Deuxième composition
Centrale 2013

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On note :

— $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels ;

— $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$;

— $\mathscr{O}(n)$ le groupe orthogonal d'ordre n ;

— $S_n^+(\mathbf{R})$, respectivement $S_n^{++}(\mathbf{R})$, l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles, respectivement strictement positives ;

— I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on note ${}^{\mathrm{t}}M$ sa matrice transposée, $\mathrm{Tr}(M)$ sa trace, et, pour $1 \leq i, j \leq n$, m_{ij} le coefficient qui se trouve à l'intersection de la i-ème ligne et de la j -ème colonne. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme définie par $\|M\| = \sup\{|m_{ij}| \mid 1 \leq i, j \leq n\}$.

PARTIE I - Décomposition polaire d'un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$

I.A– On munit $\mathbf{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

I.A.1) Soit u un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$. Montrer que u est symétrique et vérifie, pour tout x dans $\mathbf{R}^n$ non nul, $\langle u(x) \mid x\rangle > 0$ si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base orthonormée appartient à $S_n^{++}(\mathbf{R})$. On dit alors que u est **défini positif**.

I.A.2) Montrer que si $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, alors S est inversible et $S^{-1} \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

I.B– Dans cette question, u désigne un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ symétrique défini positif. On se propose de démontrer qu'il existe un unique endomorphisme v de $\mathbf{R}^n$ symétrique, défini positif, tel que $v^2 = u$.

I.B.1) Soit v un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$, symétrique défini positif et vérifiant $v^2 = u$, et soit λ une valeur propre de u. Montrer que v induit un endomorphisme de $\mathrm{Ker}(u - \lambda Id)$ que l'on déterminera.

I.B.2) En déduire v, puis conclure.

I.B.3) Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que $v = Q(u)$.

I.C– Soit A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

I.C.1) Montrer ${}^{\mathrm{t}}AA \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

I.C.2) En déduire qu'il existe un unique couple (O, S) dans $\mathscr{O}(n) \times S_n^{++}(\mathbf{R})$ tel que $A = OS$.

I.C.3) Déterminer les matrices O et S lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

I.D–

I.D.1) Montrer que $\mathscr{O}(n)$ est une partie compacte de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

I.D.2) Montrer que $S_n^+(\mathbf{R})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

I.D.3) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est une partie dense de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

I.D.4) Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe un couple (O, S) dans $\mathscr{O}(n) \times S_n^+(\mathbf{R})$ tel que $A = OS$. Un tel couple est-il unique ?

I.E– Soit φ l'application de $\mathscr{O}(n) \times S_n^{++}(\mathbf{R})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ définie par $\varphi(O, S) = OS$ pour tout couple (O, S) de $\mathscr{O}(n) \times S_n^{++}(\mathbf{R})$.

Montrer que φ est bijective, continue et que sa réciproque est continue.

PARTIE II - Deux applications

II.A– Première application

Dans cette partie, A et B désignent deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose qu'il existe une matrice U carrée de taille n, inversible, à coefficients complexes, telle que $U\,{}^{\mathrm{t}}\overline{U} = I_n$ et $A = UBU^{-1}$, où $\overline{U}$ désigne la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de U.

II.A.1) Justifier ${}^{\mathrm{t}}A = U({}^{\mathrm{t}}B)U^{-1}$.

II.A.2) On se propose de montrer qu'il existe une matrice P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$ et ${}^{\mathrm{t}}A = P\,{}^{\mathrm{t}}BP^{-1}$.

Pour cela, on note X et Y les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $U = X + iY$.

a) Montrer qu'il existe μ dans $\mathbf{R}$ tel que $X + \mu Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

b) Montrer $AX = XB$ et $AY = YB$.

c) Conclure.

II.A.3) On écrit P sous la forme $P = OS$, avec O dans $\mathscr{O}(n)$ et S dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$.

a) Montrer $BS^2 = S^2B$, puis $BS = SB$.

b) En déduire qu'il existe O dans $\mathscr{O}(n)$ tel que $A = OB\,{}^{\mathrm{t}}O$.

II.B– Seconde application

Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On se propose de donner une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution X dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ au système

$$(*)\ :\left\{\begin{array}{rcl} {}^{\mathrm{t}}AA + {}^{\mathrm{t}}XX & = & I_n \\ {}^{\mathrm{t}}AX - {}^{\mathrm{t}}XA & = & 0_n \end{array}\right.$$

II.B.1) Montrer que si le système $(*)$ admet une solution dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, alors les valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$ appartiennent à l'intervalle $[0;1[$.

II.B.2) On suppose dans cette question que les valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$ appartiennent à l'intervalle $[0;1[$.

a) Justifier que l'on peut chercher les solutions X de $(*)$ sous la forme $X = UH$, avec $U \in \mathscr{O}(n)$ et $H \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

b) Déterminer H.

c) Montrer l'existence d'une solution X de $(*)$ appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

PARTIE III - Valeurs propres d'une matrice

Pour p dans $\mathbf{N}^*$, on pose

$$A_p = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_p(\mathbf{R}) .$$

On note P_p le polynôme caractéristique de A_p.

