

DEUXIÈME COMPOSITION CENTRALE 2013

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On note :

- $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels ;
- $\text{GL}_n(\mathbf{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$;
- $\mathcal{O}(n)$ le groupe orthogonal d'ordre n ;
- $S_n^+(\mathbf{R})$, respectivement $S_n^{++}(\mathbf{R})$, l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles, respectivement strictement positives ;
- I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note M^T sa matrice transposée, $\text{tr}(M)$ sa trace, et, pour $1 \leq i, j \leq n$, m_{ij} le coefficient qui se trouve à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme définie par $\|M\| = \sup \{|m_{ij}| \mid 1 \leq i, j \leq n\}$.

PARTIE I - Décomposition polaire d'un endomorphisme de \mathbf{R}^n

I.A- On munit \mathbf{R}^n de sa structure euclidienne canonique.

I.A.1) Soit u un endomorphisme de \mathbf{R}^n . Démontrer que u est autoadjoint défini positif si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base orthonormée appartient à $S_n^{++}(\mathbf{R})$.

I.A.2) Démontrer que si $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, alors S est inversible et $S^{-1} \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

I.B- Dans cette question, u désigne un endomorphisme de \mathbf{R}^n auto-adjoint défini positif. On se propose de démontrer qu'il existe un unique endomorphisme v de \mathbf{R}^n auto-adjoint, défini positif, tel que $v^2 = u$.

I.B.1) Soit v un endomorphisme de \mathbf{R}^n , auto-adjoint défini positif et vérifiant $v^2 = u$, et soit λ une valeur propre de u . Démontrer que v induit un endomorphisme de $\text{Ker}(u - \lambda Id)$ que l'on déterminera.

I.B.2) En déduire v , puis conclure.

I.B.3) Démontrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que $v = Q(u)$.

I.C- Soit A dans $\text{GL}_n(\mathbf{R})$.

I.C.1) Démontrer $A^T A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

I.C.2) En déduire qu'il existe un unique couple (O, S) dans $\mathcal{O}(n) \times S_n^{++}(\mathbf{R})$ tel que $A = OS$.

I.C.3) Déterminer les matrices O et S lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

I.D-

I.D.1) Démontrer que $\mathcal{O}(n)$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

I.D.2) Démontrer que $S_n^+(\mathbf{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

I.D.3) Démontrer que $\text{GL}_n(\mathbf{R})$ est une partie dense de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

I.D.4) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe un couple (O, S) dans $\mathcal{O}(n) \times S_n^+(\mathbf{R})$ tel que $A = OS$.
Un tel couple est-il unique ?

I.E- Soit φ l'application de $\mathcal{O}(n) \times S_n^{++}(\mathbf{R})$ dans $\text{GL}_n(\mathbf{R})$ définie par $\varphi(O, S) = OS$ pour tout couple (O, S) de $\mathcal{O}(n) \times S_n^{++}(\mathbf{R})$.

Démontrer que φ est bijective, continue et que sa réciproque est continue.

PARTIE II - Deux applications

II.A- Première application

Dans cette partie, A et B désignent deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose qu'il existe une matrice U carrée de taille n , inversible, à coefficients complexes, telle que $U\bar{U}^T = I_n$ et $A = UBU^{-1}$, où \bar{U} désigne la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de U .

II.A.1) Justifier $A^T = U(B^T)U^{-1}$.

II.A.2) On se propose de montrer qu'il existe une matrice P dans $GL_n(\mathbf{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$ et $A^T = PB^T P^{-1}$.

Pour cela, on note X et Y les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $U = X + iY$.

a) Démontrer qu'il existe μ dans \mathbf{R} tel que $X + \mu Y \in GL_n(\mathbf{R})$.

b) Démontrer $AX = XB$ et $AY = YB$.

c) Conclure.

II.A.3) On écrit P sous la forme $P = OS$, avec O dans $\mathcal{O}(n)$ et S dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$.

a) Démontrer $BS^2 = S^2B$, puis $BS = SB$.

b) En déduire qu'il existe O dans $\mathcal{O}(n)$ tel que $A = OBO^T$.

II.B- Seconde application

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On se propose de donner une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution X dans $GL_n(\mathbf{R})$ au système

$$(*) : \begin{cases} A^T A + X^T X &= I_n \\ A^T X - X^T A &= 0_n \end{cases}$$

II.B.1) Démontrer que si le système $(*)$ admet une solution dans $GL_n(\mathbf{R})$, alors les valeurs propres de $A^T A$ appartiennent à l'intervalle $]0; 1[$.

