Notations et définitions

Dans tout le problème, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et n est un entier naturel. On note $\mathbf{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans $\mathbf{K}$ et, pour $n \geq 1$, $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ la $\mathbf{K}$-algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbf{K}$. La matrice unité est notée I_n et on désigne par $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
Pour toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on note ${}^{\mathrm{t}}A$ la transposée de la matrice A, $\mathrm{rg}(A)$ son rang, $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace, $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique, π_A son polynôme minimal et $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres dans $\mathbf{K}$.
Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{K}$ de dimension finie n supérieure ou égale à 2, et $\mathscr{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E. On note f un endomorphisme de E.
On note $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $\forall k \in \mathbf{N}$, $f^{k+1} = f^k \circ f$. Si $Q \in \mathbf{K}[X]$ avec $Q(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m$, $Q(f)$ désigne l'endomorphisme $a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_m f^m$. On note $\mathbf{K}[f]$ la sous-algèbre commutative de $\mathscr{L}(E)$ constituée des endomorphismes $Q(f)$ quand Q décrit $\mathbf{K}[X]$. De même, on utilise les notations suivantes, similaires à celles des matrices, pour un endomorphisme f de E : $\mathrm{rg}(f)$, $\mathrm{Tr}(f)$, χ_f, π_f et $\mathrm{Sp}(f)$.
Enfin, on dit que f est *cyclique* si et seulement s'il existe un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

PARTIE I - Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

I.A Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

I.1) Montrer que M et ${}^{\mathrm{t}}M$ ont même spectre.

I.2) Montrer que ${}^{\mathrm{t}}M$ est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.

I.B - Matrices compagnons

I.3) Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$ et $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. On considère la matrice

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Déterminer en fonction de Q le polynôme caractéristique de C_Q.

I.4) Soit λ une valeur propre de ${}^{\mathrm{t}}C_Q$. Déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

I.C - Endomorphismes cycliques

I.5) Montrer que f est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q, où Q est un polynôme unitaire de degré n.

I.6) Soit f un endomorphisme cyclique. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbf{K}$ et a toutes ses racines simples.

I.7) Montrer que si f est cyclique, alors $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathscr{L}(E)$ et le polynôme minimal de f est de degré n.

I.D - Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

I.8) Soit x un vecteur non nul de E. Montrer qu'il existe un entier p strictement positif tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ soit libre et qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbf{K}^p$ tel que :

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0 .$$

I.9) Justifier que $\mathrm{V}ect\left(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x)\right)$ est stable par f.

I.10) Montrer que $X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \cdots + \alpha_0$ divise le polynôme χ_f.

I.11) Démontrer que $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul.

PARTIE II - Étude des endomorphismes cycliques

II.A - Endomorphismes cycliques nilpotents

Dans cette sous-partie II.A, on suppose que f est un endomorphisme nilpotent de E. On note r le plus petit entier naturel tel que $f^r = 0$.

II.12) Montrer que f est cyclique si et seulement si $r = n$. Préciser alors la matrice compagnon.

II.B

Dans cette sous-partie II.B, on suppose $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

On suppose que $(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre et on se propose de montrer que f est cyclique. On factorise le polynôme caractéristique de f sous la forme $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$ où les λ_k sont les p valeurs propres deux à deux distinctes de f et les m_k de $\mathbf{N}^*$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

Pour $k \in [\![1; p]\!]$, on pose $F_k = \mathrm{Ker}((f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{m_k})$.

II.13) Montrer que les sous-espaces vectoriels F_k sont stables et $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Pour $k \in [\![1; p]\!]$, on note φ_k l'endomorphisme induit par $f - \lambda_k \mathrm{Id}$ sur le sous-espace vectoriel F_k.

II.14) Justifier que φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k.

On note ν_k le plus petit entier naturel tel que $\varphi_k^{\nu_k} = 0$.

II.15) Pourquoi a-t-on $\nu_k \leq \dim(F_k)$?

