x, \alpha) = (f(x-\alpha) - f(x))^2$. Alors g est une fonction continue en les deux variables par continuité de f et des fonctions affines. De plus $|g|$ est majoré par la fonction continue par morceaux valant $4\|f\|_\infty^2$ sur $[-A-1; A+1]$ et nulle ailleurs. Comme cette fonction est intégrable sur $\mathbf{R}$, il résulte du théorème de continuité sous le signe somme qu'on a $\lim_{\alpha \to 0} \|T_\alpha(f) - f\|_2^2 = 0$. Par continuité de la racine carré, il vient $\lim_{\alpha \to 0} \|T_\alpha(f) - f\|_2 = 0$ et, d'après la question précédente, on en déduit $\lim_{\alpha \to 0} \|T_\alpha(f \star g) - f \star g\|_\infty = 0$ et donc, d'après I.B.1, $\boxed{f \star g \text{ est uniformément continue sur } \mathbf{R}.}$

Remarque : une autre méthode consiste à montrer que f est uniformément continue (ce qui n'est pas une conséquence immédiate du théorème de HEINE), puis d'utiliser l'inégalité de la moyenne pour déduire de I.B.1 qu'on a $\lim_{\alpha \to 0} \|T_\alpha(f) - f\|_2 = 0$.

Soit donc A un réel strictement positif tel que le support de f soit inclus dans $[-A, A]$. D'après le théorème de HEINE, f est uniformément continue sur $[-A-1; A+1]$. Soit alors ε dans $\mathbf{R}_+^*$. On dispose de η dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que, pour tous x et y dans $[-A-1; A+1]$ avec $|x-y| \leq \eta$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Soit alors x et y dans $\mathbf{R}$ avec $|x-y| \leq \min(1, \eta)$. Si x et y appartiennent à $[-A-1; A+1]$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Sinon on a $|x| \geq A$ et $|y| \geq A$ puisque l'un des deux est de valeur absolue supérieure à $A+1$ et que leur distance est inférieure à 1. Il en résulte alors $f(x) = f(y) = 0$ et donc aussi $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. On en déduit que f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

Soit alors α un réel, T_α est à support dans $[-A+\alpha; A+\alpha]$ et donc $T_\alpha(f) - f$ est à support dans $[-A-|\alpha|\,; A+|\alpha|]$. Par inégalité de la moyenne, on en déduit

$$0 \leq \|T_\alpha(f) - f\|_2 = \sqrt{\int_{-A-|\alpha|}^{A+|\alpha|} |T_\alpha(f)(t) - f(t)|^2 \,\mathrm{d}t} \leq \sqrt{2(A+|\alpha|)}\, \|T_\alpha(f) - f\|_\infty$$

et donc, puisque pour α tendant vers 0 on a $\sqrt{2(A+|\alpha|)} = O(1)$ et $\|T_\alpha(f) - f\|_\infty = o(1)$, on a $\|T_\alpha(f) - f\|_2 = o(1)$ et on conclut comme précédemment.

I.B.5) Pour n dans $\mathbf{N}^*$, soit φ_n la fonction affine par morceaux donnée par $\varphi_n(x) = 1$ si $|x| \leq n$ et $\varphi_n(x) = 0$ si $|x| > n+1$. Alors la suite de fonction $(f^2(\varphi_n - 1)^2)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite de fonctions continues sur $\mathbf{R}$, de limite simple nulle également continue sur $\mathbf{R}$ et dominées par f^2 qui est continue, positive et intégrable sur $\mathbf{R}$ puisque f appartient à $L^2(\mathbf{R})$, donc, d'après le théorème de convergence dominée, $\lim \|f\varphi_n - f\|_2^2 = 0$ et donc, par continuité de la racine carrée, $\lim \|f\varphi_n - f\|_2 = 0$.

Il vient alors, pour α réel et n dans $\mathbf{N}^*$, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
\|T_\alpha(f) - f\|_2 &\leq \|T_\alpha(f) - T_\alpha(f\varphi_n)\|_2 + \|T_\alpha(f\varphi_n) - f\varphi_n\|_2 + \|f\varphi_n - f\|_2 \\
&\leq \|T_\alpha(f - f\varphi_n)\|_2 + \|T_\alpha(f\varphi_n) - f\varphi_n\|_2 + \|f\varphi_n - f\|_2 \\
&\leq \|T_\alpha(f\varphi_n) - f\varphi_n\|_2 + 2\|f\varphi_n - f\|_2
\end{aligned}$$

puisque, par changement de variable affine bijectif, pour h dans $L^2(\mathbf{R})$, $\|T_\alpha(h)\|_2 = \|h\|_2$.

Soit ε dans $\mathbf{R}_+$. On dispose de n tel que $\|f\varphi_n - f\|_2 \leq \varepsilon$ puisque $\lim \|f\varphi_n - f\|_2 = 0$. Pour un tel n on dispose de α_0 dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que, pour α réel vérifiant $|\alpha| < \alpha_0$, on ait $\|T_\alpha(f\varphi_n) - f\varphi_n\|_2$ d'après la question précédente. Il vient alors $\|T_\alpha(f) - f\|_2 \leq 3\varepsilon$ et donc $\lim_{\alpha\to 0} \|T_\alpha(f) - f\|_2 = 0$. D'après I.B.3 on en déduit $\lim_{\alpha\to 0} \|T_\alpha(f\star g) - f\star g\|_\infty = 0$ et donc, par I.B.1,

$\boxed{f\star g \text{ est uniformément continue sur } \mathbf{R}.}$

I.C - Continuité, dérivabilité

I.C.1) a) Par continuité de f et g, ainsi que des fonctions affines, la quantité $f(t)g(x-t)$ est une fonction continue de t comme de x sur $\mathbf{R}$. Pour x et t réels on a $|f(t)g(x-t)| \leq \|g\|_\infty |f(t)|$, avec $|f|$ continu, positif et intégrable sur $\mathbf{R}$. D'après le théorème de continuité sous le signe intégral, on en déduit que $\boxed{f\star g \text{ est continue.}}$

b) On reprend les notations de I.B.1) dont le résultat est valable pour toute fonction de $\mathbf{R}$ dans lui-même. Soit α un réel. Puisque g est continue et bornée, il en est de même pour $T_\alpha(g)$ et $g - T_\alpha(g)$. Il en résulte que $f\star g$, $f\star T_\alpha(g)$ et $f\star(g - T_\alpha(g))$ sont bien définis, d'après I.A.1.a), et par linéarité de l'intégrale on a $f\star T_\alpha(g) - f\star g = f\star(T_\alpha(g) - g)$.

