Deuxième épreuve
Centrale-Supélec 2016 - MP

Le problème étudie quelques propriétés de variables aléatoires réelles finies de la forme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k X_k$, où les a_k sont des réels et les X_k sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\{1,-1\}$.
La première partie établit des résultats sur des intégrales, utilisés dans les parties suivantes.
À partir de la deuxième partie, on suppose donnée une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$, à valeurs dans $\{1,-1\}$ et vérifiant

$$\forall k\in\mathbf{N}^*,\quad \mathbf{P}(X_k=1)=\mathbf{P}(X_k=-1)=\frac{1}{2}.$$

PARTIE I - Suites et intégrales

I.A - Étude d'une intégrale à paramètre

Pour x dans $\mathbf{R}_+$, on pose

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}\,\mathrm{d}t\,.$$

I.A.1) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbf{R}_+$ et de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^*$.

I.A.2) Déterminer les limites de f et f' en $+\infty$.

I.A.3) Exprimer f'' sur $\mathbf{R}_+^*$ à l'aide de fonctions usuelles et en déduire

$$\forall x\in\mathbf{R}_+^*,\quad f'(x)=\ln(x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\,.$$

I.A.4) Montrer

$$\begin{cases}\forall x\in\mathbf{R}_+^*,\quad f(x)=x\ln(x)-\dfrac{1}{2}x\ln(x^2+1)-\arctan(x)+\dfrac{\pi}{2}\\ f(0)=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

I.A.5) Montrer

$$\forall s\in\mathbf{R},\quad |s|=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

I.B - Étude d'une suite d'intégrales

Dans cette section, on étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\quad u_n=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos^n(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

I.B.1) Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et préciser la monotonie de la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}^*}$.

I.B.2) Montrer $u_1=u_2=\dfrac{\pi}{2}$.

I.C - Calcul d'un équivalent de u_n

I.C.1) Montrer

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\quad u_n=\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}v_n \text{ avec } v_n=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos^n\left(\sqrt{2u/n}\right)}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\,.$$

I.C.2) Montrer

$$\forall(n,u)\in\mathbf{N}^*\times\,]0;1]\,,\quad \left|1-\cos^n\left(\sqrt{2u/n}\right)\right|\le u\,.$$

I.C.3) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ admet une limite finie ℓ vérifiant

$$\ell = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\,.$$

I.C.4) On admet la relation $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

Conclure $u_n \sim \sqrt{\dfrac{n\pi}{2}}$.

PARTIE II - Autour du pile ou face

Dans cette partie, comme il est indiqué dans le préambule, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{1,-1\}$ et telles que, pour tout $k\in\mathbf{N}^*$,

$$\mathbf{P}\left(X_k=1\right)=\mathbf{P}\left(X_k=-1\right)=\frac{1}{2}\,.$$

Pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, on pose $S_n = X_1+\cdots+X_n$.
L'espérance d'une variable aléatoire réelle finie Z est notée $\mathbf{E}\left(Z\right)$ et sa variance $\mathrm{V}\left(Z\right)$.

II.A - Étude de $E(|S_n|)$

II.A.1) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

II.A.2) Soit S et T deux variables aléatoires réelles finies indépendantes définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$. On suppose que T et $-T$ ont même loi.
Montrer $\mathbf{E}\left(\cos(S+T)\right)=\mathbf{E}\left(\cos(S)\right)\mathbf{E}\left(\cos(T)\right)$.

II.A.3) On considère la fonction φ_n de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\varphi_n(t)=\mathbf{E}\left(\cos(S_n t)\right)$ pour tout réel t.
Montrer que $\varphi_n(t)=\cos^n(t)$ pour tout entier n dans $\mathbf{N}^*$ et tout réel t.

II.A.4) Montrer, pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{E}\left(|S_n|\right)=\dfrac{2}{\pi}u_n$.
On utilisera l'expression intégrale de la valeur absolue obtenue à la question I.A.5.

II.A.5) Déduire de la question précédente que, pour tout n dans $\mathbf{N}$, $u_{2n+1}=u_{2n+2}$.

II.B - Étude de $\dfrac{S_n}{n}$

On se propose de démontrer que la suite $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0, c'est-à-dire qu'il existe un événement négligeable $\mathcal{Z}$ dans $\mathcal{A}$ tel que

$$\forall\omega\in\Omega\setminus\mathcal{Z}\,,\quad \lim\frac{S_n(\omega)}{n}=0\,.$$

Pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, on pose

$$U_n=\left(\frac{S_n}{n}\right)^4 \text{ et } \mathcal{Z}_n=\left\{\omega\in\Omega\;\middle|\;\exists k\geq n\ U_k(\omega)\geq\frac{1}{\sqrt{k}}\right\}\,.$$

II.B.1) Montrer $\mathbf{E}\left(S_n^4\right)=3n^2-2n$ pour tout n dans $\mathbf{N}^*$.