II.B.2) On suppose dans cette question que les valeurs propres de $A^T A$ appartiennent à l'intervalle $]0; 1[$.

a) Justifier que l'on peut chercher les solutions X de $(*)$ sous la forme $X = UH$, avec $U \in \mathcal{O}(n)$ et $H \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

b) Déterminer H .

c) Démontrer l'existence d'une solution X de $(*)$ appartenant à $GL_n(\mathbf{R})$.

PARTIE III - Valeurs propres d'une matrice

Pour p dans \mathbf{N}^* , on pose

$$A_p = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R}).$$

On note P_p le polynôme caractéristique de A_p .

III.A- Démontrer qu'à x réel fixé, la suite $(P_p(x))_{p \in \mathbf{N}^*}$ vérifie une relation linéaire d'ordre 2, que l'on précisera.

III.B- Soit x réel tel que $|2 - x| < 2$. Après avoir justifié l'existence d'un unique θ dans $]0; \pi[$ tel que $2 - x = 2 \cos(\theta)$, déterminer $P_p(x)$ en fonction de $\sin((p+1)\theta)$ et de $\sin(\theta)$.

III.C- Déterminer les valeurs propres de A_p .

III.D- Démontrer que A_p est diagonalisable, et en déterminer une base de vecteurs propres, en précisant pour chacun la valeur propre associée.

PARTIE IV

Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

IV.A– Démontrer qu'il existe une unique matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), f(M) = \text{tr}(AM)$.

Dans la suite, A désigne la matrice définie dans cette question IV.A.

IV.B–

IV.B.1) Justifier l'existence de $M_n = \sup \{f(O) \mid O \in \mathcal{O}(n)\}$.

IV.B.2) Justifier que $A^T A$ admet n valeurs propres positives μ_1, \dots, μ_n , comptées avec multiplicités.

IV.B.3) Démontrer $M_n = \sup \{\text{tr}(D\Omega) \mid \Omega \in \mathcal{O}(n)\}$, où D est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_n}$.

IV.B.4) En déduire $M_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k}$.

IV.C– Dans cette question, f désigne la forme linéaire définie par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), f(M) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n m_{i,j}$.

IV.C.1) Déterminer la matrice A telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), f(M) = \text{tr}(AM)$.

IV.C.2) Démontrer

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

IV.C.3) Déterminer les valeurs propres de $A^{-1} (A^{-1})^T$.

IV.C.4) Démontrer $M_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.

IV.C.5) Donner un équivalent de M_n lorsque n tend vers $+\infty$.

DEUXIÈME COMPOSITION – CENTRALE 2013

PARTIE I - Décomposition polaire d'un endomorphisme de \mathbf{R}^n

I.A.1) Soit M la matrice de u dans une base orthonormée. Alors M est symétrique si et seulement si u l'est. De plus si x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ alors $\langle u(x) | x \rangle = \lambda \|x\|^2$ et on en déduit le sens direct de l'assertion demandée. Réciproquement on dispose d'après le théorème spectral d'une base (e_1, \dots, e_n) d'orthodiagonalisation de u et alors, pour x dans E , on a $\langle u(x) | x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle e_i | x_i \rangle^2$ où λ_i est la valeur propre de u associée à e_i . Il en résulte que cette quantité est strictement positive si x est non nul et si le spectre de u est inclus dans \mathbf{R}_+^* . D'où l'équivalence cherchée : u est défini positif si et seulement si $M \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

I.A.2) Si S est symétrique réelle, d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable et donc son déterminant est le produit de ses valeurs propres, comptées avec multiplicité. Si son spectre est inclus dans \mathbf{R}_+^* , ce déterminant est donc strictement positif et en particulier non nul. Par conséquent S est inversible. On a de plus $I_n = (SS^{-1})^T = (S^{-1})^T S^T = (S^{-1})^T S$, i.e. $S^{-1} = (S^{-1})^T$ et donc S^{-1} est symétrique. Enfin le spectre de S^{-1} étant formé des inverses des éléments du spectre de S , $S^{-1} \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

I.B.1) Puisqu'on a $v^2 = u$ en particulier $vu = v^3 = uv$ et donc u et v commutent. Il en résulte que v laisse stable les espaces propres de u .

