Centrale-Supélec 2015 - PSI - Première composition

Dans ce problème, nous étudions le processus de Galton-Watson qui permet entre autres de modéliser le développement d'une population. Ce processus est par exemple utilisé en biologie ou en physique nucléaire.

Dans tout le problème, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, on note G_X sa fonction génératrice. On rappelle que c'est la somme de la série entière $\sum \mathbf{P}(X = n)t^n$, dont le rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

PARTIE I - Étude d'une suite récurrente

On considère une fonction f de classe C^2 sur $[0;1]$ à valeurs dans $[0;1]$ telle que f' et f'' soient à valeurs positives. On suppose $f(1) = 1$, $f'(0) < 1$ et $f''(1) > 0$.

On considère de plus la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dénie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On pose $m = f'(1)$.

I.A –

I.A.1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante, puis qu'elle est convergente. On note ℓ sa limite.

I.A.2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une plus petite solution.
Dans toute la suite, on la notera x_f.

I.A.3. Montrer $\ell = x_f$.

I.B – On suppose $m > 1$. Montrer $x_f \in [0; 1[$.

I.C – On suppose maintenant $m \leq 1$. Montrer $x_f = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \neq 1$.

I.D – Dans cette question, on suppose $m = 1$.

I.D.1. On pose, pour $n \in \mathbf{N}$, $\varepsilon_n = 1 - u_n$. Montrer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n}\right) = \frac{f''(1)}{2}$.

I.D.2. En déduire que, quand n tend vers l'infini, $1 - u_n \sim \dfrac{2}{f''(1)n}$.

I.E – On suppose maintenant $m < 1$ et on pose encore, pour $n \in \mathbf{N}$, $\varepsilon_n = 1 - u_n$.

I.E.1. Montrer que la série de terme général ε_n est absolument convergente et en déduire la convergence de celle de terme général $\ln\left(\dfrac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right)$.

I.E.2. En déduire qu'il existe $c > 0$ tel que, quand n tend vers $+\infty$, $1 - u_n \sim c\,m^n$.

PARTIE II - Formule de Wald

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de même loi à valeurs dans $\mathbf{N}$ et T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, telles que $(T, X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ soit une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes. On note G_X la fonction génératrice commune à toutes les X_n.

On pose, pour $\omega \in \Omega$, $S_0(\omega) = 0$ et, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n(\omega) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)$, puis $S(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$.

II.A – On souhaite démontrer l'égalité $G_S = G_T \circ G_X$.

II.A.1. Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

II.A.2. Pour $k \in \mathbf{N}$, montrer $G_{S_k} = (G_X)^k$.

II.A.3. Montrer, pour $t \in [-1;1]$ et $K \in \mathbf{N}$,

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{K} \mathbf{P}(T=k) G_X(t)^k + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbf{P}(T=k)\mathbf{P}(S_k = n) t^n \right) .$$

II.A.4. Pour $K \in \mathbf{N}$ et $t \in [0;1[$, montrer

$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbf{P}(T=k)\mathbf{P}(S_k = n) t^n \right) \leq \frac{1}{1-t} \sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbf{P}(T=k)$$

II.A.5. Conclure.

II.B – En déduire que, si T et les X_n sont d'espérance finie, alors S aussi et $\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(T)\,\mathbf{E}(X_1)$.

II.C – Lors d'une ponte, un insecte pond un nombre aléatoire d'œufs suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Ensuite la probabilité qu'un œuf donné devienne un nouvel insecte est $\alpha \in]0;1[$.

II.C.1. Rappeler la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

II.C.2. Déterminer la loi du nombre d'insectes issus de la ponte.

PARTIE III - Processus de Galton-Watson

Soit μ une loi de probabilité sur $\mathbf{N}$, i.e. une suite $(p_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de réels positifs de somme 1. On suppose $p_0 + p_1 < 1$ et que toute variable aléatoire de loi μ possède une espérance égale à m et une variance. On étudie un individu qui a un certain nombre de descendants. Ces descendants ont également chacun (indépendamment les uns des autres) un certain nombre de descendants et ainsi de suite. Afin de modéliser la situation, on se donne des variables aléatoires $(X_{n,i})_{(n,i)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}^*}$, indépendantes et suivant toutes la loi μ, on pose Y_0 la variable certaine égale à 1 et, pour $n \in \mathbf{N}$ et $\omega \in \Omega$,

$$\begin{cases} Y_{n+1}(\omega) = 0 & \text{si } Y_n(\omega) = 0 \\ Y_{n+1}(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{Y_n(\omega)} X_{n,i}(\omega) & \text{si } Y_n(\omega) \neq 0 \,. \end{cases}$$

Ainsi Y_n représente le nombre d'individus à la génération n : s'il n'y a pas d'individu à la génération n, il n'y en a pas non plus à la génération suivante et sinon, le nombre de descendants du i-ème individu de la génération n est égal à $X_{n,i}$. On dit qu'il y a extinction lorsqu'il existe un entier n tel que $Y_n = 0$.

On note f la fonction génératrice de la loi μ (et donc de chacune des variables $X_{n,i}$) et, pour $n \in \mathbf{N}$, φ_n la fonction génératrice de la variable aléatoire Y_n. En particulier $\varphi_0 = \mathrm{Id}$.

III.A – - Probabilité d'extinction

III.A.1. Montrer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ f$.