II.16) Montrer, avec l'hypothèse proposée, que pour tout $k \in [\![1; p]\!]$, on a $\nu_k = m_k$.

II.17) Expliciter la dimension de F_k pour $k \in [\![1; p]\!]$, puis en déduire l'existence d'une base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E dans laquelle f a une matrice diagonale par blocs, ces blocs appartenant à $\mathcal{M}_{m_k}(\mathbf{C})$ et étant de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

On pose $x_0 = u_1 + u_{m_1+1} + \cdots + u_{m_1+\cdots+m_{p-1}+1}$.

II.18) Déterminer les polynômes Q dans $\mathbf{C}[X]$ tels que $Q(f)(x_0) = 0$.

II.19) Justifier que f est cyclique.

PARTIE III - Endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius

On appelle commutant de f l'ensemble $C(f) = \{g \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

III.20) Montrer que $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$.

III.A - Commutant d'un endomorphisme cyclique On suppose que f est cyclique et on choisit un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

Soit $g \in C(f)$, un endomorphisme qui commute avec f.

III.21) Justifier l'existence de $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ de $\mathbf{K}$ tels que $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$.

III.22) Montrer alors $g \in \mathbf{K}[f]$.

III.23) Établir qu'on a $g \in C(f)$ si et seulement s'il existe un polynôme $R \in \mathbf{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$.

III.B - Décomposition de Frobenius On se propose de démontrer le théorème de décomposition de Frobenius : toute matrice est semblable à une matrice diagonale par blocs, ces blocs étant des matrices compagnons.

III.24) Montrer que si la réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_r$ de E est un sous-espace vectoriel, alors l'un des sous-espaces F_i contient tous les autres.

On note d le degré de π_f.

III.25) Justifier l'existence d'un vecteur x_1 de E tel que $(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1))$ est libre.
Pour tout x non nul de E, on pourra remarquer que $I_x = \{P \in \mathbf{K}[X] \mid P(f)(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathbf{K}[X]$ engendré par un polynôme unitaire $\pi_{f,x}$ diviseur de π_f et considérer les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(\pi_{f,x}(f))$.

On pose $e_1 = x_1$, $e_2 = f(x_1)$, …, $e_d = f^{d-1}(x_1)$ et $E_1 = \mathrm{V}ect\,(e_1, e_2, \dots, e_d)$.

III.26) Montrer que E_1 est stable par f et que $E_1 = \{P(f)(x_1) \mid P \in \mathbf{K}[X]\}$.

On note ψ_1 l'endomorphisme induit par f sur le sous-espace vectoriel E_1.

III.27) Justifier que ψ_1 est cyclique.

On complète, si nécessaire, $(e_1, e_2, \dots, e_d)$ en une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E. Soit Φ la d-ième forme coordonnée qui à tout vecteur x de E associe sa coordonnée suivant e_d. On note $F = \left\{x \in E \;\middle|\; \forall i \in \mathbf{N},\ \Phi(f^i(x)) = 0\right\}$.

III.28) Montrer que F est stable par f et que E_1 et F sont en somme directe.

Soit Ψ l'application linéaire de E dans $\mathbf{K}^d$ définie, pour tout $x \in E$, par

$$\Psi(x) = (\Phi(f^i(x)))_{0 \leq i \leq d-1} = (\Phi(x), \Phi(f(x)), \dots, \Phi(f^{d-1}(x)))$$

III.29) Montrer que Ψ induit un isomorphisme entre E_1 et $\mathbf{K}^d$.

III.30) Montrer $E = E_1 \oplus F$.

III.31) En déduire qu'il existe r sous-espaces vectoriels de E, notés $E_1, \dots, E_r$, tous stables par f, tels que :

- $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$;
- pour tout $1 \leq i \leq r$, l'endomorphisme ψ_i induit par f sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique ;
- si on note P_i le polynôme minimal de ψ_i, alors P_{i+1} divise P_i pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq r-1$.