Comme v est auto-adjoint, d'après le théorème spectral il est diagonalisable et donc sa restriction à tout sous-espace stable l'est. Or si μ est une valeur propre de la restriction de v à $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$, alors μ^2 est une valeur propre de son carré, i.e. de la restriction de u et donc $\mu^2 = \lambda$. Comme v est défini positif, μ est strictement positif et donc $\mu = \sqrt{\lambda}$. Étant diagonalisable et ayant une seule valeur propre, la restriction de v étudiée est donc scalaire, i.e. $v|_{\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})} = \sqrt{\lambda} \text{Id}|_{\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})}$.

I.B.2) On en déduit qu'en notant p_λ le projecteur orthogonal sur $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$, i.e. d'après le théorème spectral parallèlement à la somme des autres sous-espaces propres de u , on a nécessairement

$$v = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \sqrt{\lambda} p_\lambda.$$

On en déduit que si v existe, il est unique. Réciproquement la formule précédente définit un endomorphisme de E , auto-adjoint puisque les projecteurs orthogonaux le sont et qu'une somme d'endomorphismes auto-adjoints l'est, de carré u d'après le théorème spectral et en particulier puisque $p_\lambda p_\mu = \delta_{\lambda, \mu} p_\lambda$ et $u = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda p_\lambda$ et donc les espaces propres sont ceux de u avec $\text{Ker}(v - \sqrt{\lambda} \text{Id}) =$

$\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$. Par conséquent le spectre de v est strictement positif, i.e. v est défini positif. D'où l'existence et l'unicité de v défini positif tel que $v^2 = u$.

I.B.3) Soit P un polynôme. On a alors $P(u) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} P(\lambda) p_\lambda$, puisque cette identité est linéaire en P , vraie pour $P = 1$ puisque u est (ortho-)diagonalisable, est une tautologie pour $P = X$ et est vraie pour $P = X^n$ avec $n > 1$ car $p_\lambda p_\mu = \delta_{\lambda, \mu} p_\lambda$. Soit maintenant P prenant la valeur $\sqrt{\lambda}$ en λ pour tout λ dans $\text{Sp}(u)$, ce qui est loisible puisque ce spectre est fini, par exemple par interpolation de LAGRANGE. On en déduit $P(u) = v$.

I.C.1) Par construction la matrice $A^T A$ est symétrique réelle et, pour X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on a $X^T A^T A X = \|AX\|^2$ en identifiant $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ à \mathbf{R}^n et donc, puisque le noyau de A est réduit au vecteur nul, $A^T A$ est défini positif, i.e. $A^T A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

I.C.2) On raisonne par analyse-synthèse. Soit donc (O, S) un tel couple. Il vient alors $A^T A = S^T O^T O S = S^2$ et donc S est l'unique élément de $S_n^{++}(\mathbf{R})$ tel que $S^2 = A^T A$ garanti par la question précédente et I.B. On a alors nécessairement $O = AS^{-1}$, ce qui montre qu'un tel couple est unique s'il existe. Soit alors S et O définis comme précédemment, on a $A = OS$, $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ et $O^T O = (S^{-1})^T A^T A S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n$, i.e. $O \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$. D'où l'existence et l'unicité de la décomposition polaire.

I.C.3) Dans ce cas on a

$$A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -6 \\ 0 & 36 & 0 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

dont des vecteurs propres sont $e_1 \pm e_3$ et e_2 , associés aux valeurs propres 10 ∓ 6 et 36 et dont une racine carrée définie positive est donc donnée par l'application qui admet la base orthonormée $((e_1 + e_3)/\sqrt{2}, (e_1 - e_3)/\sqrt{2}, e_2)$ comme base de diagonalisation, associée aux valeurs propres $2, 4$ et 6 , i.e.

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et donc

$$O = AS^{-1} = A \begin{pmatrix} 3/8 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 1/8 & 0 & 3/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix},$$

i.e. $O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

I.D.1) La trace et l'application $X \mapsto (X^T, X)$ sont linéaires donc continus car $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est de dimension finie et de même le produit est bilinéaire donc continu. Il en résulte que $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ est l'image réciproque d'un singleton fermé par une application continue, i.e. l'image réciproque de $\{I_n\}$ par $X \mapsto X^T X$, donc est fermé. Par ailleurs toute colonne d'une matrice orthogonale forme un vecteur de norme 1 pour la norme euclidienne et, en particulier, a des coefficients de valeur absolue inférieure à 1, i.e. $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ est inclus dans la boule unité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. D'après le théorème de HEINE-BOREL, puisque $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est de dimension finie, on en conclut que $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ est compact.

