Mathématiques 1

MP

2018

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrices autorisées

Aplatissement aléatoire d'un ensemble de points en grande dimension

Notations

— Dans tout le problème N, k et d désignent des entiers supérieurs ou égaux à deux.

— Pour tous entiers naturels non nuls p et q, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels.

— On note $A^\top$ la transposée d'une matrice A.

— Pour tous entiers naturels p et q, avec $p \leqslant q$, la notation $[\![p, q]\!]$ désigne l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid p \leqslant i \leqslant q\}$.

— Dans tout le problème on note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur Ω.

— Pour tout événement A de probabilité non nulle, et pour tout événement B, on note $\mathbb{P}_A(B)$ ou $\mathbb{P}(B \mid A)$ la probabilité conditionnelle de B sachant A.

— Étant donnée une variable aléatoire Z à valeurs réelles, on note $\mathbb{E}(Z)$ son espérance.

— On dit qu'une variable aléatoire Z est une variable de Rademacher lorsque $Z(\Omega) = \{-1, 1\}$ et

$$\mathbb{P}(Z = -1) = \mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{2}$$

— De façon générale, si E est un espace euclidien, son produit scalaire et sa norme seront respectivement notés $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|$. Ces notations seront utilisées notamment pour $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^k$, munis de leurs structures euclidiennes canoniques.

Problématique

On s'intéresse à la question suivante : étant donnés N points dans un espace euclidien de grande dimension, est-il possible de les envoyer linéairement dans un espace de petite dimension sans trop modifier les distances entre ces points ?

Pour préciser cette question, considérons N vecteurs distincts $v_1, \dots, v_N$ dans $\mathbb{R}^d$. Pour tout réel ε tel que $0 < \varepsilon < 1$, on dit qu'une application linéaire $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ est une ε-isométrie pour $v_1, \dots, v_N$ lorsque :

$$\forall (i, j) \in [\![1, N]\!]^2, \quad (1 - \varepsilon)\|v_i - v_j\| \leqslant \|f(v_i) - f(v_j)\| \leqslant (1 + \varepsilon)\|v_i - v_j\|$$

La question peut se reformuler ainsi :

Objectif

Pour quelles valeurs de k existe-t-il $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ qui soit une ε-isométrie pour $v_1, \dots, v_N$?

On se propose d'établir le théorème suivant, démontré par William B. Johnson et Joram Lindenstrauss en 1984 :

> Il existe une constante absolue c strictement positive telle que :
>
> quels que soient N et d, entier naturels supérieurs ou égaux à 2 et quels que soient $v_1, \dots, v_N$ distincts dans $\mathbb{R}^d$, il suffit que
>
> $$k \geqslant c \frac{\ln(N)}{\varepsilon^2}$$
>
> pour qu'il existe une ε-isométrie $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ pour $v_1, \dots, v_N$.

Les seules méthodes connues à ce jour pour démontrer ce théorème sont de nature probabiliste.

Dans la partie I, on établit des résultats préliminaires portant sur la convexité et les probabilités. La partie II est consacrée à la démonstration d'une inégalité de concentration, qui est utilisée dans la partie III où le théorème de Johnson-Lindenstrauss est démontré.

I Préliminaires

I.A – Projection sur un convexe fermé

Soit E un espace euclidien.

Q 1. Soient a et b dans E. Montrer la relation suivante et en donner une interprétation géométrique :

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right)$$

Q 2. En déduire que si u, v et v' dans E vérifient $v \neq v'$ et $\|u-v\| = \|u-v'\|$ alors $\|u - \frac{v+v'}{2}\| < \|u-v\|$.

Q 3. Soient F un fermé non vide de E et u dans E. Montrer qu'il existe v dans F tel que

$$\forall w \in F, \qquad \|u-v\| \leqslant \|u-w\|$$

Q 4. En déduire que si C est un convexe fermé non vide de E et u est un vecteur de E alors il existe un unique v dans C tel que

$$\forall w \in C, \qquad \|u-v\| \leqslant \|u-w\|$$

On dira que v est le projeté de u sur C et on notera $d(u,C) = \|u-v\|$.

I.B – Inégalité de Hölder pour l'espérance

Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Q 5. Montrer que, pour tous réels positifs a et b,

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

On pourra utiliser la concavité du logarithme.

Q 6. En déduire que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ alors

$$\mathbb{E}(|XY|) \leqslant \mathbb{E}(|X|^p)^{1/p}\, \mathbb{E}(|Y|^q)^{1/q}$$

On pourra d'abord montrer ce résutat lorsque $\mathbb{E}(|X|^p) = \mathbb{E}(|Y|^q) = 1$.

I.C – Espérance conditionnelle

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à valeurs réelles.

Pour tout événement $A \subset \Omega$ de probabilité non nulle, l'espérance conditionnelle de X sachant A, notée $\mathbb{E}(X \mid A)$, est par définition le réel

$$\mathbb{E}(X \mid A) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_A(X = x) \cdot x$$

En d'autres termes, $\mathbb{E}(X \mid A)$ est l'espérance de X dans l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_A)$.

Les propriétés usuelles de linéarité et de positivité de l'espérance, qu'on ne demande pas de redémontrer, sont ainsi valables pour l'espérance conditionnelle sachant A.

Q 7. Soit $(A_1, ..., A_m)$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{E}(X \mid A_i)$$

I.D – Variables aléatoires à queue sous-gaussienne

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

On suppose qu'il existe deux réels strictement positifs a et b tels que, pour tout réel positif t,

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant t) \leqslant a \exp\left(-bt^2\right)$$

Q 8. Montrer que

$$\mathbb{E}(X^2) = 2 \int_0^{+\infty} t\mathbb{P}(|X| \geqslant t)\, \mathrm{d}t$$

On pourra noter $X^2(\Omega) = \{y_1, ..., y_n\}$ avec $0 \leqslant y_1 < y_2 < \cdots < y_n$.

Q 9. Montrer que le moment d'ordre deux de X est inférieur ou égal à $\frac{a}{b}$.

Soit δ un réel tel que $0 \leqslant |\delta| \leqslant \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Q 10. Justifier que, pour tout réel t,

$$\mathbb{P}(|X+\delta| \geqslant t) \leqslant \mathbb{P}(|X| \geqslant t - |\delta|)$$

Q 11. Montrer que, pour tout réel t,

$$-b(t-|\delta|)^2 \leqslant a - \frac{1}{2}bt^2$$

Q 12. En déduire que pour tout réel t tel que $t \geqslant |\delta|$ on a

$$\mathbb{P}(|X+\delta| \geqslant t) \leqslant a\,\exp(a)\,\exp\left(-\frac{1}{2}bt^2\right)$$

Q 13. Justifier que l'inégalité précédente reste valable si $0 \leqslant t < |\delta|$.