II.B.2) Montrer, pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}\left(U_n\geq\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\leq\dfrac{3}{n^{3/2}}$.

II.B.3) Montrer $\mathcal{Z}_n\in\mathcal{A}$ pour tout n dans $\mathbf{N}^*$ et $\lim\mathbf{P}\left(\mathcal{Z}_n\right)=0$.

II.B.4) En considérant $\mathcal{Z}=\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*}\mathcal{Z}_n$, montrer que $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$ converge presque sûrement vers 0.

PARTIE III - D'autres sommes aléatoires

On conserve la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de la partie précédente et on considère de plus une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de réels positifs ou nuls. Pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$.

III.A - Étude de $\mathbf{E}\left(|T_n|\right)$

III.A.1) Montrer que la suite $\left(\mathbf{E}\left(|T_n|\right)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.

III.A.2) Montrer que si la série $\sum a_n^2$ est convergente, alors la suite $\left(\mathbf{E}\left(|T_n|\right)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente.

III.A.3) On suppose $a_1 \geq a_2 + \cdots + a_n$. Montrer $\mathbf{E}\left(|T_n|\right) = \mathbf{E}\left(|T_1|\right) = a_1$.

III.B - Application à une suite d'intégrales

Pour n dans $\mathbf{N}^*$, soit

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)\cos\left(\frac{t}{3}\right)\cdots\cos\left(\frac{t}{2n-1}\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

III.B.1) Montrer que $(J_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite bien définie et qu'elle est croissante et convergente.

On posera $a_k = \dfrac{1}{2k-1}$ *et on exprimera l'espérance de* $|T_n|$ *avec la méthode de la question* II.A.4.

III.B.2) Montrer $J_n = \dfrac{\pi}{2}$ pour $1 \leq n \leq 7$ et que $(J_n)_{n\geq 7}$ est strictement croissante.

Deuxième épreuve – Centrale-Supélec 2016 - MP

PARTIE I - Suites et intégrales

I.A - Étude d'une intégrale à paramètre

I.A.1) L'intégrande, noté $h(x,t)$, est une fonction de classe C^∞ pour x réel et t réel non nul, puisqu'obtenu par opérations algébriques partout définies de telles fonctions. En particulier h ainsi que ses dérivées partielles par rapport à x en tout ordre sont localement intégrables sur $\mathbf{R}_+^*$. Soit a un réel strictement positif, par croissance de l'exponentielle on a pour x réel positif et t réel strictement positif

$$|h(x,t)| \leq h(0,t) = \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2} + o_{t\to 0}(1) = O_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

et, pour $x \geq a$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{1-\cos(t)}{t}e^{-at} = o_{t\to 0}(1) = O_{t\to+\infty}\left(e^{-at}\right)$ et

$$\left|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq (1-\cos(t))te^{-at} = o_{t\to 0}(1) = O_{t\to+\infty}\left(e^{-at}\right) .$$

Il en résulte que les fonctions données par $\frac{1-\cos(t)}{t^2}$, $\frac{1-\cos(t)}{t}e^{-at}$ et $(1-\cos(t))te^{-at}$ sont continues, positives et intégrables sur $\mathbf{R}_+^*$ par prolongement par continuité en 0 et critère de Riemann ou comparaison à une exponentielle en $+\infty$. On en déduit, par application des théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe somme (théorème de Leibniz) que f est $\boxed{\text{définie et continue sur } \mathbf{R}_+}$ et de classe C^2 sur $[a;+\infty[$, donc $\boxed{\text{de classe } C^2 \text{ sur } \mathbf{R}_+^*.}$

I.A.2) Le théorème de Leibniz permet également de conclure que f' est donné par

$$f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}\,\mathrm{d}t .$$

Pour t réel strictement positif, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(t)-1}{t}e^{-xt} = 0 .$$

Comme la fonction nulle est continue sur $\mathbf{R}_+^*$, les dominations obtenues à la question précédente permettent d'appliquer le théorème de convergence dominée pour les familles d'intégrales avec paramètre dans $\mathbf{R}_+$, et il vient $\boxed{\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} f' = 0.}$