III.A– Montrer qu'à x réel fixé, la suite $(P_p(x))_{p\in\mathbf{N}^*}$ vérifie une relation linéaire d'ordre 2, que l'on précisera.

III.B– Soit x réel tel que $|2-x| < 2$. Après avoir justifié l'existence d'un unique θ dans $]0;\pi[$ tel que $2 - x = 2\cos(\theta)$, déterminer $P_p(x)$ en fonction de $\sin((p+1)\theta)$ et de $\sin(\theta)$.

III.C– Déterminer les valeurs propres de A_p.

III.D– Montrer que A_p est diagonalisable, et en déterminer une base de vecteurs propres, en précisant pour chacun la valeur propre associée.

PARTIE IV

Soit f une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

IV.A– Montrer qu'il existe une unique matrice A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}),\ f(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.

Dans la suite, A désigne la matrice définie dans cette question IV.A.

IV.B–

IV.B.1) Justifier l'existence de $M_n = \sup\{f(O) \mid O \in \mathscr{O}(n)\}$.

IV.B.2) Justifier que ${}^{\mathrm{t}}AA$ admet n valeurs propres positives $\mu_1, \ldots, \mu_n$, comptées avec multiplicités.

IV.B.3) Montrer $M_n = \sup\{\mathrm{Tr}(D\Omega) \mid \Omega \in \mathscr{O}(n)\}$, où D est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\sqrt{\mu_1}, \ldots, \sqrt{\mu_n}$.

IV.B.4) En déduire $M_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\mu_k}$.

IV.C– Dans cette question, f désigne la forme linéaire définie par $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}),\ f(M) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} m_{i,j}$.

IV.C.1) Déterminer la matrice A telle que $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}),\ f(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.

IV.C.2) Montrer

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

IV.C.3) Déterminer les valeurs propres de $A^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}A^{-1}$.

IV.C.4) Montrer $M_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.

IV.C.5) Donner un équivalent de M_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Deuxième composition – Centrale 2013

PARTIE I - Décomposition polaire d'un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$

I.A.1) Soit M la matrice de u dans une base orthonormée. Alors M est symétrique si et seulement u l'est. De plus si x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ alors $\langle u(x) \,|\, x\rangle = \lambda \|x\|^2$ et on en déduit le sens direct de l'assertion demandée. Réciproquement on dispose d'après le théorème spectral d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ d'orthodiagonalisation de u et alors, pour x dans E, on a $\langle u(x) \,|\, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i \,|\, x_i\rangle^2$ où λ_i est la valeur propre de u associée à e_i. Il en résulte que cette quantité est strictement positive si x est non nul et si le spectre de u est inclus dans $\mathbf{R}_+^*$. D'où l'équivalence cherchée : $\boxed{u \text{ est défini positif si et seulement si } M \in S_n^{++}(\mathbf{R}).}$

I.A.2) Si S est symétrique réelle, d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable et donc son déterminant est le produit de ses valeurs propres, comptées avec multiplicité. Si son spectre est inclus dans $\mathbf{R}_+^*$, ce déterminant est donc strictement positif et en particulier non nul. Par conséquent $\boxed{S \text{ est inversible.}}$ On a de plus $I_n = {}^{\mathrm{t}}(SS^{-1}) = {}^{\mathrm{t}}(S^{-1})\,{}^{\mathrm{t}}S = {}^{\mathrm{t}}(S^{-1})S$, i.e. $S^{-1} = {}^{\mathrm{t}}(S^{-1})$ et donc S^{-1} est symétrique. Enfin le spectre de S^{-1} étant formé des inverses des éléments du spectre de S, $\boxed{S^{-1} \in S_n^{++}(\mathbf{R}).}$

I.B.1) Puisqu'on a $v^2 = u$ en particulier $vu = v^3 = uv$ et donc u et v commutent. Il en résulte que $\boxed{v \text{ laisse stable les espaces propres de } u.}$

Comme v est symétrique, d'après le théorème spectral il est diagonalisable et donc sa restriction à tout sous-espace stable l'est. Or si μ est une valeur propre de la restriction de v à $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$, alors μ^2 est une valeur propre de son carré, i.e. de la restriction de u et donc $\mu^2 = \lambda$. Comme v est défini positif, μ est strictement positif et donc $\mu = \sqrt{\lambda}$. Étant diagonalisable et ayant un seule valeur propre, la restriction de v étudiée est donc scalaire, i.e. $\boxed{v_{|\,\mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id})} = \sqrt{\lambda}\mathrm{Id}_{|\,\mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id})}.}$

I.B.2) On en déduit qu'en notant p_λ le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id})$, i.e. d'après le théorème spectral parallèlement à la somme des autres sous-espaces propres de u, on a nécessairement

$$\boxed{v = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \sqrt{\lambda} p_\lambda.}$$