III.A.2. Exprimer, pour $n \in \mathbf{N}$, l'espérance de Y_n en fonction de m et de n.

III.A.3. a) Vérifier que la probabilité d'extinction est égale à la limite de la suite $(\varphi_n(0))_{n\geq 0}$.

b) Vérifier qu'on peut appliquer les résultats de la partie I à la suite $(\varphi_n(0))_{n\geq 0}$.

III.A.4. Si $m \leq 1$, montrer que la probabilité d'extinction est égale à 1.

On définit alors le temps T d'extinction par $T(\omega) = \min \{n \in \mathbf{N} \mid Y_n(\omega) = 0\}$.

III.B – - Cas sous-critique $m < 1$

On suppose dans cette question $m < 1$.

III.B.1. Vérifier que T est défini sur un ensemble de probabilité 1 et admet une espérance.

III.B.2. Montrer, pour tout entier n, $\mathbf{P}(Y_n \geq 1) \leq m^n$ et $\mathbf{E}(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(T > k)$, puis en déduire une majoration de $\mathbf{E}(T)$.

III.C – - Étude de la lignée

Dans cette question, on suppose $m \leq 1$. On note, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $Z_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} Y_i$ et $Z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$.

III.C.1. Montrer que Z est une variable aléatoire définie sur un ensemble de probabilité 1.

III.C.2. a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $(\mathbf{P}(Z_n \leq k))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite convergente. Déterminer sa limite. En déduire que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $(\mathbf{P}(Z_n = k))_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers $\mathbf{P}(Z = k)$.

b) En déduire que la suite de fonctions (G_{Z_n}) converge simplement vers G_Z sur $]-1; 1]$.

III.C.3. a) Exprimer G_{Z_1} en fonction de f.

b) On admet que, pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2 et pour tout $s \in [0; 1]$, $G_{Z_n}(s) = sf(G_{Z_{n-1}}(s))$. En déduire, pour tout $s \in [0; 1[$, $G_Z(s) = sf(G_Z(s))$.

c) Montrer que Z est d'espérance finie si et seulement si $m < 1$. Calculer l'espérance lorsque c'est le cas.

PARTIE IV - Un exemple

On suppose dans cette partie que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $p_k = \dfrac{1}{2^{k+1}}$.

IV.A – Exprimer, pour $t \in [0; 1]$, $f(t)$ et calculer m.

IV.B – Vérifier, pour tout $t \in [0; 1[$, $\varphi_n(t) \neq 1$.

On peut donc poser $a_n(t) = \dfrac{1}{\varphi_n(t) - 1}$.

IV.C – Montrer que, pour $t \in [0; 1[$, la suite $(a_n(t))_{n \in \mathbf{N}}$ est arithmétique.

IV.D – En déduire, pour $t \in [0; 1[$ et $n \in \mathbf{N}$, $\varphi_n(t) = \dfrac{n + (1-n)t}{1 + n - nt}$.

IV.E – Exprimer, pour $(n, k) \in \mathbf{N}^2$ $\mathbf{P}(Y_n = k)$ en fonction de n et k.

IV.F – Exprimer, en fonction de $n \in \mathbf{N}^*$, la probabilité de l'événement $(T > n)$. La variable T admet-elle une espérance ?

IV.G – Exprimer, pour $s \in [0; 1[$, $G_Z(s)$ en fonction de s. En déduire la loi de Z.

PARTIE V - Cas surcritique

On suppose dans cette partie $m > 1$.

On étudie un problème légèrement différent : k étant un entier strictement positif fixé, on suppose qu'il y a k individus à la génération 0 ; ensuite tout se passe comme précédemment.

On note W_n le nombre dindividus à la n-ième génération et on définit u_n la probabilité que la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ prenne la valeur k pour la première fois au rang n :

$$u_n = \mathbf{P}\left((W_n = k) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} (W_i \neq k)\right)\right) .$$

Pour n et r entiers naturels non nuls, on définit de même $u_n^{(r)}$ comme la probabilité pour que la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ prenne la valeur k pour la r-ième fois au rang n.

V.A – Vérifier que les séries $\sum\limits_{n\geq 1} u_n s^n$ et $\sum_{n\geq 1} u_n^{(r)} s^n$ convergent quand $s \in [-1; 1]$.

On peut donc définir pour $s \in [-1; 1]$, $U(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n s^n$ et $U_r(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(r)} s^n$.

V.B –

V.B.1. Montrer $\mathbf{P}(W_1 > k) > 0$.

V.B.2. Montrer que la probabilité que la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ ne prenne pas la valeur k est non nulle ; on note u cette probabilité. *On pourra étudier séparément les cas $p_0 = 0$ et $p_0 > 0$.*

V.C –

V.C.1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et r un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer la relation

$$u_n^{(r)} = \sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}^{(r-1)} .$$

V.C.2. En déduire, pour tout entier r strictement positif, $U_r = U^r$ (où $U^r = U \times \cdots \times U$, r fois).

V.D –

V.D.1. Montrer que la probabilité que la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ prenne la valeur k une infinité de fois est nulle.

V.D.2. Montrer qu'il en est de même pour la suite $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

V.E – Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'évènements tous de probabilité 1. Montrer $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \overline{A_n}\right) = 0$.

Qu'en déduit-on pour $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n\right)$?

V.F – Soit α la probabilité qu'il y ait extinction et β la probabilité que la suite (Y_n) diverge vers l'infini. Montrer $\alpha + \beta = 1$.