II L'inégalité de concentration de Talagrand

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ muni d'une base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$.
Soient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n : \Omega \to \{-1, 1\}$ des variables aléatoires de Rademacher indépendantes dans leur ensemble.
On pose $X = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i e_i$.
L'objectif de cette partie est de montrer, pour tout convexe fermé non vide C de E,

$$\mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant 1 \tag{II.1}$$

II.A – Étude de deux cas particuliers

Q 14. Traiter le cas où C est un convexe fermé de E ne rencontrant pas $X(\Omega)$.

On suppose, dans la suite de cette sous-partie II.A uniquement, que C est un convexe fermé de E qui rencontre $X(\Omega)$ en un seul vecteur u.

Q 15. Montrer que $\frac{1}{4}d(X,u)^2$ suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

Q 16. En déduire l'espérance de $\exp\left(\frac{1}{8}d(X,u)^2\right)$ et montrer qu'elle est inférieure ou égale à 2^n.

Q 17. Justifier que $d(X,C) \leqslant d(X,u)$ et en déduire l'inégalité (II.1) dans ce cas.

II.B – Initialisation

On suppose désormais que C est un convexe fermé de E tel que $C \cap X(\Omega)$ contient au moins deux éléments. Quitte à permuter les vecteurs de la base, on peut supposer que ces deux vecteurs diffèrent par leur dernière coordonnée.

On se propose de démontrer l'inégalité (II.1) par récurrence sur la dimension n de E.

Q 18. Traiter le cas $n = 1$.

II.C – Propriétés de C_{+1} et C_{-1}

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. On suppose à présent que (II.1) est vérifiée au rang $n-1$.
On note $E' = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_{n-1})$ et π la projection orthogonale sur E'

$$\pi : \left|\begin{array}{c} E \to E' \\ \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i \end{array}\right.$$

On pose $X' = \pi \circ X = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i e_i$. C'est une variable aléatoire à valeurs dans E'.
Pour t dans $\{-1, 1\}$ on note
— H_t l'hyperplan affine $E' + te_n$;
— $C_t = \pi(C \cap H_t)$.

Q 19. Montrer, pour $x' \in E'$ et $t \in \{-1, 1\}$, que $x' \in C_t \iff x' + te_n \in C$.

Q 20. Montrer que C_{+1} et C_{-1} sont des convexes fermés non vides de E'.

Pour t dans $\{-1, 1\}$, on note Y_t le projeté de X' sur le convexe fermé non vide C_t. C'est une variable aléatoire à valeurs dans E'.

Q 21. Montrer que

$$\mathbb{P}(X \in C) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X' \in C_{+1}) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X' \in C_{-1})$$

II.D – *Une inégalité cruciale*

Soit λ un réel tel que $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Q 22. Montrer que

$$d(X, C) \leqslant \|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) - X\|$$

Q 23. En déduire que

$$d(X, C)^2 \leqslant 4\lambda^2 + \|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\|^2$$

puis que

$$d(X, C)^2 \leqslant 4\lambda^2 + (1-\lambda)\|Y_{\varepsilon_n} - X'\|^2 + \lambda\|Y_{-\varepsilon_n} - X'\|^2$$

Ainsi, on a montré l'inégalité

$$d(X, C)^2 \leqslant 4\lambda^2 + (1-\lambda)d(X', C_{\varepsilon_n})^2 + \lambda d(X', C_{-\varepsilon_n})^2$$

II.E – *Espérances conditionnelles*

On note

$$p_+ = \mathbb{P}(X' \in C_{+1}) \qquad \text{et} \qquad p_- = \mathbb{P}(X' \in C_{-1})$$

On va supposer, sans perte de généralité, que $p_+ \geqslant p_-$.

Q 24. Montrer que $p_- > 0$.

Q 25. Montrer que pour tout λ dans $[0, 1]$

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right) \mid \varepsilon_n = -1\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\mathbb{E}\left(\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X', C_{-1})^2\right)\right)^{1-\lambda} \cdot \left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X', C_{+1})^2\right)\right)^{\lambda}\right)$$

Q 26. En déduire que

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right) \mid \varepsilon_n = -1\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X', C_{-1})^2\right)\right)\right)^{1-\lambda} \cdot \left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X', C_{+1})^2\right)\right)\right)^{\lambda}$$

Q 27. À l'aide de l'hypothèse de récurrence, justifier que

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right) \mid \varepsilon_n = 1\right) \leqslant \frac{1}{p_+}$$

Q 28. Déduire de ce qui précède que pour tout λ dans $[0, 1]$

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_+} + \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{1}{(p_-)^{1-\lambda}} \cdot \frac{1}{(p_+)^{\lambda}}\right)$$

II.F – *Optimisation*

Q 29. On pose $\lambda = 1 - \dfrac{p_-}{p_+}$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2p_+}\left(1 + \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)(1-\lambda)^{\lambda-1}\right)$$

Q 30. Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$

$$\frac{x^2}{2} + (x-1)\ln(1-x) \leqslant \ln(2+x) - \ln(2-x)$$

On pourra faire une étude de fonction.

Q 31. En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$

$$1 + \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)(1-x)^{x-1} \leqslant \frac{4}{2-x}$$

Q 32. Terminer la démonstration de l'inégalité (II.1).

II.G – Inégalité de Talagrand

Q 33. En déduire l'inégalité de Talagrand :

> Pour tout C convexe fermé non vide de E et pour tout réel t strictement positif
>
> $$\mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{P}\Big(d(X, C) \geqslant t\Big) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$

III Démonstration du théorème de Johnson-Lindenstrauss

Dans cette partie on considère l'espace $E = \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par

$$\forall (A, B) \in E^2, \qquad \langle A \mid B \rangle = \operatorname{tr}(A^\top \cdot B)$$

On notera $\|\cdot\|_F$ la norme euclidienne associée.

On rappelle que $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^k$ sont munis de leurs normes euclidiennes canoniques, notées indistinctement $\|\cdot\|$.

On identifie $\mathbb{R}^d$ à $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$, de sorte qu'un vecteur quelconque $x = (x_1, ..., x_d)$ de $\mathbb{R}^d$ peut être identifié à la matrice colonne $(x_1 \ ... \ x_d)^\top$.

On fixe un vecteur $(u_1, ..., u_d)$ dans $\mathbb{R}^d$, identifié comme ci-dessus à la matrice colonne $(u_1 ... u_d)^\top$ de $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$), et tel que $\|u\| = 1$. On définit l'application

$$g : \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ M \mapsto \|M \cdot u\| \end{array} \right.$$

Soit $X = (\varepsilon_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant k,\, 1 \leqslant j \leqslant d}$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$, dont les coefficients ε_{ij} sont des variables aléatoires de Rademacher indépendantes dans leur ensemble.

III.A – Une inégalité de concentration

Q 34. Montrer que $C = \{M \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R}) \mid g(M) \leqslant r\}$ est une partie convexe et fermée de $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$.