On en déduit que si v existe, il est unique. Réciproquement la formule précédente définit un endomorphisme de E, symétrique puisque les projecteurs orthogonaux le sont et qu'une somme d'endomorphismes symétriques l'est, de carré u d'après le théorème spectral et en particulier puisque $p_\lambda p_\mu = \delta_{\lambda,\mu} p_\lambda$ et $u = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda p_\lambda$ et donc les espaces propres sont ceux de u avec $\mathrm{Ker}(v - \sqrt{\lambda}\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id})$. Par conséquent le spectre de v est strictement positif, i.e. v est défini positif. D'où $\boxed{\text{l'existence et l'unicité de } v \text{ défini positif tel que } v^2 = u.}$

I.B.3) Soit P un polynôme. On a alors $P(u) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} P(\lambda) p_\lambda$, puisque cette identité est linéaire en P, vraie pour $P = 1$ puisque u est (ortho-)diagonalisable, est une tautologie pour $P = X$ et est vraie pour $P = X^n$ avec $n > 1$ car $p_\lambda p_\mu = \delta_{\lambda,\mu} p_\lambda$. Soit maintenant P prenant la valeur $\sqrt{\lambda}$ en λ pour tout λ dans $\mathrm{Sp}(u)$, ce qui est loisible puisque ce spectre est fini, par exemple par interpolation de Lagrange. On en déduit $\boxed{P(u) = v.}$

I.C.1) Par construction la matrice ${}^{\mathrm{t}}AA$ est symétrique réelle. De plus pour X dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ on a ${}^{\mathrm{t}}X\,{}^{\mathrm{t}}AAX = \|AX\|^2$ en identifiant $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ à $\mathbf{R}^n$ et donc, puisque le noyau de A est réduit au vecteur nul, ${}^{\mathrm{t}}AA$ est défini positif, i.e. $\boxed{{}^{\mathrm{t}}AA \in S_n^{++}(\mathbf{R}).}$

I.C.2) On raisonne par analyse-synthèse. Soit donc (O, S) un tel couple. Il vient alors ${}^{\mathrm{t}}AA = {}^{\mathrm{t}}S\,{}^{\mathrm{t}}OOS = S^2$ et donc S est l'unique élément de $S_n^{++}(\mathbf{R})$ tel que $S^2 = {}^{\mathrm{t}}AA$ garanti par la question précédente et I.B. On a alors nécessairement $O = AS^{-1}$, ce qui montre qu'un tel couple est unique s'il existe. Soit alors S et O définis comme précédemment, on a $A = OS$, $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ et ${}^{\mathrm{t}}OO = {}^{\mathrm{t}}(S^{-1})\,{}^{\mathrm{t}}AAS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$, i.e. $O \in \mathscr{O}_n(\mathbf{R})$. D'où $\boxed{\text{l'existence et l'unicité de la décomposition polaire.}}$

I.C.3) Dans ce cas on a

$$ {}^{\mathrm{t}}AA = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -6 \\ 0 & 36 & 0 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix} $$

dont des vecteurs propres sont $e_1 \pm e_3$ et e_2, associés aux valeurs propres 10 ∓ 6 et 36 et dont une racine carrée définie positive est donc donnée par l'application qui admet la base orthonormée $((e_1+e_3)/\sqrt{2}, (e_1-e_3)/\sqrt{2}, e_2)$ comme base de diagonalisation, associée aux valeurs propres 2, 4 et 6, i.e.

$$ S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} $$

et donc

$$ O = AS^{-1} = A \begin{pmatrix} 3/8 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 1/8 & 0 & 3/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, $$

i.e. $\boxed{O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \text{ et } S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}.$

I.D.1) La trace et l'application $X \mapsto ({}^{\mathrm{t}}X, X)$ sont linéaires donc continus car $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est de dimension finie et de même le produit est bilinéaire donc continu. Il en résulte que $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est l'image réciproque d'un singleton fermé par une application continue, i.e. l'image réciproque de $\{I_n\}$ par $X \mapsto {}^{\mathrm{t}}XX$, donc est fermé. Par ailleurs toute colonne d'une matrice orthogonale forme un vecteur de norme 1 pour la norme euclidienne et, en particulier, a des coefficients de valeur absolue inférieure à 1, i.e. $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est inclus dans la boule unité de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. D'après le théorème de Heine-Borel, puisque $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est de dimension finie, on en conclut que $\boxed{\mathscr{O}_n(\mathbf{R}) \text{ est compact.}}$

I.D.2) L'application $M \mapsto {}^{\mathrm{t}}M - M$ étant linéaire, $S_n(\mathbf{R})$ en est le noyau et est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, qui est de dimension finie, et est donc fermé. On reprend la caractérisation de la question I.A.1 pour obtenir que M appartient à $S_n^+(\mathbf{R})$ si et seulement si, pour tout X dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, ${}^{\mathrm{t}}XMX \geq 0$. Or l'application $M \mapsto {}^{\mathrm{t}}XMX$ est linéaire donc continue et ainsi, à X fixé l'ensemble $\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \,|\, {}^{\mathrm{t}}XMX \geq 0\}$ est l'image réciproque du fermé $\mathbf{R}_+$ de $\mathbf{R}$ et est donc fermé dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On en déduit que $S_n^+(\mathbf{R})$ est intersection de fermés et donc $\boxed{S_n^+(\mathbf{R}) \text{ est fermé.}}$