De plus par définition, et puisque les quantités sont définies, $T_\alpha(f\star g) = f\star T_\alpha(g)$. Il résulte alors de I.A.1.a) qu'on a $\|T_\alpha(f\star g) - f\star g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|T_\alpha(g) - g\|_\infty$ et donc, grâce à I.B.1, l'uniforme continuité de g entraîne $\lim\limits_{\alpha\to 0} \|T_\alpha(g) - g\|_\infty = 0$, et donc par encadrement, $\lim\limits_{\alpha\to 0} \|T_\alpha(f\star g) - f\star g\|_\infty = 0$, puis grâce à I.B.1 encore,

$\boxed{f\star g \text{ est uniformément continue sur } \mathbf{R}.}$

I.C.2) Soit h l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $h(x,t) = f(t)g(x-t)$. Puisque f est continue, que les applications affines sont de classe C^∞ et que g est de classe C^k, h est k-fois dérivable par rapport à x. De plus h et toutes ses dérivées par rapport à x sont continues en t, et on a, pour $0 \leq p \leq k$ et $(x,t) \in \mathbf{R}^2$,

$$\frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t) = f(t)g^{(p)}(x-t) \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)\right| \leq \left\|g^{(p)}\right\|_\infty |f(t)| \ .$$

Comme $|f|$ est continu, positif et intégrable sur $\mathbf{R}$, il résulte de la règle de Leibniz de dérivation sous le signe intégral que $\boxed{f\star g \text{ est de classe } C^k \text{ sur } \mathbf{R} \text{ et } (f\star g)^{(k)} = f\star g^{(k)}.}$

I.D - Approximation de l'unité

Cette partie est entièrement du cours au moins quant à I.D.1 et I.D.3. Il est donc totalement impardonnable de ne pas traiter ces questions.

I.D.1) Soit n dans $\mathbf{N}$. Puisque f appartient à $C_b(\mathbf{R})$ et δ_n à $L^1(\mathbf{R})$, d'après I.A.1.a), $f\star\delta_n$ est bien défini et d'après I.A.2 on a $f\star\delta_n = \delta_n\star f$. Puisque $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \delta_n = 1$, il vient par linéarité de l'intégrale

$$\forall x\in\mathbf{R}\,,\quad f\star\delta_n(x) - f(x) = \int_{\mathbf{R}} \delta_n(t)(T_t(f) - f)(x)\,\mathrm{d}t$$

et donc, par la relation de Chasles et grâce à l'inégalité de la moyenne, il vient pour x réel et ε strictement positif

$$|f\star\delta_n(x) - f(x)| \leq 2\|f\|_\infty \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \delta_n(t)\,\mathrm{d}t + \sup_{-\varepsilon\leq t\leq\varepsilon} |(T_t(f) - f)(x)| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_n(t)\,\mathrm{d}t + 2\|f\|_\infty \int_{\varepsilon}^{\infty} \delta_n(t)\,\mathrm{d}t$$

par positivité de δ_n. Soit α un réel strictement positif. Par continuité de f en x on dispose de ε dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que $\sup\limits_{-\varepsilon\leq t\leq\varepsilon} |(T_t(f)-f)(x)| \leq \alpha$ et pour un tel ε on dispose de n_0 dans $\mathbf{N}$ tel que

$$0 \leq \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \delta_n(t)\,\mathrm{d}t \leq \alpha \quad \text{et} \quad 0 \leq \int_{\varepsilon}^{\infty} \delta_n(t)\,\mathrm{d}t \leq \alpha$$

pour $n \geq n_0$. Il vient alors, puisque δ_n est positive d'intégrale 1

$$|f \star \delta_n(x) - f(x)| \leq (4\,\|f\|_\infty + 1)\,\alpha$$

et donc $\boxed{(f\star\delta_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } \mathbf{R}.}$

I.D.2) On reprend les notations précédentes et on se donne un réel positif A tel que f soit nulle en dehors de $[-A, A]$. Soit α un réel strictement positif. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[-A-2, A+2]$ et donc on dispose de ε dans $]0,1]$ tel que, pour tout x dans $[-A-1, A+1]$ et tout t dans $[-\varepsilon, \varepsilon]$, $|(T_t(f)-f)(x)| \leq \alpha$. Puisque $0 < \varepsilon \leq 1$, pour t dans $[-\varepsilon, \varepsilon]$, $T_t(f) - f$ est nulle en dehors de $[-A-1, A+1]$ et donc $T_t(f)-f$ est bornée et $\sup\limits_{-\varepsilon\leq t\leq\varepsilon} \|T_t(f)-f\|_\infty \leq \alpha$. Le calcul précédent donne ainsi, pour tout x réel,

$$|f\star\delta_n(x) - f(x)| \leq 2\,\|f\|_\infty \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \delta_n(t)\,\mathrm{d}t + \alpha \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_n(t)\,\mathrm{d}t + 2\,\|f\|_\infty \int_{\varepsilon}^{\infty} \delta_n(t)\,\mathrm{d}t$$

et, comme précédemment, il en résulte $\lim \|f\star\delta_n - f\|_\infty = 0$, i.e.
$\boxed{(f\star\delta_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } \mathbf{R}.}$

I.D.3) a) L'application définie par $h(t) = 1-t^2$, si $|t| \leq 1$, et $h(t) = 0$, sinon, est polynomiale par morceaux sur $\mathbf{R}$, donc continue par morceaux, continue sur $[-1,1]$, à support compact, non identiquement nulle et positive. Pour n dans $\mathbf{N}$, il en va donc de même pour h^n, et donc λ_n est un réel strictement positif, et de h_n puisque $h_n = \dfrac{1}{\lambda_n} h^n$ et cette dernière fonction est donc intégrable sur $\mathbf{R}$ et d'intégrale 1 par définition de λ_n.
Soit ε un réel strictement positif. Si $\varepsilon \geq 1$, on a

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} h_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon}^{\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t = 0\ .$$

On suppose maintenant $\varepsilon < 1$. On a, par parité et puisque $0 \leq x^2 \leq x$ sur $[0,1]$,

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \geq 2\int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n+1}\ .$$

Par monotonie et parité, on a donc, si $0 < \varepsilon < |x| \leq 1$,

$$0 \leq h_n(x) \leq h_n(\varepsilon) \leq \frac{n+1}{2}(1-\varepsilon^2)^n$$

et donc, par inégalité de la moyenne,

$$0 \leq \int_{-\infty}^{-\varepsilon} h_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{-\varepsilon} h_n(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{n+1}{2}(1-\varepsilon^2)^n \quad \text{et} \quad 0 \leq \int_{\varepsilon}^{\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{n+1}{2}(1-\varepsilon^2)^n\ .$$

Par encadrement et croissances comparées, on en déduit, puisque $0 \leq 1-\varepsilon^2 < 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} h_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} h_n = 0$$

et que $\boxed{(h_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est une approximation de l'unité.}}$

b) Puisque h_n est continue à support compact, elle appartient à $C_b\mathbf{R})$ et donc, d'après I.C.1, $f \star h_n$ est définie et continue. Elle est aussi à support compact d'après I.A.3. Plus précisément l'intégrande définissant $f \star h_n$ est nul si $|t| > 1/2$ ou $|x - t| > 1$. Or, pour t et x réels avec $|x| > 3/2$, on a $\dfrac{3}{2} < |x| \leq |t| + |x - t|$ et donc $|t| > 1/2$ ou $|x - t| > 1$. Il en résulte que $f \star h_n$ est à support dans $\left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$.