Q 35. Montrer que pour toute matrice M dans $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$

$$\|M \cdot u\| \leqslant \|M\|_F$$

Soient r et t deux réels, avec $t > 0$.

Q 36. Montrer que pour toute matrice M dans $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$

$$d(M, C) < t \quad \Longrightarrow \quad g(M) < r + t$$

Q 37. En déduire que

$$\mathbb{P}\Big(g(X) \leqslant r\Big) \cdot \mathbb{P}\Big(g(X) \geqslant r + t\Big) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{8}t^2\right)$$

III.B – Médianes

On dit qu'un réel m est une médiane de $g(X)$ lorsque

$$\mathbb{P}\Big(g(X) \geqslant m\Big) \geqslant \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\Big(g(X) \leqslant m\Big) \geqslant \frac{1}{2}$$

Q 38. Justifier que $g(X)$ admet au moins une médiane.

On pourra considérer la fonction G de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel t, $G(t) = \mathbb{P}(g(X) \leqslant t)$, et examiner l'ensemble $G^{-1}([1/2, 1])$.

Q 39. Déduire de ce qui précède que, pour tout réel strictement positif t

$$\mathbb{P}\Big(|g(X) - m| \geqslant t\Big) \leqslant 4 \exp\left(-\frac{1}{8}t^2\right)$$

où m est une médiane de $g(X)$.

Q 40. En déduire que $\mathbb{E}\left(\left(g(X)-m\right)^2\right) \leqslant 32$.

Q 41. Montrer que $\mathbb{E}\left(g(X)^2\right) = k$, et en déduire que $\mathbb{E}(g(X)) \leqslant \sqrt{k}$.

Q 42. En déduire que $(\sqrt{k}-m)^2 \leqslant \mathbb{E}\left(\left(g(X)-m\right)^2\right)$.

III.C – Un lemme-clé

Q 43. Montrer que, pour tout réel strictement positif t

$$\mathbb{P}\Big(|g(X)-\sqrt{k}| \geqslant t\Big) \leqslant 4\exp(4)\exp\left(-\frac{1}{16}t^2\right)$$

On pose $A_k = \dfrac{X}{\sqrt{k}}$. Soient ε dans $]0,1[$ et δ dans $]0,1/2[$. On suppose que $k \geqslant 160\dfrac{\ln(1/\delta)}{\varepsilon^2}$.

Q 44. Montrer que, pour tout vecteur unitaire u dans $\mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{P}\Big(\big|\|A_k \cdot u\| - 1\big| > \varepsilon\Big) < \delta$$

III.D – Conclusion

On conserve les notations et les hypothèses précédentes. Soient $v_1, ..., v_N$ des vecteurs distincts dans $\mathbb{R}^d$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$ tel que $i < j$ on note E_{ij} l'événement

$$(1-\varepsilon)\|v_i - v_j\| \leqslant \|A_k \cdot v_i - A_k \cdot v_j\| \leqslant (1+\varepsilon)\|v_i - v_j\|$$

Q 45. Montrer que $\mathbb{P}(\overline{E_{ij}}) < \delta$, où $\overline{E_{ij}}$ désigne l'événement contraire de E_{ij}.

Q 46. En déduire que $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{1\leqslant i<j\leqslant N} E_{ij}\right) \geqslant 1 - \dfrac{N(N-1)}{2}\delta$.

Q 47. En déduire le théorème de Johnson et Lindenstrauss.

• • • FIN • • •

PARTIE I - Préliminaires

I.A - Projection sur un convexe fermé

Q 1. On a $\|a \pm b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \pm 2\langle a\,|\,b\rangle$ et donc

$\boxed{\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)}$, i.e. la somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogrammes est égale à la somme des carrés des longueurs de ses côtés.

Élements de notation : Démonstration : 2 : Interprétation géométrique : 2.

Q 2. On applique la question précédente avec $a = u - v$ et $b = u - v'$, de sorte que le membre de droite est $4\|u-v\|^2$ et celui de gauche $\|2u - (v+v')\|^2 + \|v - v'\|^2$, ce qui est strictement supérieur à $4\left\|u - \frac{v+v'}{2}\right\|^2$ par homogénéité de la norme et axiome de séparation. Comme 4 est strictement positif, on en déduit $\boxed{\left\|u - \frac{v+v'}{2}\right\|^2 < \|u-v\|^2.}$

Élements de notation : Résultat : 4

Q 3. Soit x dans F et $r = \|u - x\|$. Alors la boule fermée $B(u,r)$ est compacte, car E est de dimension finie, et donc $B(u,r) \cap F$ aussi, en tant qu'intersection d'un fermé et d'un compact. Comme x en fait partie, ce compact est non vide. De plus la norme est continue, car 1-lipschitzienne, donc $f \mapsto \|u - f\|$ est continue sur le compact non vide $B(u,r) \cap F$. Il résulte du théorème de Weiersrass qu'on dispose de v dans $B(u,r) \cap F$ rendant minimale cette fonction. En particulier $\|u-v\| \leq \|u-x\| = r$ car $x \in B(u,r) \cap F$. Or pour w dans F, si $w \notin B(u,r)$, alors $\|u-w\| > r \geq \|u-v\|$ et si $w \in B(u,r)$ alors $\|u-w\| \geq \|u-v\|$ par minimalité. Ainsi $\boxed{\forall w \in F,\ \|u-v\| \leq \|u-w\|.}$

Élements de notation : Compacité : 1 ; Non vide ; 1 ; Continuité : 1 ; Weierstrass : 1.

Q 4. L'existence résulte de la question précédente. Si v et v' sont deux points de C rendant minimale la distance à u, alors $\frac{v+v'}{2}$ est aussi dans C, par convexité, et ne saurait être plus proche de u. D'après la question 2 il en résulte $v = v'$, i.e. $\boxed{\text{il existe un unique } v \text{ tel que } \forall w \in C,\ \|u-v\| \leq \|u-w\|.}$

Élements de notation : Existence : 1 ; Unicité : 3.

I.B - Inégalité de Hölder pour l'espérance

Q 5. Si a ou b est nul, $ab = 0$ et $\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ est positif. Sinon, par concavité du logarithme sur $\mathbf{R}_+^*$, il vient, par équation fonctionnelle du logarithme et puisque $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$ sont positifs de somme 1,

$$\ln(ab) = \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) \leq \ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right)$$

et donc par croissance de l'exponentielle sur $\mathbf{R}$ il vient dans tous les cas $\boxed{ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.}$

Élements de notation : $ab = 0$; 1 ; inégalité de concavité : 2 ; croissance : 1.