Remarque : les fonction données par $\frac{1-\cos(t)}{t^2}$ et $\frac{1-\cos(t)}{t}$ sont continues sur $\mathbf{R}_+^*$, admettent une limite en 0 et $+\infty$. Elles sont donc bornées au voisinage de 0 et de l'infini par définition de la limite et bornée sur le compact complémentaire de ces voisinages, par théorème de Weierstrass. *Soit M un majorant de ces deux fonctions positives. Par inégalité de la moyenne, il vient pour x dans $\mathbf{R}_+^*$, $|f(x)| \leq M\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{x}$ et $|f'(x)| \leq \frac{M}{x}$, et la conclusion s'ensuit.*

I.A.3) Le théorème de Leibniz permet également de conclure que f'' est donné par

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos(t))e^{-xt}\,\mathrm{d}t .$$

Pour x strictement positif, une solution particulière sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle $y' = (1-\cos(t))e^{-xt}$ est de la forme $(a + b\cos(t) + c\sin(t))e^{-xt}$ avec a, b et c réels, par théorème d'Euler, et on vérifie que $a = -\dfrac{1}{x}$, $b = \dfrac{x}{1+x^2}$ et $c = -\dfrac{1}{1+x^2}$ conviennent, d'où l'expression de f'' : $\boxed{f''(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}.}$

On en déduit que f' est donné par $f'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) = \ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ à une constante additive près. Comme $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1$, par continuité du logarithme, il résulte de la question précédente qu'on a, pour x réel strictement positif, $\boxed{f'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1).}$

I.A.4) La fonction g donnée, pour x strictement positif, par

$$g(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2} = \frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$ en tant que composée algébrique partout définie de telles fonctions, de dérivée donnée par

$$g'(x) = \ln(x) + 1 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{x^2}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = f'(x)\ .$$

Le théorème de Leibniz-Newton (théorème fondamental du calcul différentiel et intégral) assure donc que $f-g$ est constante. Au voisinage de l'infini on a, d'après la seconde forme de g, $g(x) = \dfrac{x}{2}O\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - O\left(\dfrac{1}{x}\right) = o\left(1\right)$. Il résulte donc de la question I.A.2 que $f-g$ est nulle en l'infini, donc nulle sur $\mathbf{R}_+^*$. D'après la question I.A.1, f est continue en 0 et y prend comme valeur $\lim_0 g$, à savoir $\dfrac{\pi}{2}$ par croissance comparée entre x et $\ln(x)$, i.e. $\boxed{f(x) = x\ln(x) - \dfrac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \arctan(x) + \dfrac{\pi}{2} \text{ et } f(0) = \dfrac{\pi}{2}.}$

I.A.5) L'intégrande étant une fonction paire de s et identiquement nul lorsque $s=0$, il suffit de montrer la formule pour s strictement positif. Dans ce cas le changement de variable affine bijectif $u = st$ permet d'écrire, en utilisant la question précédente,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2s}{\pi}f(0) = s\ .$$

D'où, pour s réel, $\boxed{|s| = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t.}$

I.B - Étude d'une suite d'intégrales

I.B.1) Pour n dans $\mathbf{N}^*$, par identité de Bernoulli on a pour tout réel t non nul

$$0 \leq \frac{1-\cos^n(t)}{t^2} = \frac{1-\cos(t)}{t^2}(1+\cos(t)+\cdots+\cos^{n-1}(t)) \leq n\frac{1-\cos(t)}{t^2}$$

par positivité de $1-\cos$ et puisqu'on a $|\cos| \leq 1$. En vertu des arguments de la partie précédente, l'intégrande dans la définition de u_n est positif et majoré par une fonction intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$. Comme il s'agit d'une fonction de classe C^∞ sur cet intervalle, en tant que composé algébrique partout défini de telles fonctions, il est localement intégrable et donc la suite $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ est bien définie.}}$ Par ailleurs, pour t réel, on a $0 \leq \cos(t)^2 \leq 1$ et $t^2 \geq 0$, et donc l'intégrande dans la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissant et strictement croissant pour t n'appartenant pas à $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$. Comme on a affaire à des intégrandes continus, par croissance de l'intégrale, $\boxed{(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ est strictement croissante.}}$

I.B.2) On a $u_1 = f(0)$ et pour t réel on a $1 - \cos^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$ et donc pour t non-nul on a

$$\frac{1-\cos^2(t)}{t^2} = 2\frac{1-\cos(2t)}{(2t)^2} \ .$$

Par intégration et changement de variable affine bijectif $u = 2t$, on a également $u_2 = f(0)$ et, finalement, $\boxed{u_1 = u_2 = \frac{\pi}{2}.}$