Remarque : on a $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} \,|\, \forall \varepsilon > 0\,,\ x + \varepsilon > 0\}$ et, pour ε réel, $M \in S_n(\mathbf{R}) \implies M + \varepsilon I_n \in S_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{Sp}(M + \varepsilon I_n) = \{\lambda + \varepsilon \,|\, \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\} = \mathrm{Sp}(M) + \varepsilon$. À partir de I.A.1, on en déduit que M dans $S_n(\mathbf{R})$ appartient à $S_n^+(\mathbf{R})$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ on a $M + \varepsilon I_n \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, i.e. si et seulement si pour tous $\varepsilon > 0$ et X non nul dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ on a ${}^{\mathrm{t}}XMX + \varepsilon \left\|X\right\|^2 > 0$ ou encore pour tout X non nul dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ on a ${}^{\mathrm{t}}XMX \geq 0$.

I.D.3) Soit M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et χ son polynôme caractéristique. Puisqu'il n'a qu'un nombre fini de racines on dispose de r dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que $0 < |\varepsilon| < r \Longrightarrow \chi(\varepsilon) \neq 0$, i.e. $0 < |\varepsilon| < r \Longrightarrow M - \varepsilon I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. On en déduit que $\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \text{ est dense dans } \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).}$

I.D.4) D'après les questions précédentes on dispose de $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$, $(O_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et $(S_k)_{k\in\mathbf{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ et $S_n^{++}(\mathbf{R})$ respectivement et telles que $\lim A_k = A$ et $\forall k \in \mathbf{N}\ A_k = O_k S_k$. Quitte à extraire, par compacité de $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$, on peut supposer $(O_k)_{k\in\mathbf{N}}$ convergente dans $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$. Soit alors O sa limite. Par continuité de la transposition on en déduit $\lim {}^{\mathrm{t}}O_k = {}^{\mathrm{t}}O$ et par continuité du produit $\lim {}^{\mathrm{t}}O_k A_k = {}^{\mathrm{t}}OA$. Autrement dit $\lim S_k$ existe et vaut ${}^{\mathrm{t}}OA$. On note S cette matrice. On a alors $S = \lim S_k$. Comme (S_k) est à valeurs dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$ donc dans $S_n^{+}(\mathbf{R})$, et que ce dernier est fermé, on en déduit $S \in S_n^{+}(\mathbf{R})$. D'où $\boxed{\text{l'existence de la décomposition polaire.}}$

En général la décomposition n'est pas unique. Par exemple la matrice nulle se décompose en une matrice orthogonale arbitraire et une matrice symétrique nulle. Si on étudie les endomorphismes associés on a $\mathrm{Ker}(S) = \mathrm{Ker}(A)$ puisque $\mathscr{O}_n(\mathbf{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Ker}(A)^{\perp}$, puisque S est symétrique. On en déduit que O est uniquement déterminé sur $\mathrm{Ker}(A)^{\perp}$ et arbitraire sur $\mathrm{Ker}(A)$. On peut par exemple multiplier O à droite par une matrice orthogonale telle que sa restriction à $\mathrm{Ker}(A)^{\perp}$ est l'identité et sa restriction à $\mathrm{Ker}(A)$ est un élément quelconque de $\mathscr{O}(\mathrm{Ker}(A))$. Autrement dit

$\boxed{\text{la décomposition polaire est unique si et seulement si } A \text{ est inversible.}}$

Remarque : ce n'est pas demandé, mais S est unique car la racine carrée positive d'un endomorphisme symétrique positif est unique, avec les mêmes arguments que dans le cas défini positif.

I.E– D'après la question I.B φ est bijective. Le produit étant continu sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})\times\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, sa restriction l'est aussi, i.e. φ est continu. On montre que sa réciproque l'est également en utilisant le critère séquentiel de continuité.