I.D.2) L'application $M \mapsto M^T - M$ étant linéaire, $S_n(\mathbf{R})$ en est le noyau et est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, qui est de dimension finie, et est donc fermé. On reprend la caractérisation de la question I.A.1 pour obtenir que M appartient à $S_n^+(\mathbf{R})$ si et seulement si, pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $X^T M X \geq 0$. Or l'application $M \mapsto X^T M X$ est linéaire donc continue et ainsi, à X fixé l'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid X^T M X \geq 0\}$ est l'image réciproque du fermé \mathbf{R}_+ de \mathbf{R} et est donc fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On en déduit que $S_n^+(\mathbf{R})$ est intersection de fermés et donc $S_n^+(\mathbf{R})$ est fermé.

Remarque : on a $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} \mid \forall \varepsilon > 0, x + \varepsilon > 0\}$ et, pour ε réel, $M \in S_n(\mathbf{R}) \implies M + \varepsilon I_n \in S_n(\mathbf{R})$ et $\text{Sp}(M + \varepsilon I_n) = \{\lambda + \varepsilon \mid \lambda \in \text{Sp}(M)\} = \text{Sp}(M) + \varepsilon$. À partir de I.A.1, on en déduit que M dans $S_n(\mathbf{R})$ appartient à $S_n^+(\mathbf{R})$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ on a $M + \varepsilon I_n \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, i.e. si et seulement si pour tous $\varepsilon > 0$ et X non nul dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ on a $X^T M X + \varepsilon \|X\|^2 > 0$ ou encore pour tout X non nul dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ on a $X^T M X \geq 0$.

I.D.3) Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et χ son polynôme caractéristique. Puisqu'il n'a qu'un nombre fini de racines on dispose de r dans \mathbf{R}_+^* tel que $0 < |\varepsilon| < r \implies \chi(\varepsilon) \neq 0$, i.e. $0 < |\varepsilon| < r \implies M - \varepsilon I_n \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$.

On en déduit que $\boxed{\text{GL}_n(\mathbf{R}) \text{ est dense dans } \mathcal{M}_n(\mathbf{R})}$.

I.D.4) D'après les questions précédentes on dispose de $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$, $(O_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et $(S_k)_{k \in \mathbf{N}}$ des suites à valeurs dans $\text{GL}_n(\mathbf{R})$, $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ et $S_n^{++}(\mathbf{R})$ respectivement et telles que $\lim A_k = A$ et $\forall k \in \mathbf{N} A_k = O_k S_k$. Quitte à extraire, par compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$, on peut supposer $(O_k)_{k \in \mathbf{N}}$ convergente dans $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$. Soit alors O sa limite. Par continuité de la transposition on en déduit $\lim O_k^T = O^T$ et par continuité du produit $\lim O_k^T A_k = O^T A$. Autrement dit $\lim S_k$ existe et vaut $O^T A$. On note S cette matrice. On a alors $S = \lim S_k$. Comme (S_k) est à valeurs dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$ donc dans $S_n^+(\mathbf{R})$, et que ce dernier est fermé, on en déduit $S \in S_n^+(\mathbf{R})$. D'où $\boxed{\text{l'existence de la décomposition polaire}}$.

En général la décomposition n'est pas unique. Par exemple la matrice nulle se décompose en une matrice orthogonale arbitraire et une matrice symétrique nulle. Si on étudie les endomorphismes associés on a $\text{Ker}(S) = \text{Ker}(A)$ puisque $\mathcal{O}_n(\mathbf{R}) \subset \text{GL}_n(\mathbf{R})$ et $\text{Im}(S) = \text{Ker}(A)^\perp$, puisque S est symétrique. On en déduit que O est uniquement déterminé sur $\text{Ker}(A)^\perp$ et arbitraire sur $\text{Ker}(A)$. On peut par exemple multiplier O à droite par une matrice orthogonale telle que sa restriction à $\text{Ker}(A)^\perp$ est l'identité et sa restriction à $\text{Ker}(A)$ est un élément quelconque de $\mathcal{O}(\text{Ker}(A))$. Autrement dit

$\boxed{\text{la décomposition polaire est unique si et seulement si } A \text{ est inversible}}$.

Remarque : ce n'est pas demandé, mais S est unique car la racine carrée positive d'un endomorphisme auto-adjoint positif est unique, avec les mêmes arguments que dans le cas défini positif.