I.C - Calcul d'un équivalent de u_n

I.C.1) L'application $u \mapsto \sqrt{2u/n}$ est une bijection de classe C^1 de $\mathbf{R}_+^*$ dans lui-même et donc, par changement de variable bijectif, on a pour n dans $\mathbf{N}^*$

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n\left(\sqrt{2u/n}\right)}{2u/n} \frac{\mathrm{d}u}{n\sqrt{2u/n}}$$

et donc, après simplication, $\boxed{u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n.}$

I.C.2) Pour t réel on a $\sin(t) \le t$, par inégalité de convexité, et donc par intégration et croissance de l'intégrale, $1 - \cos(t) \le \dfrac{t^2}{2}$. Pour n dans $\mathbf{N}^*$, on a, comme en I.B.1,

$$0 \le 1 - \cos^n(t) = (1-\cos(t))(1+\cos(t)+\cdots+\cos^{n-1}(t)) \le n(1-\cos(t)) \le \frac{nt^2}{2}$$

et donc, en particulier pour u dans $]0;1]$ et $t = \sqrt{2u/n}$, il vient $\boxed{\left|1-\cos^n\left(\sqrt{2u/n}\right)\right| \le u.}$

I.C.3) Puisque $|1-\cos| \le 2$, l'intégrande dans la définition de v_n est majoré par la fonction positive, continue par morceaux donnée par $u^{-1/2}$ sur $]0;1]$ et $u^{-3/2}$ sur $]1;+\infty[$. Par critère de RIEMANN, cette fonction est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$. Par ailleurs pour u dans $\mathbf{R}_+^*$ et n tendant vers l'infini, on a

$$n\ln\left(\cos(\sqrt{2u/n})\right) = n\ln\left(1 - \frac{u}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -u + o\left(1\right)$$

et donc, par continuité de l'exponentielle,

$$\frac{1-\cos^n(\sqrt{2u/n})}{u\sqrt{u}} = \frac{1-e^{-u}+o\left(1\right)}{u\sqrt{u}} \ ,$$

i.e. l'intégrande dans la définition v_n tend vers $\dfrac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}$. Cette limite définissant une fonction continue sur $\mathbf{R}_+^*$, il résulte du théorème de convergence dominée qu'on a $\boxed{\lim v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u.}$

I.C.4) Puisqu'on a affaire à des fonctions de classe C^∞, il vient par intégration par parties

$$\int \frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = -2\frac{1-e^{-u}}{\sqrt{u}} + 2\int \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\ .$$

Au voisinage de 0 on a $\dfrac{1-e^{-u}}{\sqrt{u}} \sim \sqrt{u}$ et au voisinage de $+\infty$ on a $\dfrac{1-e^{-u}}{\sqrt{u}} = O\left(u^{-1/2}\right)$. Puisque toutes les quantités sont convergentes ou admettent des limites en 0 et $+\infty$, la relation admise fournit

$$\lim v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\sqrt{\pi}$$

et, en tenant compte de I.C.1, il vient $\boxed{u_n \sim \sqrt{\dfrac{n\pi}{2}}.}$

PARTIE II - Autour du pile ou face

II.A - Étude de $E(|S_n|)$

II.A.1) Les variables (X_n) sont bornées donc admettent des moments de tous ordres. De plus elles sont identiquement distribuées, centrées et donc de variance égale à leur moment d'ordre 2, i.e. 1 puisque que leur carré est presque sûrement égal à 1. Il vient par linéarité de la variance et indépendance, donc par application de l'égalité de Bienaymé, $\boxed{\mathbf{E}\left(S_n\right) = 0 \text{ et } \mathrm{V}\left(S_n\right) = n.}$

II.A.2) Par théorème de transfert, $\sin(T)$ et $\sin(-T)$ ont même loi, donc même espérance, ce qui se traduit, en utilisant l'imparité du sinus par $\mathbf{E}\left(\sin(T)\right) = \mathbf{E}\left(-\sin(T)\right) = -\mathbf{E}\left(\sin(T)\right)$, par linéarité de l'espérance et donc $\mathbf{E}\left(\sin(T)\right) = 0$. D'après le lemme des coalitions on a également, par indépendance de S et T,

$$\mathbf{E}\left(\sin(S)\sin(T)\right) = \mathbf{E}\left(\sin(S)\right)\mathbf{E}\left(\sin(T)\right) = 0$$

et $\mathbf{E}\left(\cos(S)\cos(T)\right) = \mathbf{E}\left(\cos(S)\right)\mathbf{E}\left(\cos(T)\right)$. Or, par linéarité de l'espérance

$$\mathbf{E}\left(\cos(S+T)\right) = \mathbf{E}\left(\cos(S)\cos(T)\right) - \mathbf{E}\left(\sin(S)\sin(T)\right)$$

et il en résulte $\boxed{\mathbf{E}\left(\cos(S+T)\right) = \mathbf{E}\left(\cos(S)\right)\mathbf{E}\left(\cos(T)\right).}$