Enfin si $|t| \leq 1/2$ et $|x| \leq 1/2$, alors $|x - t| \leq 1$ et donc, pour $|x| \leq 1/2$ on a

$$f \star h_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)h_n(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda_n}\int_{-1/2}^{1/2} f(t)(1-(x-t)^2)^n\,\mathrm{d}t\ .$$

Par linéarité de l'intégrale cette dernière expression est polynomiale en x puisque l'intégrande l'est. Finalement

$\boxed{f \star h_n \text{ est une fonction polynomiale sur } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ et nulle en dehors de l'intervalle } \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right].}$

c) Soit g une fonction complexe continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbf{R}$. On pose

$$f(t) = \begin{cases} g\left(\dfrac{a+b}{2} + 2t(b-a)\right) & \text{si } |t| \leq \dfrac{1}{4} \\ -(4t+1)g(a) & \text{si } -\dfrac{1}{2} < t < -\dfrac{1}{4} \\ (4t-1)g(b) & \text{si } \dfrac{1}{4} < t < \dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors f est continue à support dans $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. Il en résulte, d'après I.D.2, I.D.3.a) et I.D.3.b) que $f \star h_n$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$ vers f et donc a fortiori sur $\left[-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right]$ et qu'elle y est polynomiale. Par conséquent $t \mapsto f \star h_n\left(-\dfrac{1}{4} + \dfrac{t-a}{2(b-a)}\right)$ est polynomiale sur $[a, b]$ et y converge uniformément vers g. On en déduit le $\boxed{\text{théorème de Weierstrass.}}$

I.D.4) Soit g dans $C_b(\mathbf{R})$ tel que, pour tout n dans $\mathbf{N}$, $h_n \star g = h_n$. Alors, d'après I.D.1 $g \star h_n$ converge simplement vers g et donc, en particulier, $h_n(0)$ tend vers $g(0)$. Or $h_n(0) = \lambda_n^{-1}$ et, par convergence dominée, puisque les fonctions $t \mapsto (1 - t^2)^n$ sont continues sur $[-1, 1]$, de limite simple nulle sauf en 0 et dominée par 1, $\lim \lambda_n = 0$, et ceci est une contradiction. Donc, a fortiori,

$\boxed{\text{il n'existe pas de fonction } g \text{ dans } C_b(\mathbf{R}) \text{ telle que pour toute fonction } f \text{ de } L^1(\mathbf{R}), \text{ on ait } f \star g = f.}$

Remarque : il est plus profond de raisonner ainsi. Si g existe alors pour toute fonction dans $L^1(\mathbf{R})$, d'après I.A.1.a et $f \star g = f$, on a $\|f\|_\infty \leq \|f\|_1 \times \|g\|_\infty$, i.e. la norme $\|\cdot\|_\infty$ est dominée par la norme $\|\cdot\|_1$ et ceci est faux, ne serait-ce que parce qu'il existe des fonctions non bornées mais intégrables. Un autre exemple est donné par la suite de fonctions affines par morceaux (f_n) avec f_n nulle pour $|x| \geq 2^{-n}$ et telle que $f_n(0) = 4^n$.

PARTIE II - Transformée de Fourier

II.A - Soit h la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par $h(x, t) = f(t)e^{ixt}$. Alors, par continuité de f, de l'exponentielle et des applications linéaires, h est une fonction continue en x et en t. De plus on a, pour (x, t) dans $\mathbf{R}^2$, $|h(x, t)| \leq |f(t)|$ et $|f|$ est continu, positif et intégrable sur $\mathbf{R}$. Il résulte du théorème de continuité sous le signe intégral que $\hat{f}$ est bien défini, continu et vérifie, pour x réel, $|\hat{f}(x)| \leq \|f\|_1$ d'après l'inégalité triangulaire. Donc $\boxed{\hat{f} \text{ appartient à } C_b(\mathbf{R}).}$

II.B - Transformée de Fourier d'un produit de convolution

II.B.1) Soit x un réel. On pose, pour t réel, $f_x(t) = f(t)e^{-ixt}$ et $g_x(t) = g(t)e^{-ixt}$. Par continuité de l'exponentielle et des applications linéaires, puisque f et g le sont, f_x et g_x sont continues et intégrables et de plus g_x est bornée. Il en résulte que $f_x \star g_x$ est défini, d'après I.A.1.a, et qu'on a, pour u réel, $f_x \star g_x(u) = f \star g(u)e^{-ixu}$, d'où, d'après la propriété admise,

$$\widehat{f \star g}(x) = \int_{\mathbf{R}} f_x \star g_x = \int_{\mathbf{R}} f_x \times \int_{\mathbf{R}} g_x \ .$$

Et il vient $\boxed{\widehat{f \star g} = \hat{f} \times \hat{g}.}$

Remarque : la propriété admise résulte du théorème de Fubini mais n'est pas évidente pour autant. On considère la fonction h donnée par $h(t,u) = f_x(u)g_x(t-u)$. C'est une fonction continue en t et u sur $\mathbf{R}$ et, à u réel fixé, $t \mapsto |h(t,u)|$ appartient à $L^1(\mathbf{R})$ puisque g y appartient (et par continuité de la valeur absolue et changement de variable affine bijectif). De plus on a alors $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} |h(t,u)| \, \mathrm{d}t = \|g\|_1 \, |f(u)|$, par changement de variable affine bijectif. Comme f appartient à $L^1(\mathbf{R})$, il en résulte que h est intégrable sur $\mathbf{R}^2$. De plus, à u réel fixé, $t \mapsto h(t,u)$ est continu et intégrable sur $\mathbf{R}$ et enfin l'application $u \mapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}} h(t,u) \, \mathrm{d}t$ est égale à $u \mapsto \hat{g}(x)f_x(u)$ et est donc continue et intégrable sur $\mathbf{R}$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini et obtenir $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} h = \int_{\mathbf{R}} \hat{g}(x)f_x(u) \, \mathrm{d}u = \hat{f}(x)\hat{g}(x)$.