Q 6. Si $\mathbf{E}(|X|^p)$ est nul, alors X est presque sûrement nul et les deux membres sont nuls. De même si $\mathbf{E}(|Y|^q)$ est nul, car alors Y est presque sûrement nul. Sinon on a en appliqant ce qui précède à $\frac{|X(\omega)|}{\mathbf{E}(|X|^p)^{1/p}}$ et $\frac{|Y(\omega)|}{\mathbf{E}(|Y|^q)^{1/q}}$, puis en sommant sur ω dans Ω il vient

$$\frac{\mathbf{E}(|XY|)}{\mathbf{E}(|X|^p)^{1/p}\,\mathbf{E}(|Y|^q)^{1/q}} \leq \frac{1}{p}\frac{\mathbf{E}(|X|^p)}{\mathbf{E}(|X|^p)} + \frac{1}{q}\frac{\mathbf{E}(|Y|^q)}{\mathbf{E}(|Y|^q)} = 1$$

et donc puisqu'on a affaire à des quantités positives $\boxed{\mathbf{E}(|XY|) \leq \mathbf{E}(|X|^p)^{1/p}\,\mathbf{E}(|Y|^q)^{1/q}.}$

Élements de notation : Cas nul p.s. ; 1 ; cas d'espérance 1 : 2 ; homogénéité et positivité : 1.

I.C - Espérance conditionnelle

Q 7. Puisque Ω l'est, $X(\Omega)$ est fini et X admet une espérance, ainsi qu'une espérance conditionnelle sachant tout événement non négligeable. Par définition, pour i dans $[\![1;m]\!]$, on a

$$\mathbf{E}(X \mid A_i) = \frac{1}{\mathbf{P}(A_i)} \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}((X = x) \cap A_i)$$

puisque A_i est supposé non négligeable. Les sommes étant finies, il vient

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}(A_i)\,\mathbf{E}(X \mid A_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{i=1}^{m} x\mathbf{P}((X = x) \cap A_i)$$

et il résulte donc de la formule des probabilités totales, puisqu'on a affaire à un système complet d'événements,

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}(A_i)\,\mathbf{E}(X \mid A_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X = x)$$

i.e. $\boxed{\sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}(A_i)\,\mathbf{E}(X \mid A_i) = \mathbf{E}(X).}$

Élements de notation : Existence des espérances : 1 ; A_i non négligeable : 1 ; Interversion : 1 ; Probas totales : 2.

I.D - Variables aléatoires à queue sous-gaussienne

Q 8. On adopte les notations proposées par l'énoncé. On a donc, par formule de transfert et finitude de Ω, puis par transformation d'Abel en convenant $y_{-1} = 0$ et en remarquant $\mathbf{P}\left(X^2 > y_m\right) = 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(X^2\right) &= \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{P}\left(X^2 = y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\mathbf{P}\left(X^2 \geq y_i\right) - \mathbf{P}\left(X^2 > y_i\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1})\mathbf{P}\left(X^2 \geq y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(X^2 \geq y_i\right) \int_{]y_{i-1};y_i]} \mathrm{d}y \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{]y_{i-1};y_i]} \mathbf{P}\left(X^2 \geq y\right) \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

car l'intégrande est constant, puisque les (y_i) sont ordonnés. Par changement de variable simple $y = t^2$, il vient

$$\mathbf{E}\left(X^2\right) = 2 \sum_{i=1}^{n} \int_{\sqrt{y_{i-1}}}^{\sqrt{y_i}} t\mathbf{P}(|X| \geq t)\,\mathrm{d}t$$

et donc la relation de Chasles et la nullité de l'intégrande sur $\left]\sqrt{y_n};+\infty\right[$ permettent de conclure

$$\boxed{\mathbf{E}\left(X^2\right) = 2\int_0^{+\infty} t\mathbf{P}(|X| \geq t)\,\mathrm{d}t.}$$

Élements de notation : Transfert : 1 ; Changement de variable et Chasles : 1 ; $t > \sqrt{y_n}$: 1 ; Reste : 1.

Q 9. D'après la formule précédente, l'hypothèse sur X et par croissance de l'intégrale, il vient

$$\mathbf{E}\left(X^2\right) \leq 2a \int_0^{+\infty} t \exp -bt^2 \,\mathrm{d}t$$

i.e. par changement de variable linéaire et non nullité de b, $\boxed{\mathbf{E}\left(X\right) \leq \frac{a}{b}.}$

Élements de notation : Croissance de l'intégrale : 2 ; Changement de variable et non nullité de b : 0/2.

Q 10. Par inégalité triangulaire pour t réel on a

$$|X+\delta| \geq t \Longrightarrow |X| \geq |X+\delta| - |\delta| \geq t - |\delta|$$

et donc, par croissance de la probabilité, $\boxed{\mathbf{P}\left(|X+\delta| \geq t\right) \geq \mathbf{P}\left(|X| \geq t - |\delta|\right).}$

Élements de notation : Inégalité triangulaire : 2 ; Croissance de la proba : 2.

Q 11. Soit t un réel. D'après l'égalité de la médiane appliquée à $|\delta|$ et $t-|\delta|$, on a, en tenant compte de la positivité de $(t-2\,|\delta|)^2$,

$$2(t-|\delta|)^2 \geq t^2 - 2\delta^2 \geq t^2 - 2\frac{a}{b}$$

de sorte qu'en multipliant par la quantité négative $-\frac{b}{2}$, il vient $\boxed{-(t-|\delta|)^2 \leq a - \frac{1}{2}bt^2.}$

Élements de notation : 0/4.

Q 12. Soit t réel tel que $t \geq |\delta|$, par hypothèse sur X, on a

$$\mathbf{P}\left(|X| \geq t - |\delta|\right) \leq a\exp(-b(t-|\delta|)^2)$$

de sorte que, d'après les deux questions précédentes, il vient par croissance de l'exponentielle et positivité de a

$$\mathbf{P}\left(|X+\delta| \geq t\right) \leq a\exp\left(a - \frac{1}{2}bt^2\right)$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}\left(|X+\delta| \geq t\right) \leq a\exp(a)\exp\left(-\frac{1}{2}bt^2\right).}$

Élements de notation : Hypothèse sur X avec $t-|\delta| \geq 0$: 2 ; Croissance exp : 1 ; $a \geq 0$: 1.

Q 13. L'hypothèse sur X pour $t=0$ entraîne $a \geq 1$. Pour t réel entre 0 et $|\delta|$, on a par positivité de b, $\frac{1}{2}bt^2 \leq \frac{1}{2}b\delta^2 \leq a$ et donc par décroissance de l'exponentielle négative et positivité de $a\exp(a)$, on a

$$a\exp(a)\exp\left(-\frac{1}{2}bt^2\right) \geq a \geq 1$$

et donc, puisqu'une probabilité est inférieure à 1, $\boxed{\mathbf{P}\left(|X+\delta| \geq t\right) \leq a\exp(a)\exp\left(-\frac{1}{2}bt^2\right).}$

Élements de notation : $a \geq 1$: 2 ; Positivités et de décroissance : 1 ; Proba inférieure à 1 : 1.