II.A.3) Soit n dans $\mathbf{N}^*$ et t réel. On pose $S = tS_n$ et $T = tX_{n+1}$; alors T et $-T$ ont même loi, i.e. la loi uniforme sur $\{-t, t\}$ (y compris si t est nul), et S et T sont indépendantes d'après le lemme des coalitions. Il résulte donc de la question précédente $\varphi_{n+1} = \varphi_n\varphi_1$ et donc, par une récurrence immédiate, $\varphi_n = (\varphi_1)^n$. Par théorème de transfert on a $\varphi_1(t) = \dfrac{1}{2}\cos(-t) + \dfrac{1}{2}\cos(t)$ et donc, par parité du cosinus, $\varphi_1 = \cos$. On en conclut $\boxed{\varphi_n = \cos^n.}$

II.A.4) Soit n dans $\mathbf{N}^*$. On a, en utilisant I.A.5, par théorème de transfert, finitude de $S_n(\Omega)$, linéarité de l'intégrale et de l'espérance

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(|S_n|\right) &= \sum_{s\in S_n(\Omega)} \mathbf{P}\left(S_n = s\right)|s| = \sum_{s\in S_n(\Omega)} \mathbf{P}\left(S_n = s\right)\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos st}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \sum_{s\in S_n(\Omega)} \mathbf{P}\left(S_n = s\right)\frac{1-\cos st}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathbf{E}\left(\frac{1-\cos S_n t}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathbf{E}\left(\cos S_n t\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n t}{t^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

en vertu de la question précédente et donc $\boxed{\mathbf{E}\left(|S_n|\right) = \dfrac{2}{\pi}u_n.}$

II.A.5) Soit n dans $\mathbf{N}$. Alors S_{2n+1} prend des valeurs impaires et en particulier $|S_{2n+1}| \geq 1 = |X_{2n+2}| = |S_{2n+2} - S_{2n+1}|$. On en déduit $|S_{2n+1}| + X_{2n+2} = |S_{2n+2}|$. Par linéarité de l'espérance et puisque X_{2n+2} est centré, il vient $\mathbf{E}\left(|S_{2n+1}|\right) = \mathbf{E}\left(|S_{2n+2}|\right)$. Comme $\dfrac{2}{\pi}$ n'est pas nul, la question précéndente permet de conclure $\boxed{u_{2n+1} = u_{2n+2}.}$

II.B - Étude de $\dfrac{S_n}{n}$

II.B.1) Soit n dans $\mathbf{N}^*$. On a par linéarité de l'espérance

$$\mathbf{E}\left(S_n^4\right) = \sum_{1 \leq i,j,k,\ell \leq n} \mathbf{E}\left(X_i X_j X_k X_\ell\right)$$

et donc, puisqu'on a affaire à des variables indépendantes et centrées les espérances apparaissant dans la somme sont nulles sauf si aucune variable n'apparait avec un exposant pair, i.e. puisqu'on a affaire à des variables équidistribuées de carré presque sûrement égal à 1

$$\mathbf{E}\left(S_n^4\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left(X_i^4\right) + \binom{4}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{E}\left(X_i^2\right) \mathbf{E}\left(X_j^2\right) = n + 6\binom{n}{2}$$

soit $\boxed{\mathbf{E}\left(S_n^4\right) = 3n^2 - 2n.}$

II.B.2) Soit n dans $\mathbf{N}^*$. Par définition U_n est à valeurs positives et $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > 0$. Il résulte donc de l'inégalité de Markov et de la question précédente

$$\mathbf{P}\left(U_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \sqrt{n}\mathbf{E}\left(U_n\right) = \frac{(3n^2 - 2n)\sqrt{n}}{n^4}$$

et donc $\boxed{\mathbf{P}\left(U_n \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \dfrac{3}{n^{3/2}}.}$