Par ailleurs, à t fixé, $u \mapsto h(t,u)$ est continu et intégrable sur $\mathbf{R}$ d'après I.A.1.a. Comme l'application $t \mapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}} h(t,u) \, \mathrm{d}u$ est égale à $t \mapsto f \star g(t)e^{-ixt}$ et que cette application est continue d'après I.C.1.a, il reste à obtenir son intégrabilité, i.e. celle de $f \star g$, pour conclure grâce à la seconde partie du théorème de Fubini qu'on a $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} h = \int_{\mathbf{R}} f \star g(t)e^{-ixt} \, \mathrm{d}t$ et donc $\widehat{f \star g} = \hat{f} \times \hat{g}$.

Or on peut appliquer ce qui précède à $|f|$ et $|g|$. Il vient que $|f| \star |g|$ est défini, continu et l'inégalité de la moyenne donne $|f \star g| \leq |f| \star |g|$. Soit alors A un réel positif. Le théorème de Fubini sur $\mathbf{R} \times [-A, A]$ permet d'écrire, puisqu'une fonction continue sur $[-A, A]$ y est intégrable,

$$\int_{-A}^{A} |f \star g|(x) \, \mathrm{d}x \leq \iint_{\mathbf{R} \times [-A,A]} |f(t)| \times |g(x-t)| \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x$$

et cette dernière intégrale est égale à $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} |f(t)| \int_{-A-t}^{A-t} |g(x)| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$, ce qui est majoré, par positivité de l'intégrale, par $\|f\|_1 \times \|g\|_1$. Par conséquent $f \star g$ est intégrable.

II.B.2) Pour f dans $L^1(\mathbf{R})$ et g donnée par $g(t) = f(-t)$, $f \star g(0)$ est défini si et seulement f est de carré intégrable. Soit alors f affine par morceaux dont le graphe est la réunion de triangles isocèles dont la base est un segment centré en un entier naturel non nul n, de longueur $\dfrac{1}{n^4}$ et de hauteur $\dfrac{1}{2}n^2$.

Comme f est positive, son intégrabilité résulte de l'existence de la somme de la série dont le terme général est $\displaystyle\int_{n-1/2}^{n+1/2} f$, i.e. $\sum \dfrac{1}{4n^2}$. Pour la même raison, f n'est pas de carré intégrable puisque l'aire sous les arcs de paraboles correspondants aux triangles est donnée par $2\left(\dfrac{n^2}{n^{-4}}\right)^2 \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2n^4}\right)^3$ puisqu'on intègre le carré d'une fonction affine de pente $\dfrac{n^2}{n^{-4}}$ sur un intervalle de longueur $\dfrac{1}{2n^4}$ et depuis un point où elle s'annule, i.e. $\dfrac{1}{12}$, ce qui est le terme général d'une série grossièrement divergente. Par conséquent $\boxed{f \star g(0) \text{ n'est pas défini.}}$

II.C - Sinus cardinal

II.C.1) La fonction k_n est polynomiale par morceaux et est continue en $\pm n$, elle est donc continue à support compact, donc dans $L^1(\mathbf{R})$. Comme elle est paire et que sin est impaire, la partie imaginaire de $\widehat{k_n}$ est nulle et on a, pour tout x réel, par parité de cos

$$\widehat{k_n}(x) = 2\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)\cos(xt)\,\mathrm{d}t = 2n\int_0^1 (1-t)\cos(nxt)\,\mathrm{d}t$$

par changement de variable linéaire bijectif. Pour x dans $\mathbf{R}^*$ il vient par intégration par parties, toutes les fonctions considérées étant de classe C^∞,

$$\widehat{k_n}(x) = 2\int_0^1 \frac{\sin(nxt)}{x}\,\mathrm{d}t = 2\frac{1-\cos(nx)}{nx^2} = n\varphi\left(\frac{nx}{2}\right)$$

et cette expression est encore valide pour $x = 0$ par continuité de $\widehat{k_n}$, d'après I.C.1.a, ou par un calcul direct. Donc, pour x réel, $\boxed{\widehat{k_n}(x) = n\varphi\left(\frac{nx}{2}\right).}$

II.C.2) Puisque $\sin(x) \sim x$ en 0, φ est continu en 0 et donc sur $\mathbf{R}$ comme quotient partout défini de fonctions continues sur $\mathbf{R}^*$. Comme, en $\pm\infty$, $\varphi(x) = O(x^{-2})$, il résulte par comparaison avec une fonction positive et intégrable sur $\mathbf{R}$, en tant qu'intégrale de Riemann, que $\boxed{\varphi \text{ appartient à } L^1(\mathbf{R}).}$

II.C.3) Puisque φ est positive et dans $L^1(\mathbf{R})$, il en va de même pour K_n d'après II.C.1, II.C.2 et par changement de variable linéaire bijectif et on a

$$\int_{\mathbf{R}} K_n = \frac{n}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \varphi\left(\frac{nx}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1\ .$$

De II.C.1 on déduit la parité de K_n et par le même changement de variable, pour ε dans $\mathbf{R}_+^*$, on a

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} K_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon}^{+\infty} K_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{n\varepsilon/2}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

et cette quantité tend vers 0 quand n tend vers l'infini puisque φ est intégrable. Donc $\boxed{(K_n)_{n\geq 1} \text{ est une approximation de l'unité.}}$

II.D - Inversion de Fourier

D'après I.D.1 $f \star K_n$ converge simplement vers f. Autrement dit, par changement de variable linéaire bijectif et parité de k_n :

$$\forall t \in \mathbf{R}\,, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} k_n(x)\hat{f}(x)e^{itx}\,\mathrm{d}x = f(t)\ .$$

Soit n dans $\mathbf{N}^*$ et t dans $\mathbf{R}$. La fonction donnée par $h_n(x) = k_n(x)\hat{f}(x)e^{itx}$ est continue sur $\mathbf{R}$ d'après II.C, II.A et puisque l'exponentielle et les applications linéaires le sont. De plus h_n converge simplement vers la fonction $x \mapsto \hat{f}(x)e^{itx}$, également continue pour les mêmes raisons. Comme $|h_n| \leq |\hat{f}|$ et que $|\hat{f}|$ est continue, d'après II.A, positive et intégrable, par hypothèse sur f, le théorème de convergence dominée permet de conclure