PARTIE II - L'inégalité de concentration de Talagrand

$$\mathbf{P}(X \in C)\,\mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leq 1 \tag{1}$$

II.A - Étude de deux cas particuliers

Q 14. Dans ce cas la probabilité intervenant dans le membre de gauche est nulle et l'inégalité s'écrit $0 \leq 1$, ce qui est vrai : $\boxed{\text{l'inégalité 1 est vraie si } C \cap X(\Omega) = \emptyset.}$

Élements de notation : 0/4.

Q 15. Soit x dans $X(\Omega)$. Puisque u appartient à $X(\Omega)$, on dispose de $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ dans $\{\pm 1\}^n$ tels que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i e_i$ et $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ et donc

$$d(x,u)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i - u_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} 4\delta_{\varepsilon_i,-u_i} = 4\,\mathrm{Card}\,\{i \in [\![0;n]\!] \,|\, \varepsilon_i = -u_i\} \ .$$

Puisque Ω est fini, la variable $\dfrac{1}{4}d(X,u)^2$ est une variable aléatoire et d'après ce qui précède, elle est à valeurs dans $[\![0;n]\!]$. De plus, pour k dans cet ensemble, l'événement $(\frac{1}{4}d(X,u)^2 = k)$ correspond à la réalisation de k succès parmi n tirages, où le i^{e} tirage est un succès si $\varepsilon_i = -u_i$. Ceci exhibe $\dfrac{1}{4}d(X,u)^2$ comme la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et toutes de paramètre $\frac{1}{2}$. Il en résulte que $\boxed{\dfrac{1}{4}d(X,u)^2 \text{ suit une loi } \mathcal{B}(n,p).}$

Élements de notation : $\dfrac{1}{4}d(X,u)^2$ variable aléatoire : 1 ; Indépendance des ε_i : 2 ; Conclusion : 1.

Q 16. Par formule de transfert, il vient

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,u)^2\right)\right) = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{k/2} = 2^{-n}\left(1+\sqrt{e}\right)^n$$

et donc, par croissance des fonctions puissances positives et puisqu'on a $e < 3 < 9$,

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,u)^2\right)\right) = \left(\frac{1+\sqrt{e}}{2}\right)^n \leq 2^n.}$$

Élements de notation : Transfert : 0/2 ; Résultats : 2.

Q 17. Puisque u appartient à C, on par définition de la distance $\boxed{d(X,C) \leq d(x,u).}$ Par croissance du carré et de l'espérance, on en déduit

$$0 \leq \mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leq \mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,u)^2\right)\right) \leq 2^n$$

et comme on a $(X \in C) = (X = u)$, cet événement est de probabilité 2^{-n} et, par positivité des termes, $\boxed{\text{l'inégalité 1 est vraie si } C \cap X(\Omega) \text{ est un singleton.}}$

Élements de notation : $d(X,C)$: 1 ; Croissance espérance : 1 ; Positivités/carré : 1 ; Résultat : 1.

II.B - Initialisation

Q 18. Dans ce cas $X(\Omega)$ est de cardinal 2, donc est inclus dans C. Ainsi $d(X,C)$ est déterministe, égale à 0 et les deux termes du produit dans l'inégalité 1 sont égaux à 1 et ainsi

$\boxed{\text{l'inégalité 1 est vraie si } n = 1.}$

Élements de notation : 0/4.

II.C - Propriétés de C_{+1} et C_{-1}

Q 19. Soit t dans $\{\pm 1\}$. L'application π coïncide sur H_t avec la translation de vecteur $-te_n$. Ainsi π induit une bijection de $C \cap H_t$ sur C_t, de bijection réciproque induite par la translation de vecteur te_n. Autrement dit, pour x' dans E', $\boxed{x' \in C_t \iff x' + te_n \in C.}$

Élements de notation : Résultat : 4.

Q 20. Puisqu'un espace affine est convexe et que l'intersection de deux convexes l'est aussi, $C_{\pm 1}$ est l'image d'un convexe par une application linéaire à valeurs dans E', donc est un convexe de E'. Par hypothèse sur C, il contient deux vecteurs différents par leur dernière coordonnée et donc C a une intersection non vide avec $H_{\pm 1}$, et ainsi $C_{\pm 1}$ est non vide. Enfin $C_{\pm 1}$ est l'image réciproque de $C \cap H_{\pm 1}$ par la translation affine de vecteur te_n. Puisque c'est une application isométrique, elle est lipschitzienne donc continue. Ainsi $C_{\pm 1}$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue, et est donc fermé. Par conséquent $\boxed{C_{+1} \text{ et } C_{-1} \text{ sont des convexes fermé non vides de } E'.}$

Élements de notation : H_t convexe, intersection de convexes et image linéaire d'un convexe : 1 ; Non vide et inclus dans E' : 1 ; Continuité de $x' \mapsto x' + te_n$: 1 , Image réciproque continue d'un fermé : 1.

Q 21. Les événements $(\varepsilon_n = 1)$ et $(\varepsilon_n = -1)$ formant un système complet d'événements non négligeables, la formule des probabilités totales donne, puisqu'on a affaire à une variable de Rademacher

$$\mathbf{P}\left(X \in C\right) = \frac{1}{2}\mathbf{P}\left(X \in C \,|\, \varepsilon_n = 1\right) + \frac{1}{2}\mathbf{P}\left(X \in C \,|\, \varepsilon_n = -1\right) .$$

Or on a $(X \in C) \cap (\varepsilon_n = \pm 1) = (X' \in C_{\pm 1}) \cap (\varepsilon_n = \pm 1)$ et, par indépendance des (ε_i), le lemme des coalitions fournit $\mathbf{P}\left(X' \in C_{\pm 1} \,|\, \varepsilon_n = \pm 1\right) = \mathbf{P}\left(X' \in C_{\pm 1}\right)$. Il en résulte

$$\boxed{\mathbf{P}\left(X \in C\right) = \frac{1}{2}\mathbf{P}\left(X' \in C_{+1}\right) + \frac{1}{2}\mathbf{P}\left(X' \in C_{-1}\right).}$$

Élements de notation : Probas totales : 1 ; Indépendance : 1 ; Lemme des coalitions : 1 ; Résultat : 1.

II.D - Une inégalité cruciale

Q 22. Par définition $Y_{\pm\varepsilon_n}$ appartient à $C_{\pm\varepsilon_n}$ et donc $Y_{\pm\varepsilon_n} \pm \varepsilon_n e_n$ appartient à C. Il en résulte, par convexité de C, que $(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n)$ appartient à C et donc, par définition de la distance $\boxed{d(X,C) \leq \|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) - X\|.}$

Élements de notation : Résultat : 4.