II.B.3) Puisque les (X_n) sont des variables aléatoires réelles discrètes, il en va de même de leurs sommes (S_n) et donc aussi de (U_n). Comme on a

$$\mathcal{Z}_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} \left(U_k \geq \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

et puisque $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable, on a $\boxed{\mathcal{Z}_n \in \mathcal{A}}$.
De plus, par σ-sous-additivité de la probabilité, on en déduit (a priori dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$)

$$0 \leq \mathbf{P}\left(\mathcal{Z}_n\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}\left(U_k \geq \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{3}{n^{3/2}}\,,$$

d'après la question précédente. Comme le dernier membre est le reste d'une série de Riemann convergente, il tend vers 0. Par encadrement on en déduit $\boxed{\lim \mathbf{P}\left(\mathcal{Z}_n\right) = 0.}$

II.B.4) Par construction $(\mathcal{Z}_n)$ est une famille décroissante d'événements et donc, par continuité monotone,

$$\lim \mathbf{P}\left(\mathcal{Z}_n\right) = \mathbf{P}\left(\lim \downarrow \mathcal{Z}_n\right) = \mathbf{P}\left(\mathcal{Z}\right)$$

i.e. $\mathcal{Z}$ est négligeable. Or, pour ω dans $\Omega \setminus \mathcal{Z}$, on dispose de n entier tel que ω n'appartienne pas à $\mathcal{Z}_n$, i.e. pour $k \geq n$, on a $\dfrac{|S_k(\omega)|}{k} \leq n^{-1/8}$ et en particulier $\dfrac{S_k(\omega)}{k} = o(1)$. Par définition il en résulte que $\boxed{\left(\dfrac{S_n}{n}\right) \text{ converge presque sûrement vers } 0.}$

PARTIE III - D'autres sommes aléatoires

III.A - Étude de $\mathbf{E}(|T_n|)$

III.A.1) Soit n dans $\mathbf{N}^*$. On a, puisque X_{n+1} est à valeurs dans $\{\pm 1\}$,

$$T_{n+1} = X_{n+1}(a_{n+1} + X_{n+1}T_n)$$

et donc

$$\begin{aligned} |T_{n+1}| - |T_n| &= |a_{n+1} + X_{n+1}T_n| - |X_{n+1}T_n| \\ &= a_{n+1}\mathbb{1}_{X_{n+1}T_n \geq 0} + (a_{n+1} - 2|T_n|)\mathbb{1}_{-a_{n+1} < X_{n+1}T_n < 0} + -a_{n+1}\mathbb{1}_{X_{n+1}T_n \leq -a_{n+1}} \\ &\geq a_{n+1}\mathbb{1}_{X_{n+1}T_n \geq 0} - a_{n+1}\mathbb{1}_{-a_{n+1} < X_{n+1}T_n < 0} - a_{n+1}\mathbb{1}_{X_{n+1}T_n \leq -a_{n+1}} \\ &\geq a_{n+1}\left(1 - 2\mathbb{1}_{X_{n+1}T_n < 0}\right) \end{aligned}$$

Par linéarité et croissance de l'espérance, on a

$$\mathbf{E}(|T_{n+1}|) - \mathbf{E}(|T_n|) \geq a_{n+1}(1 - 2\mathbf{P}(X_{n+1}T_n < 0))$$

et, par indépendance des (X_k),

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{n+1}T_n < 0) &= \mathbf{P}(X_{n+1} > 0, T_n > 0) + \mathbf{P}(X_{n+1} < 0, T_n < 0) \\ &\leq \frac{1}{2}\mathbf{P}(T_n > 0) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(T_n < 0) = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{P}(T = 0)) \leq \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Il en résulte que la suite $\boxed{(\mathbf{E}(|T_n|))_{n \in \mathbf{N}^*} \text{ est croissante.}}$

III.A.2) Les variables (X_n) sont indépendantes, centrées et réduites, comme vu en II.A.1, donc par application de l'égalité de BIENAYMÉ, pour tout entier n on a $\mathbf{E}\left(T_n^2\right) = \mathrm{V}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ et, par inégalité de CAUCHY-SCHWARZ (ou positivité de la variance),

$$\mathbf{E}(|T_n|) \leq \sqrt{\mathbf{E}\left(|T_n|^2\right)} = \sqrt{\mathrm{V}(T_n)} = O(1) .$$

Puisqu'on a affaire à une suite croissante d'après ce qui précède, $\boxed{(\mathbf{E}(|T_n|))_{n \in \mathbf{N}^*} \text{ est convergente.}}$

III.A.3) Si, pour n dans $\mathbf{N}^*$, on a $a_1 \geq a_2 + \cdots + a_n$, alors puisqu'on a affaire à des variables à valeurs dans $\{\pm 1\}$, il vient

$$|a_2X_1X_2 + \cdots + a_nX_1X_n| = |a_2X_2 + \cdots + a_nX_n|\,|X_1| \leq a_1 = \mathbf{E}(T_1)$$

et donc

$$|T_n| = |X_1|\,|a_1 + a_2X_1X_2 + \cdots + a_nX_1X_n| = a_1 + a_2X_1X_2 + \cdots + a_nX_1X_n .$$