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbf{R}} k_n(x)\hat{f}(x)e^{itx}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(x)e^{itx}\,\mathrm{d}x$$

et par unicité de la limite il vient, pour tout réel t, $\boxed{f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \hat{f}(x)e^{itx}\,\mathrm{d}x.}$

Remarque : la propriété admise résulte encore du théorème de Fubini. On considère la fonction donnée par $h(x,y) = k_n(x)f(y)e^{ix(y-t)}$ qui est continue en les deux variables et vérifie $|h(x,y)| \leq k_n(x)|f(y)|$. Il en résulte que h est intégrable sur $\mathbf{R}^2$. De plus pour x et y réels, on a $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} h(x,y)\,\mathrm{d}y = k_n(x)\hat{f}(-x)e^{-itx}$, ce qui est une fonction continue et intégrable sur $\mathbf{R}$ d'après II.C et II.A et puisque k_n est bornée et $\hat{f}$ est intégrable, et $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} h(x,y)\,\mathrm{d}x = 2\pi f(y)K_n(t-y)$, ce qui est aussi une fonction continue et intégrable sur $\mathbf{R}$ d'après II.C.1 et II.A puisque f est intégrable et K_n est bornée. Le théorème de Fubini donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} k_n(x)\hat{f}(-x)e^{-itx}\,\mathrm{d}x = f \star K_n(t)\ .$$

PARTIE III - Convolution et codimension finie

III.A -

III.A.1) On remarque tout d'abord que, d'après I.A.1.a, pour tout f dans $L^1(\mathbf{R})$, $\varphi_g(f)$ est bien défini puisque $t \mapsto g(-t)$ est continu et borné par hypothèse sur g et continuité des applications linéaires. Par conséquent φ_g est une forme linéaire sur $L^1(\mathbf{R})$ par linéarité de l'intégrale et, toujours par linéarité de l'intégrale, $g \mapsto \varphi_g$ est une application linéaire de $C_b(\mathbf{R})$ dans $(L^1(\mathbf{R}))^*$. En particulier si $(g_1,\dots,g_p)$ est liée, il en va de même pour $(\varphi_{g_1},\dots,\varphi_{g_p})$.

Soit g dans le noyau de $g \mapsto \varphi_g$. On dispose, d'après I.D.3.a et/ou II.C.3, d'une approximation (δ_n) de l'unité et, d'après I.D.1, $g \star \delta_n$ converge simplement vers g. Or, pour x dans $\mathbf{R}$,

$$g \star \delta_n(x) = T_{-x}(g \star \delta_n)(0) = g \star (T_{-x}(\delta_n))(0) = T_{-x}(\delta_n) \star g(0) = \varphi_g(T_{-x}(\delta_n)) = 0$$

puisque g est dans $C_b(\mathbf{R})$ et δ_n et $T_{-x}(\delta_n)$ sont dans $L^1(\mathbf{R})$ et d'après I.A.1.a et I.A.2. Par unicité de la limite on en déduit $g = 0$ et donc $g \mapsto \varphi_g$ est injective. Il en résulte que

$\boxed{(g_1,\dots,g_p) \text{ est libre si et seulement si } (\varphi_{g_1},\dots,\varphi_{g_p}) \text{ l'est.}}$

Remarque : on peut aussi, pour g dans $C_b(\mathbf{R})$, définir f par $f(x) = \overline{g(-x)}e^{-x^2}$. Alors, en tant que produit d'une fonction de $C_b(\mathbf{R})$ et d'une fonction de $L^1(\mathbf{R})$, d'après I.A.1.a f est dans $L^1(\mathbf{R})$. De plus $\varphi_g(f) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} |g(-x)|^2\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Comme l'intégrande est une fonction continue et positive et que l'exponentielle est strictement positive, on a $\varphi_g(f) = 0 \Leftrightarrow g = 0$. En particulier $g \mapsto \varphi_g$ est injective.

III.A.2) Soit F un sous-espace de dimension finie de E. Puisque le résultat cherché est vrai en dimension finie, le rang de $(f_{n|F})_{n\in\mathbf{N}}$ est égal à la codimension de $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Ker}(f_{n|F})$ dans F, i.e. à la codimension de $K \cap F$ dans F car, pour tout entier n, $\mathrm{Ker}(f_{n|F}) = \mathrm{Ker}(f_n) \cap F$.

Soit p dans $\mathbf{N}$. Si K est de codimension au moins p alors il existe F de dimension p tel que $K \cap F$ est nul et est donc de codimension p dans F. Alors $(f_{n|F})_{n\in\mathbf{N}}$ engendre F^*. Cette dernière propriété équivaut au fait qu'il existe une sous-famille $(f_{n|F})_{n\in J}$ de cardinal p de $(f_{n|F})_{n\in\mathbf{N}}$ qui forme une base de F^*. En particulier $(f_{n|F})_{n\in J}$ est alors libre et, a fortiori, $(f_n)_{n\in J}$ est libre également. Il en résulte que si la codimension de K est infinie, le rang de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ l'est aussi.

Si la codimension de K est finie, on prend $p = \mathrm{codim}(K)$ et alors F est un supplémentaire de K. Soit maintenant m dans $\mathbf{N} \setminus J$, alors $f_{m|F}$ est combinaison linéaire de $(f_{n|F})_{n\in J}$ et on dispose de $(\lambda_n)_{n\in J}$ dans $\mathbf{C}^J$ tel que $f_{m|F} = \displaystyle\sum_{n\in J} \lambda_n f_{n|F}$. Mais alors $f_m - \sum_{n\in J} \lambda_n f_n$ est une forme linéaire nulle sur F et sur K, par définition de K, donc sur E et donc $f_m = \displaystyle\sum_{n\in J} \lambda_n f_n$ et $(f_n)_{n\in J}$ est une base de l'espace vectoriel engendré par $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Il en résulte $\mathrm{rg}(f_n)_{n\in\mathbf{N}} = p$.

Aussi si K est de codimension finie, le rang de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est fini et égal à $\mathrm{codim}(K)$. Par conséquent $\boxed{\text{la codimension de } K \text{ dans } E \text{ est égale au rang de la famille } (f_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ dans } E^*.}$

III.A.3) Soit f dans $L^1(\mathbf{R})$ et x dans $\mathbf{R}$, on a comme en III.A.1

$$f \star g(x) = T_{-x}(f \star g)(0) = f \star (T_{-x}(g))(0) = \varphi_{T_{-x}(g)}(f)\ .$$

De plus $f \star g$ est continu, d'après I.C.1.a, et donc $f \star g$ est la fonction nulle si et seulement si elle l'est sur $\mathbf{Q}$. En notant $n \mapsto -r_n$ une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{Q}$, on en déduit $N_g = \bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Ker}(\varphi_{T_{r_n}(g)})$.