Q 23. Puisqu'on a $X = X' + \varepsilon_n e_n$, il vient

$$(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) - X = (1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X' - 2\varepsilon_n e_n)$$

et donc, par théorème de Pythagore et puisque $E' \oplus^\perp \mathbf{R}e_n = E$,

$$\|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) - X\|^2 = \|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\|^2 + 4\lambda^2$$

et donc, par croissance du carré sur $\mathbf{R}_+$, $\boxed{d(X,C)^2 \leq 4\lambda^2 + \|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\|^2.}$ De plus, pour x et y dans E', l'application $t \mapsto \|(1-t)x + ty\|^2$ est convexe sur $\mathbf{R}$ car polynomiale de degré

2 avec coefficient dominant égal à $\|x\|^2 + \|y\|^2$, donc positif, par identité de polarisation. On en déduit, puisque λ est dans $[0;1]$ et en appliquant l'inégalité de convexité à $x = Y_{\varepsilon_n} - X'$ et $y = Y_{-\varepsilon_n} - X'$ et en écrivant $\lambda = (1-\lambda)\times 0 + \lambda \times 1$:

$$d(X,C)^2 \leq 4\lambda^2 + (1-\lambda)\|Y_{\varepsilon_n} - X'\|^2 + \lambda \|Y_{-\varepsilon_n} - X'\|^2$$

et donc puisque $Y_{\pm 1}$ est dans $C_{\pm 1}$, par définition de la distance et positivité des termes, on a

$$\boxed{d(X,C)^2 \leq 4\lambda^2 + (1-\lambda)d(X',C_{\varepsilon_n})^2 + \lambda d(X',C_{-\varepsilon_n})^2.}$$

Élements de notation : Pythagore : 2 ; Convexité : 1 ; Positivité et distance : 1.

II.E - Espérances conditionnelles

Q 24. Par hypothèse sur X et C, $X(\Omega)\cap C$ rencontre H_{-1}, i.e. $X'(\Omega)$ rencontre C_{-1} et ainsi, puisque X' suit une loi uniforme sur $X'(\Omega)$ par indépendance des (ε_i), $p_- > 0$.

Élements de notation : Résultat : 4.

Q 25. En utilisant la question 23 il vient par croissance de l'exponentielle

$$\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{\varepsilon_n})^2\right)^{1-\lambda}\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{-\varepsilon_n})^2\right)^{\lambda}.$$

On note A l'événement $(\varepsilon_n = -1)$. C'est un événement de probabilité $\frac{1}{2}$, donc non nulle, et la croissance de la probabilité $\mathbf{P}_A$ entraînant celle de l'espérance conditionnelle, il vient

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\,\middle|\,A\right) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{\varepsilon_n})^2\right)^{1-\lambda}\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{-\varepsilon_n})^2\right)^{\lambda}\,\middle|\,A\right).$$

De plus par indépendance de X' avec ε_n, il vient pour tout réel t

$$\mathbf{P}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{\pm\varepsilon_n})^2\right) = t\,\middle|\,A\right) = \mathbf{P}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{\mp 1})^2\right) = t\right)$$

et donc, par définition de l'espérance conditionnelle,

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\exp\left(\tfrac{1}{8}d(X,C)^2\right)\,\middle|\,\varepsilon_n = -1\right) \leq \exp\left(\tfrac{\lambda^2}{2}\right)\mathbf{E}\left(\exp\left(\tfrac{1}{8}d(X',C_{-1})^2\right)^{1-\lambda}\exp\left(\tfrac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)^{\lambda}\right).}$$

Élements de notation : Croissance exponentielle et espérance : 1 ; A non négligeable : 1 ; Indépendance : 2.

Q 26. De façon tautologique si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, et en vertu de l'inégalité de Hölder pour $p = \frac{1}{1-\lambda}$ et $q = \dfrac{1}{\lambda}$, il résulte de la positivité des exponentielles qu'on a

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{-1})^2\right)^{1-\lambda}\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)^{\lambda}\right) \leq \mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{-1})^2\right)\right)^{1-\lambda}\mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)\right)^{\lambda}$$

puis, en utilisant l'inégalité de la question précédente,

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\exp\left(\tfrac{1}{8}d(X,C)^2\right)\,\middle|\,\varepsilon_n = -1\right) \leq \exp\left(\tfrac{\lambda^2}{2}\right)\mathbf{E}\left(\exp\left(\tfrac{1}{8}d(X',C_{-1})^2\right)\right)^{1-\lambda}\mathbf{E}\left(\exp\left(\tfrac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)\right)^{\lambda}.}$$

Élements de notation : $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$: 1 ; Positivités des exponentielles : 1 ; Hölder : 2.

Q 27. D'après la question 23 on a $d(X,C)^2 \leq d(X',C_{\varepsilon_n})^2$ et donc, par croissance de l'exponentielle et de l'espérance conditionnelle, on a

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\,\middle|\,\varepsilon_n=1\right) \leq \mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{\varepsilon_n})^2\right)\,\middle|\,\varepsilon_n=1\right).$$

Par indépendance des (ε_i) et donc de X' avec ε_n par lemme des coalitions, on a

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{\varepsilon_n})^2\right)\,\middle|\,\varepsilon_n=1\right) = \mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)\right)$$

et donc, puisque E', C_1, X' vérifient les hypothèses de l'inégalité 1 avec $\dim(E') = n-1$ d'après la définition et la question 20, il résulte de l'hypothèse de récurrence, qu'on a

$$p_+\mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)\right) \leq 1$$

et donc, puisque $p_+ \geq p_- > 0$, il vient $\boxed{\mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\,\middle|\,\varepsilon_n=1\right) \leq \frac{1}{p_+}.}$

Élements de notation : Croissances : 1 ; Indépendance : 2 ; $p_+ > 0$: 1.

Q 28. D'après la question 7 et puisque $(\varepsilon_n = 1)$ et $(\varepsilon_n = -1)$ forment un système complet d'événements non-négligeables, il résulte de l'hypothèse de récurrence appliquée à E', $C_{\pm 1}$ et X' en vertu de la question 20, et de la croissance des puissances positives,

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\exp\left(\tfrac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_+} + \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{1}{(p_-)^{1-\lambda}}\frac{1}{(p_+)^{\lambda}}\right).}$$

Élements de notation : Q7 : 1 ; Non-négligeables : 1 ; Hypothèse de récurrence : 1 ; Croissance : 1.

II.F - Optimisation

Q 29. Par hypothèse on a $p_+ \geq p_-$ et on a $p_- > 0$ d'après la question 24 et donc $1 - \dfrac{p_-}{p_+}$ est bien défini et appartient à $[0;1[$. En mettant p_+ en facteur dans l'inégalité précédente et en utilisant $1-\lambda = \dfrac{p_-}{p_+} > 0$,

il vient directement $\boxed{\mathbf{E}\left(\exp\left(\tfrac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leq \frac{1}{2p_+}\left(1 + \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)(1-\lambda)^{1-\lambda}\right).}$

Élements de notation : 0/4.