Il en résulte, par linéarité de l'espérance et indépendance des (X_k), et puisqu'elles sont centrées $\boxed{\mathbf{E}(|T_n|) = \mathbf{E}(|T_1|) = a_1.}$

III.B - Application à une suite d'intégrales

III.B.1) Soit n dans $\mathbf{N}^*$ et t réel. On pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} X_k$, $S = T_n t$ et $T = \frac{1}{2n+1} t X_{n+1}$; alors T et $-T$ ont même loi, i.e. la loi uniforme sur $\left\{ \pm \frac{1}{2n+1} t \right\}$ (y compris si t est nul), et S et T sont indépendantes d'après le lemme des coalitions. Il résulte donc de II.A.2 et par récurrence immédiate, $\mathbf{E}\left(\cos(T_n t)\right) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{1}{2k-1} t\right)$. En procédant comme en II.A.4, par théorème de transfert, finitude de $T_n(\Omega)$, linéarité de l'intégrale et de l'espérance

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(|T_n|\right) &= \sum_{s \in T_n(\Omega)} \mathbf{P}\left(T_n = s\right) |s| = \sum_{s \in T_n(\Omega)} \mathbf{P}\left(T_n = s\right) \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos st}{t^2} \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sum_{s \in T_n(\Omega)} \mathbf{P}\left(T_n = s\right) \frac{1 - \cos st}{t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathbf{E}\left(\cos T_n t\right)}{t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} J_n \,.\end{aligned}$$

et donc, en vertu de la partie précédente et puisque, par comparaison entre séries à termes positifs avec la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{k^2}$, la série $\sum \frac{1}{(2k-1)^2}$ est convergente,

$\boxed{(J_n)_{n \in \mathbf{N}^*} \text{ est bien définie, croissante et convergente.}}$

III.B.2) On a $\frac{1}{11} + \frac{1}{13} \leq \frac{1}{10} + \frac{1}{14}$ puisque $10 \times 14 = 12^2 - 4 \leq 12^2 - 1 = 11 \times 13$, et donc

$$\sum_{k=2}^{7} \frac{1}{2k-1} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} = \frac{4}{9} + 3\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{14}\right) = \frac{4}{9} + \frac{18}{35} = \frac{1}{2} - \frac{1}{18} + \frac{1}{2} + \frac{1}{70} < 1$$

et puisque $J_1 = u_1 = \frac{\pi}{2}$ d'après I.B.2, on a pour $1 \leq n \leq 7$, en vertu du calcul précédent et de III.A.3,

$1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k-1} \geq 1 - \sum_{k=2}^{7} \frac{1}{2k-1} > 0$ et $\boxed{J_n = \frac{\pi}{2}.}$

En reprenant les calculs de la question III.A.1, on constate qu'il y a égalité dans la suite d'inégalités si et seulement si $\mathbf{P}\left(T_n = 0\right) = 0$ d'une part et

$$\mathbf{E}\left(\left(a_{n+1} - 2\,|T_n|\right) \mathbb{1}_{-a_{n+1} < X_{n+1} T_n < 0}\right) = -a_{n+1} \mathbf{E}\left(\mathbb{1}_{-a_{n+1} < X_{n+1} T_n < 0}\right) \,,$$

d'autre part. La seconde condition est équivalente à $\mathbf{E}\left(\left(a_{n+1} - |T_n|\right) \mathbb{1}_{-a_{n+1} < X_{n+1} T_n < 0}\right) = 0$. Comme la variable aléatoire dont on prend l'espérance est positive, son espérance est nulle si et seulement si elle est presque sûrement nulle, i.e. $\mathbb{1}_{-a_{n+1} < X_{n+1} T_n < 0}$ est presque sûrement nulle, c'est-à-dire que l'événement $(-a_{n+1} < X_{n+1} T_n < 0)$ est négligeable. Par additivité de la probabilité et indépendance de X_{n+1} et T_n, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(-a_{n+1} < X_{n+1} T_n < 0\right) &= \mathbf{P}\left(X_{n+1} > 0, -a_{n+1} < T_n < 0\right) + \mathbf{P}\left(X_{n+1} < 0, a_{n+1} > T_n > 0\right) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{P}\left(0 < |T_n| < a_{n+1}\right)\end{aligned}$$