III.C - Commutant d'un endomorphisme quelconque

III.32) Montrer que la dimension de $C(f)$ est supérieure ou égale à n.

III.33) On suppose que f est un endomorphisme tel que l'algèbre $C(f)$ est égale à $\mathbf{K}[f]$. Montrer que f est cyclique.

PARTIE IV - Endomorphismes orthocycliques

Dans cette partie, on suppose $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et que E est un espace euclidien. Le produit scalaire de deux vecteurs x, y de E est noté $\langle x \mid y \rangle$ et on désigne par $\mathscr{O}(E)$ le groupe des isométries vectorielles de E.

On dit qu'un endomorphisme est *orthocyclique* s'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q (matrice compagnon).

IV.A - Isométries vectorielles orthocycliques Soit $f \in \mathscr{O}(E)$.

IV.34) Soit $f' \in \mathscr{O}(E)$ ayant le même polynôme caractéristique que f. Montrer qu'il existe des bases orthonormales $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E pour lesquelles la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est égale à la matrice de f' dans $\mathcal{B}'$.

IV.35) En déduire que f est orthocyclique si et seulement si $\chi_f = X^n - 1$ ou $\chi_f = X^n + 1$.

IV.B - Endomorphismes nilpotents orthocycliques Soit f un endomorphisme nilpotent de E.

IV.36) Montrer qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire inférieure.

IV.37) En déduire que f est orthocyclique si et seulement si

$$f \text{ est de rang } n-1 \text{ et } \forall (x,y) \in ((\mathrm{Ker}(f))^{\perp})^2,\ \langle f(x) \mid f(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle\ .$$

Première composition – CentraleSupélec 2019 – MP

PARTIE I

I.A

Q 1. Par invariance du déterminant et de I_n par transposition, on a, pour λ dans $\mathbf{K}$, $\det(\lambda I_n - M) = \det(\lambda I_n - {}^{\mathrm{t}}M)$ et en particulier ces deux quantités sont nulles simultanément, i.e.

$\boxed{M \text{ et } {}^{\mathrm{t}}M \text{ ont même spectre.}}$

Q 2. Puisque la transposée est un anti-automorphisme de $\mathbf{K}$-algèbre, pour tout polynôme P dans $\mathbf{K}[X]$, on a $P({}^{\mathrm{t}}M) = {}^{\mathrm{t}}(P(M))$ et donc ces deux matrices sont nulles simultanément. En particulier M et ${}^{\mathrm{t}}M$ sont simultanément annulées par un polynôme simplement scindé dans $\mathbf{K}$ ou non, i.e.

$\boxed{M \text{ et } {}^{\mathrm{t}}M \text{ sont simultanément diagonalisables ou non.}}$

I.B

Q 3. Soit λ dans $\mathbf{K}$. En développant la matrice $\lambda I_n - C_Q$ par rapport à la première ligne, on obtient $(-1)^{n+1}a_0$ fois une matrice triangulaire supérieure de diagonale formée de -1 plus λ fois la matrice associée au polynôme $X^{n-1} + a_{n-1}X^{n-2} + \cdots + a_1$. Pour $n = 2$ on obtient ainsi $a_0 + Xa_1$ et un récurrence immédiate, en remarquant qu'on a affaire au schéma de Hörner d'écriture des polynômes, donne

$$\chi_Q = a_0 + X(a_1 + X(a_2 + \cdots (a_{n-1} + X))) = Q\,,$$

i.e. $\boxed{\chi_Q = Q.}$

Q 4. Pour U dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, on note $(u_1, \ldots, u_n)$ ses coordonnées et alors on a ${}^{\mathrm{t}}C_Q U = \lambda U$ si et seulement si $u_2 = \lambda u_1$, …, $u_n = \lambda u_{n-1}$ et $-\sum_{i=1}^{n} a_{i-1}u_i = \lambda u_n$. Comme cette dernière condition est automatique, soit en remplaçant u_i par $\lambda^{i-1}u_1$, soit en observant que l'on sait que l'espace propre associé à λ n'est pas réduit à $\{0\}$, et donc $\boxed{\operatorname{Ker}({}^{\mathrm{t}}C_Q - \lambda I_n) \text{ est engendré par } (1, \lambda, \ldots, \lambda^{n-1}) \text{ et est donc de dimension 1.}}$