Soit $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$, $(O_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et $(S_k)_{k\in\mathbf{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ et $S_n^{++}(\mathbf{R})$ respectivement et telles que $\lim A_k = A$ et $\forall k \in \mathbf{N}\ A_k = O_k S_k$. Soit Ω une valeur d'adhérence de la suite (O_k). On dispose de ψ strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans lui-même telle que $\Omega = \lim O_{\psi(k)}$. Comme on a $S_k = {}^{\mathrm{t}}O_k A_k$ pour tout entier k, on en déduit que $(S_{\psi(k)})$ converge, disons vers Σ. Puisque $S_n^{+}(\mathbf{R})$ est fermé, $\Sigma \in S_n^{+}(\mathbf{R})$. De plus, par continuité du déterminant $\det(\Sigma) = \pm\det(A) \neq 0$ et donc $\Sigma \in S_n^{++}(\mathbf{R})$. Or, par continuité du produit, $\Sigma^2 = \lim S_{\psi(k)}^2$, i.e. $\Sigma^2 = \lim {}^{\mathrm{t}}A_k A_k = {}^{\mathrm{t}}AA$. Par unicité de la racine carrée dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$, $\Sigma = S$ et donc $\Omega = O$. Il en résulte que (O_k) admet O comme unique valeur d'adhérence. Puisque $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est compact, on en déduit, grâce à la réciproque partielle du théorème de Bolzano-Weierstrass, $\lim O_k = O$. Et alors $\lim S_k = \lim {}^{\mathrm{t}}O_k A_k = {}^{\mathrm{t}}OA = S$, i.e. $\lim(O_k, S_k) = (O, S)$ et donc $\boxed{\varphi \text{ est bijective et bicontinue.}}$

PARTIE II - Deux applications

II.A.1) Par hypothèse sur U, on a $A = UB\,{}^{\mathrm{t}}\overline{U}$ et donc, en prenant la transposée et la conjuguée, ${}^{\mathrm{t}}\overline{A} = U\,{}^{\mathrm{t}}\overline{B}\,{}^{\mathrm{t}}\overline{U}$. Comme A et B sont à coefficients réels, ${}^{\mathrm{t}}B$ aussi et donc $\boxed{{}^{\mathrm{t}}A = U({}^{\mathrm{t}}B)U^{-1}}$.

II.A.2) a) Puisque le déterminant est une application polynomiale de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$, l'application $\mu \mapsto \det(X + \mu Y)$ est polynomiale de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$. Puisque U est inversible, cette application est non nulle en i et donc le polynôme associé est non nul, et ainsi la fonction polynomiale restreinte à $\mathbf{R}$ n'est pas nulle non plus, i.e. $\boxed{\text{il existe } \mu \text{ dans } \mathbf{R} \text{ tel que } X + \mu Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}).}$

b) Par hypothèse on a $AU = UB$, soit $AX + iAY = XB + iYB$. En prenant les parties réelle et imaginaire, il vient $\boxed{AX = XB \text{ et } AY = YB.}$

c) Par linéarité, avec μ réel choisi comme en II.A.2.a et en posant $P = X + \mu Y$, on a $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et $AP = PB$. Puisque P est inversible on a donc aussi $\boxed{A = PBP^{-1}.}$ On a également, en vertu de la question II.A.1, ${}^{\mathrm{t}}A = U({}^{\mathrm{t}}B)U^{-1}$, donc ${}^{\mathrm{t}}AU = U({}^{\mathrm{t}}B)$, puis ${}^{\mathrm{t}}AX = X({}^{\mathrm{t}}B)$ et ${}^{\mathrm{t}}AY = Y({}^{\mathrm{t}}B)$, et ainsi ${}^{\mathrm{t}}AP = P({}^{\mathrm{t}}B)$, et enfin $\boxed{{}^{\mathrm{t}}A = P\,{}^{\mathrm{t}}BP^{-1}.}$

II.A.3) a) En transposant cette dernière relation, on obtient $A = {}^{\mathrm{t}}P^{-1}B\,{}^{\mathrm{t}}P$ et il vient $PBP^{-1} = {}^{\mathrm{t}}P^{-1}B\,{}^{\mathrm{t}}P$, puis ${}^{\mathrm{t}}PPB = B\,{}^{\mathrm{t}}PP$. Or on a ${}^{\mathrm{t}}PP = {}^{\mathrm{t}}S\,{}^{\mathrm{t}}OOS = S^2$ puisque O est orthogonal et S symétrique. On conclut $\boxed{BS^2 = S^2B.}$ D'après la question I.A.1 et puisque S est dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$, l'endomorphisme canoniquement associé à S, noté v, est symétrique défini positif. L'endomorphisme u donné par $u = v^2$ est alors associé à S^2 dans la base canonique, i.e. à ${}^{\mathrm{t}}SS$, et est donc symétrique défini positif d'après les questions I.A.1 et I.C.1. D'après la question I.B.3 on dispose de Q dans $\mathbf{R}[X]$ tel que $v = Q(u)$ et donc, en passant aux matrices associées dans la base canonique, $S = Q(S^2)$. Comme B commute à S^2, il commute à tout polynôme en S^2, et donc à S, i.e. $\boxed{BS = SB.}$

b) Comme on a $A = PBP^{-1} = OSBS^{-1}O^{-1}$, $SB = BS$ et $O^{-1} = {}^{\mathrm{t}}O$, il vient $A = OB\,{}^{\mathrm{t}}O$, et donc $\boxed{\text{il existe } O \text{ dans } \mathscr{O}(n) \text{ tel que } A = OB\,{}^{\mathrm{t}}O.}$