I.E– D'après la question I.B φ est bijective. Le produit étant continu sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, sa restriction l'est aussi, i.e. φ est continu. On montre que sa réciproque l'est également en utilisant le critère séquentiel de continuité.

Soit $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$, $(O_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et $(S_k)_{k \in \mathbf{N}}$ des suites à valeurs dans $\text{GL}_n(\mathbf{R})$, $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ et $S_n^{++}(\mathbf{R})$ respectivement et telles que $\lim A_k = A$ et $\forall k \in \mathbf{N} A_k = O_k S_k$. Soit Ω une valeur d'adhérence de la suite (O_k) . On dispose de ψ strictement croissante de \mathbf{N} dans lui-même telle que $\Omega = \lim O_{\psi(k)}$. Comme on a $S_k = O_k^T A_k$ pour tout entier k , on en déduit que $(S_{\psi(k)})$ converge, disons vers Σ . Puisque $S_n^+(\mathbf{R})$ est fermé, $\Sigma \in S_n^+(\mathbf{R})$. De plus, par continuité du déterminant $\det(\Sigma) = \pm \det(A) \neq 0$ et donc $\Sigma \in S_n^{++}(\mathbf{R})$. Or, par continuité du produit, $\Sigma^2 = \lim S_{\psi(k)}^2$, i.e. $\Sigma^2 = \lim A_k^T A_k = A^T A$. Par unicité de la racine carrée dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$, $\Sigma = S$ et donc $\Omega = O$. Il en résulte que (O_k) admet O comme unique valeur d'adhérence. Puisque $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ est compact, on en déduit, grâce à la réciproque partielle du théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, $\lim O_k = O$. Et alors $\lim S_k = \lim O_k^T A_k = O^T A = S$, i.e. $\lim(O_k, S_k) = (O, S)$ et donc $\boxed{\varphi \text{ est bijective et bicontinue}}$.

PARTIE II - Deux applications

II.A.1) Par hypothèse sur U , on a $A = UB\bar{U}^T$ et donc, en prenant la transposée et la conjuguée, $\bar{A}^T = U\bar{B}^T\bar{U}^T$. Comme A et B sont à coefficients réels, B^T aussi et donc $\boxed{A^T = U(B^T)U^{-1}}$.

II.A.2) a) Puisque le déterminant est une application polynomiale de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans \mathbf{C} , l'application $\mu \mapsto \det(X + \mu Y)$ est polynomiale de \mathbf{C} dans \mathbf{C} . Puisque U est inversible, cette application est non nulle en i et donc le polynôme associé est non nul, et ainsi la fonction polynomiale restreinte à \mathbf{R} n'est pas nulle non plus, i.e. $\boxed{\text{il existe } \mu \text{ dans } \mathbf{R} \text{ tel que } X + \mu Y \in \text{GL}_n(\mathbf{R})}$.

b) Par hypothèse on a $AU = UB$, soit $AX + iAY = XB + iYB$. En prenant les parties réelle et imaginaire, il vient $\boxed{AX = XB \text{ et } AY = YB}$.

c) Par linéarité, avec μ réel choisi comme en II.A.2.a et en posant $P = X + \mu Y$, on a $P \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ et $AP = PB$. Puisque P est inversible on a donc aussi $\boxed{A = PBP^{-1}}$. On a également, en vertu de la

question II.A.1, $A^T = U(B^T)U^{-1}$, donc $A^T U = U(B^T)$, puis $A^T X = X(B^T)$ et $A^T Y = Y(B^T)$, et ainsi $A^T P = P(B^T)$, et enfin $A^T = PB^T P^{-1}$.

II.A.3) a) En transposant cette dernière relation, on obtient $A = (P^{-1})^T B P^T$ et il vient $P B P^{-1} = (P^{-1})^T B P^T$, puis $P^T P B = B P^T P$. Or on a $P^T P = S^T O^T O S = S^2$ puisque O est orthogonal et S symétrique. On conclut $B S^2 = S^2 B$. D'après la question I.A.1 et puisque S est dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$, l'endomorphisme canoniquement associé à S , noté v , est auto-adjoint défini positif. L'endomorphisme u donné par $u = v^2$ est alors associé à S^2 dans la base canonique, i.e. à $S^T S$, et est donc auto-adjoint défini positif d'après les questions I.A.1 et I.C.1. D'après la question I.B.3 on dispose de Q dans $\mathbf{R}[X]$ tel que $v = Q(u)$ et donc, en passant aux matrices associées dans la base canonique, $S = Q(S^2)$. Comme B commute à S^2 , il commute à tout polynôme en S^2 , et donc à S , i.e. $B S = S B$.

b) Comme on a $A = P B P^{-1} = O S B S^{-1} O^{-1}$, $S B = B S$ et $O^{-1} = O^T$, il vient $A = O B O^T$, et donc il existe O dans $\mathcal{O}(n)$ tel que $A = O B O^T$.