I.C

Q 5. Par définition f est cyclique si et seulement s'il existe une base de E de la forme $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ avec x_0 dans E, i.e. si et seulement s'il existe une base de E relativement à laquelle la matrice de f, notée $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ vérifie $a_{i,j} = \delta_{i,j+1}$ pour $j < n$ i.e. est la matrice C_Q pour $Q = X^n - \sum_{i=1}^{n} a_{i,n}X^{i-1}$:

$\boxed{f \text{ est cyclique si et seulement s'il existe un base relativementà laquelle sa matrice est une matrice compagnon.}}$

Q 6. Puisque le polynôme caractéristique est invariant par conjugaison, χ_f est le polynôme caractéristique de C_Q pour Q donné par la question 5, i.e. $Q = \chi_f$ d'après la question 3. De plus f est diagonalisable si et seulement si sa matrice dans une base quelconque l'est, i.e. si et seulement si C_Q l'est et donc si et seulement si ${}^{\mathrm{t}}C_Q$ l'est d'après la question 2. Il résulte donc de la question 4 que $\boxed{f \text{ est diagonalisable si et seulement si } \chi_f \text{ est simplement scindé sur } \mathbf{K}.}$

Q 7. Par définition on dispose de x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ forme une base de E. En particulier pour tout polynôme P dans $\mathbf{K}_{n-1}[X]$, en notant $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, il vient $P(f)(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$ et donc $P(f)(x_0)$ est nul si et seulement si P est nul. En particulier si $P(f) = 0$ alors P est nul, i.e. $\boxed{(\mathrm{Id}, f, \ldots, f^{n-1}) \text{ est libre.}}$ Le polynôme minimal de f est donc de degré au moins n. Si l'on admet le théorème de Cayley-Hamilton, comme χ_f est unitaire et annule f, il est minimal en degré pour ces propriétés et donc $\pi_f = \chi_f$. En particulier $\boxed{\deg(\pi_f) = n.}$

Remarque : le calcul de la question 5 montre qu'on a $Q(f)(x_0) = 0$. On en déduit, puisque que f et $Q(f)$ commutent, que pour k entier naturel on a $Q(f)(f^k(x_0)) = f^k(Q(f)(x_0)) = f^k(0) = 0$ et donc $Q(f)$ est nul sur une base de E, i.e. $Q(f) = 0$. Comme Q est unitaire, de degré n et annule f, on en déduit $\pi_f = Q$, ce qui permet de conclure également, sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, ce qui est raisonnable au vu de la sous-partie suivante.

I.D

Q 8. L'ensemble $\left\{k \in \mathbf{N}^* \mid (x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)) \text{ est libre}\right\}$ est une partie de $\mathbf{N}$, contenant 1 car x est non nul et majoré par la dimension de n, par définition de la dimension. Soit alors p son plus grand élément. En particulier $\boxed{(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)) \text{ est libre.}}$ De plus $(x, f(x), \dots, f^p(x))$ est alors lié car $p+1$ ne fait pas partie de l'ensemble considéré. On dispose alors d'une famille $(a_0, \dots, a_p)$ de scalaires non tous nuls telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k f^k(x) = 0$. Si a_p est nul, alors par indépendance de $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ les autres scalaires sont nuls aussi. On en déduit $a_p \neq 0$ et en posant $\alpha_k = \frac{a_k}{a_p}$, il vient