II.B.1) Soit X une solution du système $(*)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, alors on a ${}^{\mathrm{t}}AA = I_n - {}^{\mathrm{t}}XX$. D'après la question I.C.1, ${}^{\mathrm{t}}XX$ est une matrice symétrique définie positive et donc son spectre est inclus dans $\mathbf{R}_+^*$. Il en résulte que celui de $I_n - {}^{\mathrm{t}}XX$ est inclus dans $]-\infty;1[$. Comme ${}^{\mathrm{t}}AA$ est symétrique réelle, elle est orthodiagonalisable. De plus si U est un de ses vecteurs propres et qu'on note λ la valeur propre associée, on a ${}^{\mathrm{t}}U\,{}^{\mathrm{t}}AAU = \lambda\left\|U\right\|^2 = \left\|AU\right\|^2$, de sorte que λ est positif puisque $\left\|U\right\|^2$ est strictement positif et $\left\|AU\right\|^2$ positif. On en conclut $\boxed{\mathrm{Sp}({}^{\mathrm{t}}AA) \subset [0;1[.}$

II.B.2) a) Soit X une solution de $(*)$ et V dans le noyau de X. On a alors $V = {}^{\mathrm{t}}AAV + {}^{\mathrm{t}}XXV = {}^{\mathrm{t}}AAV$ et donc $V = 0$ puisque 1 n'est pas valeur propre de ${}^{\mathrm{t}}AA$. On en déduit $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et donc, d'après la question I.C.2, on peut écrire $\boxed{X = UH, \text{ avec } U \in \mathscr{O}(n) \text{ et } H \in S_n^{++}(\mathbf{R}).}$

b) Avec les notations et hypothèses précédentes, le système $(*)$ est équivalent à $H^2 = I_n - {}^{\mathrm{t}}AA$ et ${}^{\mathrm{t}}AUH \in S_n(\mathbf{R})$. En particulier, puisque le spectre de $I_n - {}^{\mathrm{t}}AA$ est dans $]0;1]$ et donc $I_n - {}^{\mathrm{t}}AA \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, il résulte de la question I.B que H est un polynôme en $I_n - {}^{\mathrm{t}}AA$ et est l'unique matrice verifiant $\boxed{H \in S_n^{++}(\mathbf{R}) \text{ et } H^2 = I_n - {}^{\mathrm{t}}AA.}$

c) D'après la question I.D.4, on dispose de (O,S) dans $\mathscr{O}(n)\times S_n^{+}(\mathbf{R})$ tel que $A = OS$. En particulier on a ${}^{\mathrm{t}}AA = S^2$. Avec les notations précédentes, on en déduit que H est un polynôme en S. En particulier H commute à S. Il en résulte que OH est solution de $(*)$ puisqu'on a ${}^{\mathrm{t}}AA + H^2 = I_n$ et ${}^{\mathrm{t}}AOH = SH = HS = {}^{\mathrm{t}}H\,{}^{\mathrm{t}}OA = {}^{\mathrm{t}}(OH)A$. D'où

$\boxed{\text{l'existence d'une solution } X \text{ de } (*) \text{ appartenant à } \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}).}$

PARTIE III - Valeurs propres d'une matrice

III.A– Soit x un réel fixé et p un entier strictement supérieur à 2. En développant par rapport à la première colonne, il vient

$$P_p(x) = (x-2)P_{p-1}(x) - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix}$$

et donc, en développant par rapport à sa première ligne le dernier déterminant, on en déduit que la suite $(P_p(x))_{p\in\mathbf{N}^*}$ vérifie la relation linéaire d'ordre 2 $\boxed{\forall p \in \mathbf{N}^*,\ P_{p+2}(x) = (x-2)P_{p+1}(x) - P_p(x).}$

III.B– Puisque cos réalise une bijection de $]0;\pi[$ sur $]-1;1[$ et qu'on a $\frac{1}{2}|2-x|<1$, on dispose d'un $\boxed{\text{unique } \theta \text{ dans }]0;\pi[\text{ tel que } 2-x=2\cos(\theta).}$ La relation précédente s'écrit alors, en notant $u_p = P_p(x)$, $u_{p+2}+2\cos(\theta)u_{p+1}+u_p=0$. En convenant $u_0=1$, la relation de récurrence est vraie pour p dans $\mathbf{N}$. On en déduit que (u_p) est combinaison linéaire des suites géométriques de raison $-e^{i\theta}$ et $-e^{-i\theta}$, puisque ces deux quantités sont distinctes et racines du polynôme $X^2+2\cos(\theta)X+1$. D'après la relation d'EULER, (u_p) est donc combinaison linéaire des suites $((-1)^p\cos(p\theta))$ et $((-1)^p\sin(p\theta))$. Puisque $\sin(\theta)$ est non nul, on peut écrire $u_0=1=\frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta)}$ et $u_1=-2\cos(\theta)=-\frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)}$ et, en remarquant que l'expression $(-1)^p\frac{\sin((p+1)\theta)}{\sin(\theta)}$ est combinaison linéaire des suites précédentes, avec les coefficients 1 et $\cot(\theta)$, on en déduit par unicité de l'écriture $\boxed{P_p(x)=(-1)^p\frac{\sin((p+1)\theta)}{\sin(\theta)}.}$