et, au final, $\mathbf{E}\left(|T_n|\right) = \mathbf{E}\left(|T_{n+1}|\right)$ si et seulement si $\mathbf{P}\left(T_n = 0\right) = 0$ et $\mathbf{P}\left(0 < |T_n| < a_{n+1}\right) = 0$, i.e. $\mathbf{P}\left(|T_n| < a_{n+1}\right) = 0$. Comme on a affaire à des variables aléatoires à ensemble de valeurs fini, on en conclut

$$\mathbf{E}\left(|T_n|\right) < \mathbf{E}\left(|T_{n+1}|\right) \Longleftrightarrow \exists (\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq n} \in \{\pm 1\}^n \quad (2n+1) \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2k-1} \right| < 1 \,.$$

On note la propriété de droite $(\mathbf{P}_n)$ et $(\mathbf{P}'_n)$ cette même propriété avec une majoration par $\frac{1}{2}$ au lieu de 1. En particulier $(\mathbf{P}'_n) \Longrightarrow (\mathbf{P}_n)$. On a $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=\frac{7}{15}$, $\frac{7}{15}-\frac{1}{7}=\frac{34}{105}$, $\frac{34}{105}-\frac{1}{9}=\frac{102-35}{315}=\frac{67}{315}$, $\frac{67}{315}-\frac{1}{11}=\frac{422}{3465}$ et $\frac{422}{3465}-\frac{1}{13}=\frac{5486-3465}{5\times7\times9\times11\times13}$, de sorte qu'on a

$$(\mathbf{P}_7) \qquad 0<15\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}\right)=\frac{2021}{3\times7\times11\times13}<\frac{2021}{2100}<1\,.$$

On calcule ensuite $\frac{2021}{15\times3003}-\frac{1}{15}=-\frac{982}{15\times3003}$, d'où

$$(\mathbf{P}'_8) \qquad 0>-17\frac{982}{15\times3003}>-\frac{17000}{45000}>-\frac{1}{2}>-1\,,$$

puis $-\frac{982}{45045}+\frac{1}{17}=\frac{45045-16694}{17\times45045}=\frac{28351}{17\times45045}$, d'où

$$(\mathbf{P}_9) \qquad 0<19\frac{28351}{17\times45045}<\frac{600000}{17\times45000}<1\,.$$

Par convexité de la fonction inverse (ou inégalité arithmético-harmonique), on remarque qu'on a pour tout n dans $\mathbf{N}^*$,

$$\frac{1}{2n+3}<\frac{1}{2}\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{2n+5} \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{2}\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}<\frac{1}{2}\frac{1}{2n+5}\,.$$

De plus on a, par convexité de la fonction inverse et placement par rapport à la tangente en $2n+1$,

$$\frac{1}{2n+3}>\frac{1}{2n+1}-\frac{2}{(2n+1)^2}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{2n+5}\frac{4(2n+1+4)}{(2n+1)^2}>\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{2n+5}$$

la dernière inégalité étant valable pour $n\geq 3$ car $\frac{4}{2n+1}+\frac{16}{(2n+1)^2}$ est une fonction positive décroissante de n valant $\frac{44}{49}$ pour $n=3$ et y est donc strictement inférieure à 1. On en conclut que si $(\varepsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ dans $\{\pm1\}^n$ vérifie $0\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_k}{2k-1}\leq\frac{1}{2}\frac{1}{2k+1}$, alors

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{2n+5}<\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_k}{2k-1}-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}<\frac{1}{2}\frac{1}{2n+5}$$

et donc $\forall n\geq 3$ $(\mathbf{P}'_n)\Longrightarrow(\mathbf{P}'_{n+2})$. Pour conclure il ne reste qu'à remarquer que $(\mathbf{H}_{11})$ résulte des calculs suivants : $\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}=\frac{38}{357}+\frac{1}{19}=\frac{722+357}{6783}$ et donc $\frac{2}{11}-\frac{1}{17}-\frac{1}{19}-\frac{1}{21}=\frac{13566-11869}{11\times17\times19\times21}$, puis $\frac{1697}{11\times17\times19\times21}-\frac{982}{11\times7\times9\times13\times15}=\frac{585\times1697-323\times982}{7\times9\times11\times13\times15\times17\times19}>0$ et enfin

$$23\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}-\frac{1}{17}-\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)<23\frac{1020000-270000}{340000\times110}<\frac{23\times\frac{3}{4}}{37}<\frac{1}{2}\,.$$

Finalement $\boxed{(J_n)_{n\geq7} \text{ est strictement croissante.}}$