Q 30. Soit x dans $[0;1[$. Par convexité de l'exponentielle on a $e^{-x/2} \geq 1 - \dfrac{x}{2}$ et donc, par stricte positivité des termes, $e^{x/2} \leq \dfrac{2}{2-x}$. Par concavité du logarithme il vient également

$$x\ln\left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right) + (1-x)\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \leq \ln\left(1 + x\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

et donc, par positivité de x et croissance du logarithme et puisqu'on a $1 + x\dfrac{2}{2-x} = \dfrac{2+x}{2-x}$, il vient en utilisant l'équation fonctionnelle du logarithme $\boxed{\dfrac{x^2}{2} + (x-1)\ln(1-x) \leq \ln(2+x) - \ln(2-x).}$

Élements de notation : Résultat : 4. (Étude de fonction ? Seriously ? !)

Q 31. Soit x dans $[0;1[$. Par croissance de la fonction $1+\exp$, il vient directement à partir de la question précédente $\boxed{1+\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)(1-x)^{1-x} \leq \frac{4}{2-x}.}$

Élements de notation : 0/4.

Q 32. En utilisant la question précédente appliquée au λ de la question 29, qui est bien dans $[0;1[$, il vient

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leq \frac{1}{2p_+}\frac{4}{2-\lambda}$$

et comme $2-\lambda = 1+\frac{p_+}{p_-} = \frac{2\mathbf{P}(X \in C)}{p_-}$ grâce à la question 21, il s'ensuit

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leq \frac{p_-}{p_+\mathbf{P}(X \in C)}$$

et donc, par positivité des probabilités et hypothèse sur p_+, l'inégalité 1 est vraie dans ce cas. Comme elle est vraie indépendamment de la dimension dans le cas $X(\Omega)\cap C < 2$, on conclut par principe de récurrence que $\boxed{\text{l'inégalité 1 est vraie en toute généralité.}}$

Élements de notation : $0 \leq \lambda < 1$: 1 ; Positivités : 1 ; Résultat : 2.

II.G - Inégalité de Talagrand

Q 33. On applique l'inégalité de Markov à la fonction croissante et strictement positive donnée par $\exp\left(\frac{t^2}{8}\right)$ sur $\mathbf{R}_+^*$. Il résulte de la positivité des probabilités que pour t dans $\mathbf{R}_+^*$, on a

$$\mathbf{P}(X \in C)\,\mathbf{P}(d(X,C) \geq t) \leq \mathbf{P}(X \in C)\frac{\mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right)}{\exp\left(\frac{t^2}{8}\right)}$$

et donc, d'après la question précédente $\boxed{\mathbf{P}(X \in C)\,\mathbf{P}(d(X,C) \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right).}$

Élements de notation : Croissance et stricte positivité : 0/2 ; Markov : 1 ; Positivité : 1.

PARTIE III - Démonstation du théorème de Johnson-Lindenstrauss

III.A - Une inégalité de concentration

Q 34. *Remarque* : la quantité r n'est pas définie. On suppose que c'est un réel.
Par définition C est l'image réciproque d'une boule fermée de $\mathbf{R}^k$ par l'application linéaire donnée par l'évaluation en u. Comme les espaces considérés sont de dimensions finies, C est donc fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue. Une boule étant convexe, par inégalité triangulaire, son image réciproque par une application linéaire l'est aussi puisque celle-ci préserve les combinaisons convexes. Il en résulte que $\boxed{C \text{ est convexe fermé.}}$

Élements de notation : Convexe : 2 ; Fermé : 2.

Q 35. Soit M dans $\mathscr{M}_{k,d}(\mathbf{R})$ et $(m_1,\ldots,m_k)$ ses vecteurs lignes, de sorte que Mu est la matrice colonne dont les éléments sont les produits scalaires $\langle m_i \,|\, u\rangle$, calculés dans $\mathbf{R}^k$. Par inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout i dans $[\![1;k]\!]$, $\langle m_i \,|\, u\rangle^2 \leq \|m_i\|^2$ puisque u est unitaire et donc $g(M)^2 \leq \sum_{i=1}^{k} \|m_i\|^2$. Comme cette dernière expression est également celle de la trace de $M^T M$, il vient par croissance de la racine carrée et positivité des normes $\boxed{\|Mu\| \leq \|M\|_F.}$

Élements de notation : Cauchy-Schwarz : 2 ; Résultat : 2.

Q 36. Soit M dans $\mathscr{M}_{k,d}(\mathbf{R})$ tel que $d(M,C) < t$. Par définition de la distance comme infimum on dispose de N dans C tel que $\|M-N\|_F < t$ et donc, par inégalité triangulaire et en utilisant la question précédente et la définition de C, on a

$$g(M) \leq g(M-N) + g(N) \leq \|M-N\|_F + r < r + t\,,$$

d'où $\boxed{d(M,C) < t \Longrightarrow g(M) < r+t.}$

Élements de notation : Résultat : 4.

Q 37. Si r est strictement négatif le membre de droite est nul par positivité de g et l'assertion s'ensuit par positivité de l'exponentielle. Sinon on remarque que C est non vide car il contient 0 et on a $(g(X) \leq r) = (X \in C)$ et

$$(g(X) \geq r+t) \subset (d(X,C) \geq t)$$

d'après la question précédente. Par positivité de la probabilité il vient

$$\mathbf{P}\left(g(X) \leq r\right)\mathbf{P}\left(g(X) \geq r+t\right) \leq \mathbf{P}\left(X \in C\right)\mathbf{P}\left(d(X,C) \geq t\right)$$

et il résulte alors de l'inégalité de Talagrand $\boxed{\mathbf{P}\left(g(X) \leq r\right)\mathbf{P}\left(g(X) \geq r+t\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{8}t^2\right).}$

Élements de notation : $r<0$: 1 ; C non vide : 1 ; Résultat : 2.

III.B - Médianes

Q 38. On prend les notations de l'énoncé. Comme $X(\Omega)$ est fini non vide, il en va de même de son image par g. On peut donc l'ordonner : $g(X(\Omega)) = \{g_i \,|\, i \in [\![1;n]\!]\}$ avec $g_1 < \cdots < g_n$. On en déduit

$$G = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{]g_i;+\infty[}\mathbf{P}\left(g(X) = g_i\right)\,,$$

de sorte que G est une fonction croissante, à valeurs dans $[0;1]$, nulle sur $]-\infty; g_1[$ égale à 1 sur $[g_n;+\infty[$. Il en résulte

$$G^{-1}(\left[\frac{1}{2};1\right]) = [y_j;+\infty[\quad \text{avec } j = \min\left\{i \in [\![1;n]\!] \,|\, G(y_i) \geq 12\right\}$$

et donc en posant $m = g(y_j)$, on a

$$\mathbf{P}\left(g(X) \leq m\right) = G(y_j) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}\left(g(X) \geq m\right) = 1 - \lim_{y_j^-} G$$

avec $\lim_{y_j^-} G = 0$ si $j=1$ et $\lim_{y_j^-} G = G(y_{j-1})$ sinon. Dans tous les cas cette limite est strictement inférieure à $\frac{1}{2}$ par définition de j et donc $\mathbf{P}\left(g(X) \geq m\right) > \frac{1}{2}$. En particulier $\boxed{g(X) \text{ admet } m \text{ comme médiane.}}$

Élements de notation : Définition de m : 2 ; Résultat : 2.