D'après ce qui précède la codimension de N_g est donc égale au rang de la famille $(\varphi_{T_{r_n}(g)})_{n\in\mathbf{N}}$ ou encore, par injectivité de $g \mapsto \varphi_g$, au rang de la famille $(T_{r_n}(g))_{n\in\mathbf{N}}$ dans $C_b(\mathbf{R})$. On note F le sous-espace vectoriel engendré par $(T_{r_n}(g))_{n\in\mathbf{N}}$ dans $C_b(\mathbf{R})$. Si N_g est de codimension infinie, alors F est de dimension infinie et donc V_g aussi puisque $F \subset V_g$.

Sinon F est de dimension finie et est donc fermé dans $C_b(\mathbf{R})$. Soit alors α un réel. On dispose d'une sous-suite de $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers α par densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$. De plus $(T_{r_n}(g))$ est une suite bornée dans F puisqu'elle est à valeurs dans la sphère de centre 0 et de rayon $\|g\|_\infty$. Par compacité de cette sphère, puisque F est de dimension finie, on peut extraite une sous-suite de $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers α et telle que la sous-suite de $(T_{r_n}(g))$ correspondante converge dans F. Or cette sous-suite converge simplement vers $T_\alpha(g)$ et donc sa limite est nécessairement $T_\alpha(g)$ puisque la convergence uniforme entraîne la convergence simple. Par conséquent F contient $T_\alpha(g)$ et donc $F = V_g$. Il en résulte $\mathrm{codim}(N_g) = \dim(F) = \dim(V_g)$, i.e. $\boxed{\text{la codimension de } N_g \text{ dans } L^1(\mathbf{R}) \text{ est égale à la dimension de } V_g.}$

Remarque : on peut aussi démontrer que le résultat de la question précédente est encore valide même si l'ensemble de formes linéaires considéré est quelconque, en particulier indexé par $\mathbf{R}$.

Soit $(f_n)_{n\in I}$ une famille indexée par un ensemble quelconque de formes linéaires sur un espace vectoriel E de dimension infinie. Si elle est de rang infini, on peut en extraire une famille indexée par $\mathbf{N}$ de rang infini et le résultat précédent montre que l'intersection des noyaux de cette sous-famille est de codimension infinie. Puisque K est inclus dans cette intersection, il est également de codimension infinie.

Sinon, on se donne J un ensemble fini (éventuellement vide), tel que $(f_n)_{n\in J}$ soit une base du sous-espace engendré par $(f_n)_{n\in I}$. Si J est vide toutes les formes sont nulles et donc leurs noyaux sont tous égaux à E et $K = E$, d'où $\mathrm{codim}(K) = 0 = \mathrm{Card}(J)$. Sinon on se donne une bijection φ de $[\![0, p-1]\!]$ sur J, avec $p = \mathrm{Card}(J)$. On se donne n_0 dans I et on considère une famille $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ donnée par $g_n = f_{\varphi(n)}$ si $n < p$, $g_p = f_{n_0}$ et $g_n = f_{\varphi(0)}$ sinon. Le résultat précédent montre que $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Ker}(g_n)$ est de codimension p dans E, i.e. que $\mathrm{Ker}(f_{n_0}) \cap \left(\bigcap_{n\in J} \mathrm{Ker}(f_n)\right)$ est codimension p dans E. C'est en particulier le cas lorsque n_0 est dans J et donc $\mathrm{Ker}(f_{n_0}) \cap \left(\bigcap_{n\in J} \mathrm{Ker}(f_n)\right)$ est inclus dans $\bigcap_{n\in J} \mathrm{Ker}(f_n)$ et a la même codimension que lui dans E. Ces deux sous-espaces vectoriels sont donc égaux et il en résulte $\mathrm{Ker}(f_{n_0}) \subset \bigcap_{n\in J} \mathrm{Ker}(f_n)$. Comme ceci est vrai pour tout n_0 dans I, il en résulte $K = \bigcap_{n\in J} \mathrm{Ker}(f_n)$ et donc $\mathrm{codim}(K) = p$, ce qui montre que le résultat de la question précédente est vrai pour tout ensemble d'indices.

Le résultat de cette question en découle puisque $N_g = \bigcap_{\alpha\in\mathbf{R}} \mathrm{Ker}(\varphi_{T_\alpha(g)})$ et $V_g = \mathrm{V}ect\,(T_\alpha(g))$, puisque V_g est isomorphe à son image par $h \mapsto \varphi_h$ par injectivité de cette application linéaire.

III.A.4) a) Pour α réel on a $T_\alpha(g) = e^{-i\alpha\beta} g$ et donc V_g est la droite engendrée par g. Il résulte de la question précédente et de $g \neq 0$ qu'on a $\boxed{\mathrm{codim}(N_g) = 1.}$

b) Pour $n = 0$ et $g = 0$, on a $N_g = L^1(\mathbf{R})$ et donc $\mathrm{codim}(N_g) = n$.

Pour β réel, on note e_β la fonction $t \mapsto e^{i\beta t}$. Pour $n > 0$, on pose $g = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k$. Pour α réel, on a

$T_\alpha(g) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{-ik\alpha} e_k$. Or la famille $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ est libre et le déterminant de la famille $(T_j(g))_{1\leq j\leq n}$ par rapport à $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ est égal au déterminant de Vandermonde $\det(e^{ikj})_{1\leq j,k\leq n}$ et est donc non nul puisque les nombres complexes e^i, e^{2i}, …, e^{ni} sont tous distincts. Par conséquent V_g est l'espace engendré par $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ et est donc de dimension n. D'après III.A.3, il en résulte que $\boxed{N_g \text{ est de codimension } n \text{ dans } L^1(\mathbf{R}).}$

III.B - Hypothèse A

III.B.1) Soit α et β deux réels. On a $T_\alpha \circ T_\beta = T_{\alpha+\beta}$ et T_α est une application linéaire sur $C_b(\mathbf{R})$. Il en résulte que V_g est stable par T_α. Soit alors h dans V_g tel que h' existe et appartienne à $C_b(\mathbf{R})$. Pour n dans $\mathbf{N}^*$, on note h_n l'application $n(T_{1/n}(h) - h)$. Elle appartient à V_g puisque ce dernier est un espace vectoriel et on a $\|h_n\|_\infty \leq \|h'\|_\infty$ d'après l'inégalité des accroissements finis.