III.C– La question précédente montre que les réels $2-2\cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right)$, i.e. $4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(p+1)}\right)$, sont valeurs propres de A_p pour k dans $[\![1;p]\!]$. Comme sin réalise une bijection de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0;1[$, et par bijectivité de la fonction carré sur $]0;1[$, on en déduit que ces quantités fournissent p valeurs propres distinctes de A_p, puis que ce sont exactement les valeurs propres de A_p et que leur multiplicité est 1 : $\boxed{\text{les valeurs propres de } A_p \text{ sont les } 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(p+1)}\right) \text{ pour } k\in[\![1;p]\!].}$

III.D– Puisque A_p est symétrique réelle, $\boxed{A_p \text{ est diagonalisable.}}$ La question précédente fournit les valeurs propres. Si x est une telle valeur propre et $(a_j)_{1\leq j\leq p}$ est un vecteur propre associé, alors en posant $a_0=a_{p+1}=0$, on a $\forall j\ [\![0;p-1]\!]\ a_{j+2}-(2-x)a_{j+1}+a_j=0$. On reconnaît les $p+1$ premiers termes d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Comme un vecteur propre n'est pas nul et qu'on a $a_0=0$, a_1 n'est pas nul et on peut supposer $a_1=\sin(\theta)$, en reprenant la notation $2-x=2\cos(\theta)$ et $\theta=\frac{k\pi}{2(p+1)}$. La suite donnée par $(\sin(j\theta))_{0\leq j\leq p+1}$ coïncide avec $(a_j)_{0\leq j\leq p+1}$ en les deux premiers termes et est également combinaison linéaire des suites géométriques de raisons $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. On en déduit qu'une base de vecteurs propres de A_p est donnée par

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix}\sin(\frac{k\pi}{p+1})\\ \sin(\frac{2k\pi}{p+1})\\ \vdots\\ \sin(\frac{pk\pi}{p+1})\end{pmatrix}\right)_{1\leq k\leq p}\text{, avec les valeurs propres respectives } \left(4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(p+1)}\right)\right)_{1\leq k\leq p}.}$$

PARTIE IV

IV.A– Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. L'application $M\mapsto \mathrm{Tr}(AM)$ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ puisque le produit est bilinéaire et la trace est linéaire. Elle est égale à f si et seulement si elle coïncide avec f sur la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, i.e. en notant $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ cette base canonique, si et seulement si $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $\forall (i,j)\in[\![1;n]\!]^2$, $a_{ij}=f(E_{ji})$. Par conséquent il existe une unique matrice A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\boxed{\forall M\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R}),\ f(M)=\mathrm{Tr}(AM).}$

IV.B.1) Puisque $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est de dimension finie, f est continu en tant que forme linéaire. Il résulte de I.D.1 et du théorème de WEIERSTRASS que l'image de $\mathscr{O}(n)$ par f est une partie compacte. D'où en particulier $\boxed{\text{l'existence de } M_n=\sup\{f(O)\,|\,O\in\mathscr{O}(n)\}.}$

IV.B.2) L'argument a déjà été donné en II.B.1. Comme ${}^{\mathrm{t}}AA$ est symétrique réelle, elle est orthodiagonalisable. De plus si U est un de ses vecteurs propres et qu'on note λ la valeur propre associée, on a ${}^{\mathrm{t}}U\,{}^{\mathrm{t}}AAU=\lambda\|U\|^2=\|AU\|^2$, de sorte que λ est positif puisque $\|U\|^2$ est strictement positif et $\|AU\|^2$ positif. On en conclut que $\boxed{{}^{\mathrm{t}}AA \text{ admet } n \text{ valeurs propres positives comptées avec multiplicités.}}$

IV.B.3) D'après la question I.D.4 on dispose de (O,S) dans $\mathscr{O}(n)\times S_n^+(\mathbf{R})$ tel que $A=OS$. Puisque S est symétrique réelle, d'après le théorème spectral on dispose de P dans $\mathscr{O}(n)$ tel que ${}^{\mathrm{t}}PSP$ est diagonal. Comme on a aussi ${}^{\mathrm{t}}AA=S^2$, ${}^{\mathrm{t}}P\,{}^{\mathrm{t}}AAP$ est diagonal et est le carré de ${}^{\mathrm{t}}PSP$. En particulier, par invariance du spectre par changement de base, la diagonale de ${}^{\mathrm{t}}P\,{}^{\mathrm{t}}AAP$ est formée des $(\mu_k)_{1\le k\le n}$ et donc celle de ${}^{\mathrm{t}}PSP$ est formée des $(\sqrt{\mu_k})_{1\le k\le n}$. Puisqu'une matrice de permutation est orthogonale, quitte à changer P, on peut supposer ${}^{\mathrm{t}}PSP=D$ et donc $A=OPD\,{}^{\mathrm{t}}P$. Par commutativité de la trace il vient, pour M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, $f(M)=\mathrm{Tr}(AM)=\mathrm{Tr}(D\,{}^{\mathrm{t}}PMOP)$. Comme $\mathscr{O}(n)$ est un groupe l'application $M\mapsto {}^{\mathrm{t}}PMOP$ est une bijection de $\mathscr{O}(n)$ sur lui-même et donc $\boxed{M_n=\sup\{\mathrm{Tr}(D\Omega)\,|\,\Omega\in\mathscr{O}(n)\}.}$