Q 39. On applique la question 37 avec $r = m - t$ et avec $r = m$. Il vient par positivité des probabilités et définition de la médiane

$$\frac{1}{2}\mathbf{P}\left(g(X) \leq m-t\right) \leq \mathbf{P}\left(g(X) \leq m-t\right)\mathbf{P}\left(g(X) \geq m\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{8}t^2\right)$$

$$\text{et} \quad \frac{1}{2}\mathbf{P}\left(g(X) \geq m+t\right) \leq \mathbf{P}\left(g(X) \leq m\right)\mathbf{P}\left(g(X) \geq m+t\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{8}t^2\right)$$

et donc, par sommation et incompatibilité des événements considérés,

$$\mathbf{P}\left(|g(X) - m| \geq t\right) = \mathbf{P}\left(g(X) \leq m-t\right) + \mathbf{P}\left(g(X) \geq m+t\right) \leq 4\exp\left(-\frac{1}{8}t^2\right) ,$$

$\boxed{\text{i.e. } \mathbf{P}\left(|g(X) - m| \geq t\right) \leq 4\exp\left(-\frac{1}{8}t^2\right).}$

Élements de notation : incompatibilité : 1 ; Résultat : 3.

Q 40. La question précédente montre que $g(X) - m$ est une variable aléatoire à queue sous-gaussienne avec $a = 4$ et $b = \dfrac{1}{8}$. La question 9 donne alors $\boxed{\mathbf{E}\left((g(X) - m)^2\right) \leq 32.}$

Élements de notation : 0/4.

Q 41. Par définition on a par linéarité de l'espérance

$$\mathbf{E}\left(g(X)^2\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}\left(\left(\sum_{j=1}^{d} u_j \varepsilon_{ij}\right)^2\right)$$

et donc par indépendance des (ε_{ij}) et égalité de Bienaymé

$$\mathbf{E}\left(g(X)^2\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{d} u_j^2 \mathbf{E}\left(\varepsilon_{ij}^2\right) .$$

Comme u est unitaire et ε_{ij}^2 est déterministe égal à 1, il vient $\boxed{\mathbf{E}\left(g(X)^2\right) = k}$ et donc, par inégalité de Cauchy-Schwarz ou positivité de la variance, on a $\boxed{\mathbf{E}\left(g(X)\right) \leq \sqrt{k}.}$

Élements de notation : Indépendance : 2 ; Égalité de Bienaymé : 1 ; Cauchy-Schwarz : 1.

Q 42. D'après ce qui précède, par linéarité de l'espérance, on a par positivité de m, puisque g est à valeurs positives,

$$\mathbf{E}\left((g(X) - m)^2\right) = k - 2m\mathbf{E}\left(X\right) + m^2 \geq k - 2m\sqrt{k} + m^2$$

et donc $\boxed{(\sqrt{k} - m)^2 \leq \mathbf{E}\left((g(X) - m)^2\right).}$

Élements de notation : $m \geq 0$: 1 ; Résultat : 3.

III.C - Un lemme-clé

Q 43. Puisque $g(X) - m$ est à queue sous-gaussienne avec $a = 4$ et $b = \dfrac{1}{8}$ d'après la question 39, on peut appliquer le résultat de la question 13. Pour $\delta = m - \sqrt{k}$, on a d'après la question précédente et la question 40 $\delta^2 \leq 32 = \dfrac{a}{b}$, et il vient ainsi, pour t strictement positif, $\boxed{\mathbf{P}\left(\left|g(X) - \sqrt{k}\right| \geq t\right) \leq 4\exp(4)\exp\left(-\frac{1}{16}t^2\right).}$

Élements de notation : $\delta^2 \leq \frac{a}{b}$: 2 ; Résultat : 2.

Q 44. En utilisant la question précédente il vient, par positivité de $\sqrt{k}$ et en prenant $t = \sqrt{k}\varepsilon$, ce qui est bien strictement positif,

$$\mathbf{P}\left(|g(A_k) - 1| \geq \varepsilon\right) \leq 4\exp(4)\exp\left(-\frac{1}{8}k\varepsilon^2\right)$$

et donc, par croissance de l'exponentielle et puisque $0 < \delta < \frac{1}{2}$,

$$\mathbf{P}\left(|g(A_k) - 1| \geq \varepsilon\right) \leq 4\exp(4)\delta^{10} < \frac{e^4}{2^7}\delta\ .$$

Comme $e^4 < 3^4 < 10^2 = 100 < 128 = 2^7$, on en déduit, par croissance de la probabilité, $\boxed{\mathbf{P}\left(|g(A_k) - 1| > \varepsilon\right) < \delta.}$

Élements de notation : $t\sqrt{k} > 0$: 1 ; Croissances : 1 ; $0 < \delta < \frac{1}{2}$: 1 ; $e^4 < 2^7$: 1.

III.D - Conclusion

Q 45. Puisque les vecteurs (v_i) sont distincts on peut appliquer ce qui précède avec $u = \dfrac{1}{\|v_i - v_j\|}(v_i - v_j)$ et $1 \leq i < j \leq N$, et il vient $\boxed{\mathbf{P}\left(\overline{E_{ij}}\right).}$

Élements de notation : v_i distincts : 0/2 ; Résultat : 2.

Q 46. Par sous-additivité la probabilité de la réunion des événements précédents, pour $1 \leq i < j \leq N$ est inférieure à $\frac{N(N-1)}{2}\delta$ et donc, par passage au complémentaire, $\boxed{\mathbf{P}\left(\bigcap_{1\leq i<j\leq N} E_{ij}\right) \geq 1 - \frac{N(N-1)}{2}\delta.}$

Élements de notation : Sous-additivité : 2 ; Complémentaire : 2.

Q 47. On applique ce qui précède avec $\delta = \frac{1}{N^2}$, de sorte que $c = 320$ convient, i.e. sous les conditions du théorème de Johnson-Lindenstrauss, on a $k \geq 160\dfrac{\ln(1/\delta)}{\varepsilon^2}$ et donc

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{1\leq i<j\leq N} E_{ij}\right) \geq 1 - \frac{N(N-1)}{2N^2} > \frac{1}{2} > 0$$

et en particulier on dispose d'au moins une ε-isométrie, donnée par l'un des A_k, satisfaisant aux conclusions du théorème, i.e. $\boxed{\text{le théorème de Johnson-Lindenstrauss est vrai.}}$

Élements de notation : Résultat : 4.