II.B.1) Soit X une solution du système (*) dans $GL_n(\mathbf{R})$, alors on a $A^T A = I_n - X^T X$. D'après la question I.C.1, $X^T X$ est une matrice symétrique définie positive et donc son spectre est inclus dans \mathbf{R}_+^* . Il en résulte que celui de $I_n - X^T X$ est inclus dans $] -\infty; 1[$. Comme $A^T A$ est symétrique réelle, elle est orthodiagonalisable. De plus si U est un de ses vecteurs propres et qu'on note λ la valeur propre associée, on a $U^T A^T A U = \lambda \|U\|^2 = \|A U\|^2$, de sorte que λ est positif puisque $\|U\|^2$ est strictement positif et $\|A U\|^2$ positif. On en conclut $Sp(A^T A) \subset [0; 1[$.

II.B.2) a) Soit X une solution de (*) et V dans le noyau de X . On a alors $V = A^T A V + X^T X V = A^T A V$ et donc $V = 0$ puisque 1 n'est pas valeur propre de $A^T A$. On en déduit $X \in GL_n(\mathbf{R})$ et donc, d'après la question I.C.2, on peut écrire $X = U H$, avec $U \in \mathcal{O}(n)$ et $H \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

b) Avec les notations et hypothèses précédentes, le système (*) est équivalent à $H^2 = I_n - A^T A$ et $A^T U H \in S_n(\mathbf{R})$. En particulier, puisque le spectre de $I_n - A^T A$ est dans $]0; 1[$ et donc $I_n - A^T A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, il résulte de la question I.B que H est un polynôme en $I_n - A^T A$ et est l'unique matrice vérifiant $H \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ et $H^2 = I_n - A^T A$.

c) D'après la question I.D.4, on dispose de (O, S) dans $\mathcal{O}(n) \times S_n^+(\mathbf{R})$ tel que $A = O S$. En particulier on a $A^T A = S^2$. Avec les notations précédentes, on en déduit que H est un polynôme en S . En particulier H commute à S . Il en résulte que $O H$ est solution de (*) puisqu'on a $A^T A + H^2 = I_n$ et $A^T O H = S H = H S = H^T O^T A = (O H)^T A$. D'où

l'existence d'une solution X de (*) appartenant à $GL_n(\mathbf{R})$.

PARTIE III - Valeurs propres d'une matrice

III.A– Soit x un réel fixé et p un entier strictement supérieur à 2. En développant par rapport à la première colonne, il vient

$$P_p(x) = (x - 2)P_{p-1}(x) - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x - 2 & 1 & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & 0 & 1 & x - 2 \end{vmatrix}$$

et donc, en développant par rapport à sa première ligne le dernier déterminant, on en déduit que la suite $(P_p(x))_{p \in \mathbf{N}^*}$ vérifie la relation linéaire d'ordre 2 $\forall p \in \mathbf{N}^*, P_{p+2}(x) = (x - 2)P_{p+1}(x) - P_p(x)$.

III.B– Puisque \cos réalise une bijection de $]0; \pi[$ sur $] - 1; 1[$ et qu'on a $\frac{1}{2} |2 - x| < 1$, on dispose d'un

unique θ dans $]0; \pi[$ tel que $2 - x = 2 \cos(\theta)$. La relation précédente s'écrit alors, en notant $u_p = P_p(x)$, $u_{p+2} + 2 \cos(\theta)u_{p+1} + u_p = 0$. En convenant $u_0 = 1$, la relation de récurrence est vraie pour p dans \mathbf{N} . On en déduit que (u_p) est combinaison linéaire des suites géométriques de raison $-e^{i\theta}$ et $-e^{-i\theta}$, puisque ces deux quantités sont distinctes et racines du polynôme $X^2 + 2 \cos(\theta)X + 1$. D'après la relation d'EULER, (u_p) est donc combinaison linéaire des suites $((-1)^p \cos(p\theta))$ et $((-1)^p \sin(p\theta))$. Puisque $\sin(\theta)$ est non nul, on peut écrire $u_0 = 1 = \frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta)}$ et $u_1 = -2 \cos(\theta) = -\frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)}$ et, en remarquant que l'expression $(-1)^p \frac{\sin((p+1)\theta)}{\sin(\theta)}$ est combinaison linéaire des suites précédentes, avec les coefficients 1

et $\cot(\theta)$, on en déduit par unicité de l'écriture
$$P_p(x) = (-1)^p \frac{\sin((p+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