IV.B.4) Comme les vecteurs colonnes d'une matrice orthogonale sont unitaires, ses coefficients diagonaux sont de valeur absolue inférieure à 1 et donc, pour Ω dans $\mathscr{O}(n)$, $\mathrm{Tr}(D\Omega)\le\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\mu_k}$. Puisqu'il y a égalité lorsque $\Omega=I_n$, on conclut $\boxed{M_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\mu_k}.}$

IV.C.1) D'après l'argument développé lors de la résolution de la question IV.A, on obtient A en évaluant f sur la base canonique. Il vient $\boxed{A=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&1&\ddots&1\\\vdots&&\ddots&\ddots&1\\0&\cdots&\cdots&0&1\end{pmatrix}}$.

IV.C.2) En notant $N=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&0&\ddots&0\\\vdots&&\ddots&\ddots&1\\0&\cdots&\cdots&0&0\end{pmatrix}$, on a $N^n=0$ et $A=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}N^k$. Il en résulte $(I_n-N)A=I_n-N^n=I_n$, i.e. $\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&\cdots&0\\0&1&-1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&1&\ddots&0\\\vdots&&\ddots&\ddots&-1\\0&\cdots&\cdots&0&1\end{pmatrix}}$.

IV.C.3) On reprend les notations de la partie III, notamment A_n, x et θ, avec la supposition $|2-x|<2$. On note également $(E_{ij})_{1\le i,j\le n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Il vient $A^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}A^{-1}=A_n-E_{nn}$ et donc, en notant Q le polynôme caractéristique de $A^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}A^{-1}$, $Q(x)=P_n(x)+P_{n-1}(x)$ par multilinéarité du déterminant puisque toutes les colonnes de $xI_n-A_n+E_{nn}$ sont celles de xI_n-A_n à l'exception de la dernière qui est la somme de celle de xI_n-A_n et du n^{e} vecteur de la base canonique. Il vient $Q(x)=\frac{(-1)^n}{\sin(\theta)}(\sin((n+1)\theta)-\sin(n\theta))$ et donc $Q(x)$ est nul dès que $(n+1)\theta\equiv\pi-n\theta\pmod{2\pi}$, i.e. $(2n+1)\theta\equiv\pi\pmod{2\pi}$. En particulier Q admet les $2-2\cos\left(\frac{2k+1}{2n+1}\pi\right)$, avec $0\le k<n$, comme racines. Puisque ces n racines sont distinctes par injectivité de cos sur $]0;\pi[$, on en déduit que les valeurs propres de $A^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}A^{-1}$ sont $\boxed{\text{les } 4\sin^2\left(\frac{2k+1}{2n+1}\frac{\pi}{2}\right)\text{ pour } 0\le k<n.}$

IV.C.4) Le spectre de l'inverse est donné par les inverses des éléments du spectre, on en déduit que le spectre de ${}^{\mathrm{t}}AA$ est donné par les inverses des valeurs propres précédentes et donc, d'après la question IV.B.4 et par positivité de sin sur $]0;\frac{\pi}{2}[$, $M_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sin\left(\frac{2k+1}{2n+1}\frac{\pi}{2}\right)}$. Pour k dans $[\![0;n-1]\!]$, on a

$\sin\left(\frac{2k+1}{2n+1}\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2k+1}{2n+1}\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{n-k}{2n+1}\pi\right)$ et donc, par réindexation, $\boxed{M_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}.}$

IV.C.5) On note f la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{1}{2\cos(x)}$. C'est une fonction continue, croissante, positive et de primitive F donnée par $F(x) = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1+\sin}{1-\sin}\right)$. Par croissance de l'intégrale, il vient par comparaison entre une somme et une intégrale via la relation de Chasles :

$$\int_0^{n\pi/(2n+1)} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{2n+1}M_n \leq \int_0^{n\pi/(2n+1)} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{2n+1} f\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) .$$

On a $F(0) = 0$, $\cos(x) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{\pi}{2} - x$ et $1 - \sin(x) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2$ d'après la formule de Taylor. On en déduit $F(x) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ puis, en remarquant $\frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$,

$$\frac{1}{2}\ln(n) + \mathrm{o}\left(\ln(n)\right) \leq \frac{\pi}{2n+1}M_n \leq \frac{1}{2}\ln(n) + \mathrm{o}\left(\ln(n)\right) + \mathrm{O}\left(1\right)$$

et donc, par encadrement, $\boxed{M_n \sim \dfrac{n\ln(n)}{\pi}.}$