On suppose que N_g est de codimension finie dans $L^1(\mathbf{R})$ et donc que V_g est de dimension finie d'après III.A.3, et que g vérifie l'hypothèse A. Alors la suite (h_n) est bornée, donc admet une valeur d'adhérence d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass et celle-ci ne peut-être que h' puisque h' est la limite simple de (h_n). En particulier $h' \in V_g$. On en déduit, par une récurrence immédiate, que g et toutes ses dérivées appartiennent à V_g. Comme la famille $(g^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est liée dans V_g, il en résulte qu'une combinaison linéaire non triviale d'icelle s'annule, i.e. que

$\boxed{g \text{ est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.}}$

III.B.2) D'après ce qui précède on dispose donc de nombres complexes deux à deux distincts z_1, …, z_k et des polynômes non nuls P_1, …, P_r de $\mathbf{C}[X]$ tels que g soit donnée par $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} P_k(x)e^{z_k x}$. On notera $g = \psi_{z_1,\ldots,z_r}(P_1, \ldots, P_r)$.

D'après ce qui a été démontré à la question précédente, si h vérifie l'hypothèse A et appartient à V_g, alors h' aussi et donc, pour tout nombre complexe α, $h' - \alpha h$ aussi puisque V_g et $C_b(\mathbf{R})$ sont des espaces vectoriels et que, pour tout k entier, $(h' - \alpha h)^{(k)} = h^{(k+1)} - \alpha h^{(k)}$. Autrement dit l'application d_α donnée par $d_\alpha(h) = h' - \alpha h$ est un endomorphisme de V_g. Or l'image de $\psi_{z_1,\ldots,z_r}(P_1, \ldots, P_r)$ par d_α est $\psi_{z_1,\ldots,z_r}(P_1(z_1 - \alpha) + P_1', \ldots, P_r(z_r - \alpha) + P_r')$ et on remarque que, pour tout entier k entre 1 et r, le polynôme $P_k(z_k - \alpha) + P_k'$ est de même degré que P_k sauf si $\alpha = z_k$ auquel cas il est de degré strictement inférieur et en fait égal à P_k'. On en déduit que, pour j entier entre 1 et r, l'image de g par $\displaystyle\prod_{k\neq j} d_{\alpha_k}^{\deg(P_k)+1}$ est un élément de V_g de la forme $\psi_{z_j}(Q)$ avec Q dans $\mathbf{C}[X]$ de degré $\deg(P_j)$. Or $V_g \subset C_b(\mathbf{R})$ et donc on a $z_j \in i\mathbf{R}$ et $\deg(Q) = 0$ par comparaison entre polynômes et exponentielles en l'infini, d'une part, et comportement des polynômes en l'infini d'autre part.

Il en résulte que g est une combinaison linéaire de fonctions du type étudié en III.A.4.a.

Réciproquement si g est une telle combinaison linéaire, disons $g = \psi_{z_1,\ldots,z_r}(a_1, \ldots, a_r)$ avec z_1, …, z_r des imaginaires purs tous distincts et a_1, …, a_r des scalaires, alors V_g est inclus dans l'espace vectoriel engendré par e_{z_1}, …, e_{z_r} (avec les notations du III.A.4.b) et est donc de dimension finie. Donc N_g est de codimension finie d'après III.A.3. De plus, pour tout entier naturel k, $g^{(k)}$ existe et est borné par $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} |a_j| \times |z_j|^k$, et donc g vérifie l'hypothèse A.

$\boxed{\text{Les fonctions } g \text{ vérifiant l'hypothèse A et telles que } N_g \text{ soit de codimension finie dans } L^1(\mathbf{R}) \text{ sont les combinaisons linéaires d'exponentielles d'exposant imaginaire pur.}}$

Remarque : la propriété admise sera vue en cours.

III.C - Cas général

III.C.1) Puisque la famille $(T_\alpha(g))_{\alpha\in\mathbf{R}}$ engendre V_g et que ce dernier est de dimension finie, d'après III.A.3, on dispose de réels α_1, α_2, …, α_n tels que V_g soit engendré par $(T_{\alpha_i}(g))_{1\leq i\leq n}$. Dès lors, pour tout réel α, comme $T_\alpha(g)$ appartient à V_g, $T_\alpha(g)$ est combinaison linéaire de $(T_{\alpha_i}(g))_{1\leq i\leq n}$, i.e. on dispose de fonctions m_1, …, m_n d'une variable réelle telles que $\boxed{T_\alpha(g) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha)T_{\alpha_i}(g).}$

III.C.2) a) On a $F \subset \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ et $(e_x)_{x\in\mathbf{R}}$ sont les formes coordonnées. Ce sont donc bien des formes linéaires sur F, et aussi sur $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$. L'énoncé commet un abus de notation en ne notant pas $e_{x|F}$ la restriction de e_x à F.

Comme F est de dimension finie, F^* lui est isomorphe et donc la famille $(e_{x|F})_{x\in\mathbf{R}}$ est de rang au plus p. Soit q son rang. On dispose de a_1, …, a_q tels que $(e_{a_i|F})_{1\leq i\leq q}$ soit une base de l'espace engendré par $(e_{x|F})_{x\in\mathbf{R}}$. Autrement dit on dispose d'éléments c_1, …, c_q de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R}\,, \quad e_x = \sum_{i=1}^{q} c_i(x)e_{a_i}$$

i.e.

$$\forall f \in F\,, \forall x \in \mathbf{R}\,, \quad f(x) = e_x(f) = \sum_{i=1}^{q} c_i(x)e_{a_i}(f) = \sum_{i=1}^{q} f(a_i)c_i(x)$$

et donc les éléments de F sont tous combinaisons linéaires de q éléments de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$. D'après le lemme de Steinitz (propriété fondamentale de l'algèbre linéaire), toute famille de $q+1$ éléments de F est donc liée et donc F est de dimension au plus q. Il en résulte $p \leq q$ et donc $p = q$ et l'espace engendré par $(e_{x|F})_{x\in\mathbf{R}}$ est F^* tout entier, i.e. $\boxed{(e_{a_1},\ldots,e_{a_p}) \text{ est une base de } F^*.}$

b) Puisque $(e_{a_1},\ldots,e_{a_p})$ est une base de F^*, on dispose de sa base anté-duale, i.e. d'une base $(g_1,\ldots,g_p)$ de F telle que $g_i(a_j) = \delta_{ij}$ où δ est le symbole de Kronecker. Alors, pour tout f dans F, on a

$$f = \sum_{i=1}^{p} e_{a_i}(f)g_i = \sum_{i=1}^{p} f(a_i)g_i$$

puisque $(e_{a_i})_{1\leq i\leq p}$ est la base duale de $(g_i)_{1\leq i\leq p}$.