III.C– La question précédente montre que les réels $2 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right)$, i.e. $4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(p+1)}\right)$, sont valeurs propres de A_p pour k dans $[[1; p]]$. Comme \sin réalise une bijection de $]0; \frac{\pi}{2}[$ sur $]0; 1[$, et par bijectivité de la fonction carré sur $]0; 1[$, on en déduit que ces quantités fournissent p valeurs propres distinctes de A_p , puis que ce sont exactement les valeurs propres de A_p et que leur multiplicité est

1 : les valeurs propres de A_p sont les $4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(p+1)}\right)$ pour $k \in [[1; p]]$.

III.D– Puisque A_p est symétrique réelle, A_p est diagonalisable. La question précédente fournit les valeurs propres. Si x est une telle valeur propre et $(a_j)_{1 \leq j \leq p}$ est un vecteur propre associé, alors en posant $a_0 = a_{p+1} = 0$, on a $\forall j \in]0; p - 1[$ $a_{j+2} - (2 - x)a_{j+1} + a_j = 0$. On reconnaît les $p + 1$ premiers termes d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Comme un vecteur propre n'est pas nul et qu'on a $a_0 = 0$, a_1 n'est pas nul et on peut supposer $a_1 = \sin(\theta)$, en reprenant la notation $2 - x = 2 \cos(\theta)$ et $\theta = \frac{k\pi}{2(p+1)}$. La suite donnée par $(\sin(j\theta))_{0 \leq j \leq p+1}$ coïncide avec $(a_j)_{0 \leq j \leq p+1}$ en les deux premiers termes et est également combinaison linéaire des suites géométriques de raisons $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. On en déduit qu'une base de vecteurs propres de A_p est donnée par

$$\left(\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) \\ \sin\left(\frac{2k\pi}{p+1}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{pk\pi}{p+1}\right) \end{pmatrix} \right)_{1 \leq k \leq p}, \text{ avec les valeurs propres respectives } \left(4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(p+1)}\right) \right)_{1 \leq k \leq p}.$$

PARTIE IV

IV.A– Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. L'application $M \mapsto \text{tr}(AM)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ puisque le produit est bilinéaire et la trace est linéaire. Elle est égale à f si et seulement si elle coïncide avec f sur la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, i.e. en notant $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ cette base canonique, si et seulement si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec $\forall (i, j) \in [[1; n]]^2$, $a_{ij} = f(E_{ji})$. Par conséquent il existe une unique matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $f(M) = \text{tr}(AM)$.

IV.B.1) Puisque $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est de dimension finie, f est continu en tant que forme linéaire. Il résulte de I.D.1 et du théorème de WEIERSTRASS que l'image de $\mathcal{O}(n)$ par f est une partie compacte. D'où en particulier l'existence de $M_n = \sup \{f(O) \mid O \in \mathcal{O}(n)\}$.

IV.B.2) L'argument a déjà été donné en II.B.1. Comme $A^T A$ est symétrique réelle, elle est orthodiagonalisable. De plus si U est un de ses vecteurs propres et qu'on note λ la valeur propre associée, on a $U^T A^T A U = \lambda \|U\|^2 = \|AU\|^2$, de sorte que λ est positif puisque $\|U\|^2$ est strictement positif et $\|AU\|^2$ positif. On en conclut que

$A^T A$ admet n valeurs propres positives comptées avec multiplicités.

IV.B.3) D'après la question I.D.4 on dispose de (O, S) dans $\mathcal{O}(n) \times S_n^+(\mathbf{R})$ tel que $A = OS$. Puisque S est symétrique réelle, d'après le théorème spectral on dispose de P dans $\mathcal{O}(n)$ tel que $P^T SP$ est diagonal. Comme on a aussi $A^T A = S^2$, $P^T A^T A P$ est diagonal et est le carré de $P^T SP$. En particulier, par invariance du spectre par changement de base, la diagonale de $P^T A^T A P$ est formée des $(\mu_k)_{1 \leq k \leq n}$ et donc celle de $P^T SP$ est formée des $(\sqrt{\mu_k})_{1 \leq k \leq n}$. Puisqu'une matrice de permutation est orthogonale, quitte à changer P , on peut supposer $P^T SP = D$ et donc $A = OPDP^T$. Par commutativité de la trace il vient, pour M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $f(M) = \text{tr}(AM) = \text{tr}(DP^T MOP)$. Comme $\mathcal{O}(n)$ est un groupe l'application $M \mapsto P^T MOP$ est une bijection de $\mathcal{O}(n)$ sur lui-même et donc $M_n = \sup \{ \text{tr}(D\Omega) \mid \Omega \in \mathcal{O}(n) \}$.

IV.B.4) Comme les vecteurs colonnes d'une matrice orthogonale sont unitaires, ses coefficients diagonaux sont de valeur absolue inférieure à 1 et donc, pour Ω dans $\mathcal{O}(n)$, $\text{tr}(D\Omega) \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k}$. Puisqu'il y a

égalité lorsque $\Omega = I_n$, on conclut $M_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k}$.

IV.C.1) D'après l'argument développé lors de la résolution de la question IV.A, on obtient A en évaluant f

sur la base canonique. Il vient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

IV.C.2) En notant $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $N^n = 0$ et $A = \sum_{k=0}^{n-1} N^k$. Il en résulte $(I_n - N)A = I_n - N^n = I_n$,

i.e. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

IV.C.3) On reprend les notations de la partie III, notamment A_n , x et θ , avec la supposition $|2 - x| < 2$. On note également $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Il vient $A^{-1} (A^{-1})^T = A_n - E_{nn}$ et donc, en notant Q le polynôme caractéristique de $A^{-1} (A^{-1})^T$, $Q(x) = P_n(x) + P_{n-1}(x)$ par multilinéarité du déterminant puisque toutes les colonnes de $xI_n - A_n + E_{nn}$ sont celles de $xI_n - A_n$ à l'exception de la dernière qui est la somme de celle de $xI_n - A_n$ et du n^e vecteur de la base canonique. Il vient $Q(x) = \frac{(-1)^n}{\sin(\theta)} (\sin((n+1)\theta) - \sin(n\theta))$ et donc $Q(x)$ est nul dès que $(n+1)\theta \equiv \pi - n\theta \pmod{2\pi}$, i.e. $(2n+1)\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$. En particulier Q admet les $2 - 2 \cos\left(\frac{2k+1}{2n+1}\pi\right)$, avec $0 \leq k < n$, comme racines. Puisque ces n racines sont distinctes par injectivité de \cos sur $]0; \pi[$, on en déduit que les valeurs propres de $A^{-1} (A^{-1})^T$ sont $\text{les } 4 \sin^2\left(\frac{2k+1}{2n+1}\frac{\pi}{2}\right) \text{ pour } 0 \leq k < n$.

IV.C.4) Le spectre de l'inverse est donné par les inverses des éléments du spectre, on en déduit que le spectre de $A^T A$ est donné par les inverses des valeurs propres précédentes et donc, d'après la question IV.B.4 et par positivité de \sin sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, $M_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 \sin\left(\frac{2k+1}{2n+1}\frac{\pi}{2}\right)}$. Pour k dans $]0; n-1[$, on a $\sin\left(\frac{2k+1}{2n+1}\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2k+1}{2n+1}\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{n-k}{2n+1}\pi\right)$ et donc, par réindexation,

$$M_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}.$$

IV.C.5) On note f la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{2 \cos(x)}$. C'est une fonction continue, croissante, positive et de primitive F donnée par $F(x) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1+\sin}{1-\sin}\right)$. Par croissance de l'intégrale, il vient par comparaison entre une somme et une intégrale via la relation de CHASLES :

$$\int_0^{n\pi/(2n+1)} f(x) dx \leq \frac{\pi}{2n+1} M_n \leq \int_0^{n\pi/(2n+1)} f(x) dx + \frac{\pi}{2n+1} f\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right).$$

On a $F(0) = 0$, $\cos(x) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{\pi}{2} - x$ et $1 - \sin(x) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2$ d'après la formule de TAYLOR. On en déduit $F(x) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ puis, en remarquant $\frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$,

$$\frac{1}{2} \ln(n) + o(\ln(n)) \leq \frac{\pi}{2n+1} M_n \leq \frac{1}{2} \ln(n) + o(\ln(n)) + O(1)$$

et donc, par encadrement, $M_n \sim \frac{n \ln(n)}{\pi}$.