Par conséquent si $(f_1,\ldots,f_p)$ est une famille d'éléments de F, la matrice $(f_i(a_j))_{1\leq i,j\leq p}$ est celle des coordonnées de $(f_1,\ldots,f_p)$ relativement à la base $(g_i)_{1\leq i\leq p}$. Il en résulte que

$\boxed{\det(f_i(a_j))_{1\leq i,j\leq p} \text{ est non nul si et seulement si } (f_1,\ldots,f_p) \text{ est une base de } F.}$

III.C.3) D'après ce qui précède on dispose de a_1, …, a_n des réels distincts et de g_1, …, g_n une base de V_g tels que, pour f dans V_g on ait $f = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)g_i$. Les formules de changement de base donnent alors, pour tout α réel,

$$m_i(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}T_\alpha(g)(a_j) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}g(a_j-\alpha)$$

où $(b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est la matrice de passage de la base $(T_{\alpha_i}(g))_{1\leq i\leq n}$ à la base $(g_i)_{1\leq i\leq n}$. Il en résulte que, si g est de classe C^k, alors puisque les applications affines sont de classe C^∞,

$\boxed{m_1,\ldots, m_n \text{ sont de classe } C^k.}$

Remarque : la matrice $(b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est l'inverse de la matrice obtenue à la question précédente.

III.C.4) Pour h dans $L^1(\mathbf{R})$, l'application $f \mapsto h \star f$ est un endomorphisme de $C_b(\mathbf{R})$ d'après I.A.1.a et par linéarité de l'intégrale et, de plus, pour α dans $\mathbf{R}$ on a $T_\alpha(h \star f) = h \star T_\alpha(f)$ de sorte que l'image de V_g par $f \mapsto h \star f$ est $V_{h\star g}$. Comme V_g est de dimension finie, il en est de même de son image par un endomorphisme de $C_b(\mathbf{R})$ et donc, pour tout entier naturel r non nul, h_r est continu et $\boxed{V_{h_r\star g} \text{ est de dimension finie.}}$

III.C.5) Avec les notations précédentes, $V_{h_r\star g}$ et V_g ont même dimension si et seulement si l'application $f \mapsto h_r \star f$ est injective sur V_g. Pour tout entier non nul r tel que cette application ne soit pas injective, on se donne f_r dans la sphère unité de V_g (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$) tel que $h_r \star f_r = 0$. S'il existe une infinité d'indices r ayant cette propriété, et puisque V_g est de dimension finie et donc sa sphère unité est compacte, il résulte du théorème de Bolzano-Weierstrass que la suite précédente admet une valeur d'adhérence f dans la sphère unité. Or, pour tout r pour lequel f_r est défini, on a

$$h_r \star f = h_r \star (f - f_r) + h_r \star f_r = h_r \star (f - f_r)\,,$$

par linéarité, et donc

$$\|h_r \star f\|_\infty \leq \|f - f_r\|_\infty \times \|h_r\|_1 \leq \|f - f_r\|_\infty$$

d'après I.A.1.a. Il en résulte que 0 est valeur d'adhérence de la suite $h_r \star f$ au sens de la norme de la convergence uniforme. Mais f est limite au sens de la convergence simple de cette suite, d'après I.D.1, et donc $f = 0$. Ceci est une contradiction avec le fait que f appartient à la sphère unité et donc il n'existe qu'un nombre fini de r pour lesquels $f \mapsto h_r \star f$ n'est pas injective sur V_g. Il en résulte que, pour r assez grand, $\boxed{\dim(V_{h_r\star g}) = \dim(V_g).}$

III.C.6) Pour tout entier naturel r, la fonction h_r est de classe C^∞ sauf en -1 et $+1$ où elle admet des dérivées de tous ordres à droite et à gauche. La formule de Taylor montre que ces dérivées sont nulles des deux côtés si l'ordre de dérivation est strictement inférieur à r et donc, pour $r > 0$, h_r est de classe C^{r-1} d'après le théorème de la limite de la dérivée.
Soit maintenant k dans $\mathbf{N}$ et r dans $\mathbf{N}^*$ tel qu'on ait $r \geq k+1$ et $\dim(V_{h_r\star g}) = \dim(V_g)$, ce qui est licite d'après la question précédente. Comme h_r est de classe C^k et est à support compact, toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k sont bornées et il résulte de I.C.2 que $h_r \star g$ est de classe C^k.
Par linéarité de $f \mapsto h_r \star f$, pour tout α réel on a

$$T_\alpha(h_r \star g) = h_r \star T_\alpha(g) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha) h_r \star T_{\alpha_i}(g) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(h_r \star g)$$

et donc $(T_{\alpha_i}(h_r \star g))_{1\leq i\leq n}$ engendre $V_{h_r\star g}$ et en est une base, par cardinalité, et il résulte de III.C.3 appliqué à $h_r \star g$ que $m_1,\ldots, m_n$ sont de classe C^k. Comme k est arbitraire,
$\boxed{m_1,\ldots, m_n \text{ sont de classe } C^\infty.}$

III.C.7) On reprend les notations précédentes : k dans $\mathbf{N}$, r supérieur à $k+1$ et tel que $\dim(V_{h_r\star g}) = \dim(V_g)$ et α réel. Soit i un entier entre 1 et n. Alors $m_i(\alpha)$ est la coordonnée de $T_\alpha(h_r \star g)$ selon $T_{\alpha_i}(h_r \star g)$ et s'écrit, d'après III.C.3, comme combinaison linéaire (indépendante de α) de $h_r \star g(a_j - \alpha)$. D'après I.C.2, m_i est donc de classe C^k et sa dérivée d'ordre k est donnée par la même combinaison linéaire appliquée à $(-1)^k h_r^{(k)} \star g(a_j - \alpha)$. Comme g est dans $C_b(\mathbf{R})$ et $h_r^{(k)}$ est continue à support compact, donc dans $L^1(\mathbf{R})$, il résulte de I.A.1.a que $m_i^{(k)}$ est borné, i.e. m_i vérifie l'hypothèse A.
Or, pour α réel, on a

$$g(\alpha) = T_{-\alpha}(g)(0) = \sum_{i=1}^{n} m_i(-\alpha) g(-\alpha_i)$$

et donc g vérifie l'hypothèse A puisque $m_1, \ldots, m_n$ et $-\mathrm{Id}$ la vérifient. Il résulte donc de III.B que

$\boxed{\text{les fonctions } g \text{ dans } C_b(\mathbf{R}) \text{ telles que } N_g \text{ soit de codimension finie dans } L^1(\mathbf{R}) \text{ sont les combinaisons linéaires d'exponentielles d'exposant imaginaire pur.}}$