$\boxed{\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0.}$

Q 9. Un sous-espace vectoriel f de E est stable si et seulement si une famille génératrice de cet espace a une image par f incluse dans F. Pour $F = \mathrm{V}ect\left(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\right)$, dont une famille génératrice est $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$, l'assertion est tautologique pour les vecteurs $f^k(x)$ avec $0 \leq k < p-1$. Le cas $k = p-1$ résulte de la question précédente, et donc $\boxed{\mathrm{V}ect\left(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\right) \text{ est } f\text{-stable.}}$

Q 10. On note F le sous-espace vectoriel précédent de E. D'après la question 8 et par construction la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ en est une base et donc la bi-restriction de f à F est cyclique, de sorte que le polynôme caractéristique de cette bi-restriction est $X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \cdots + \alpha_0$ d'après la question 3. Puisque F est f-stable, par exemple en écrivant la matrice de f dans une base de E complétant une base de F, $\chi_{f_{|F}}$ divise χ_f, i.e. $\boxed{X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \cdots + \alpha_0 \mid \chi_f.}$

Q 11. D'après la question précédente, on dispose de R dans $\mathbf{K}[X]$ tel que $\chi_f = R(X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \cdots + \alpha_0)$ et donc

$$\chi_f(f)(x) = R(f)(\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x)) = R(f)(0) = 0\ .$$

Comme cette assertion est vraie pour tout x non nul dans E et qu'elle est tautologique pour $x = 0$, $\chi_f(x)$ est l'endomorphisme nul de E, i.e. $\boxed{\chi_f(f) = 0.}$

PARTIE II

II.A

Q 12. D'après la question 7 si f est cyclique, alors π_f est de degré n. Comme π_f divise X^r par hypothèse (et en fait lui est égal), on doit alors avoir $r = n$. Réciproquement si $r = n$, alors $\mathrm{Ker}(f^{n-1}) \neq E$ et on dispose de x n'appartenant pas à $\mathrm{Ker}(f^{n-1})$. Soit alors $(a_0, \dots, a_{n-1})$ des scalaires non tous nuls et p le plus petit indice k pour lequel a_k est non nul. Alors

$$f^{n-1-p}\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(x)\right) = a_p f^{n-1}(x) + f^n\left(\sum_{i>p} a_i f^{-i-p-1}(x)\right) = a_p f^{n+1}(x) \neq 0$$

car $f^n = 0$ et $f^{n-1}(x) \neq 0$. On en déduit que $(x, \dots, f^{n-1}(x))$ est libre et donc est une base de E, par cardinalité. Donc $\boxed{f \text{ est cyclique.}}$ De plus dans la base précédente la matrice de f est C_{X^n}, et donc $\boxed{\text{la matrice compagnon est } C_{X^n}.}$

II.B

Q 13. Pour tout polynôme P dans $\mathbf{K}[X]$, $\mathrm{Ker}(P(f))$ est f-stable et en particulier, $\boxed{F_k \text{ est } f\text{-stable.}}$ Puisque les (λ_k) sont tous distincts deux à deux les polynômes $(X-\lambda_k)^{m_k}$ sont premiers entre eux et il résulte du lemme de décomposition des noyaux que la somme des F_k est directe et égale au noyau de $\mathrm{Ker}(\chi_f(f))$. Le théorème de Cayley-Hamilton permet de conclure $\boxed{E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p.}$

Q 14. Par construction $\mathrm{Ker}(\varphi_k^{m_k}) = \mathrm{Ker}((f-\lambda_k \mathrm{Id}_E)^{m_k}) \cap F_k = F_k$ et donc $\boxed{\varphi_k \text{ est nilpotent.}}$

Q 15. Puisque X^{ν_k} annule φ_k, son polynôme minimal est une puissance de X et donc, par définition de ν_k c'est X^{ν_k}. Comme le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique, son degré est inférieur à celui du polynôme caractéristique, i.e. à la dimension de F_k : $\boxed{\nu_k \leq \dim(F_k).}$

Q 16. Le polynôme minimal de la restriction de f à F_k est donc $(X-\lambda_k)^{\nu_k}$ et donc celui de f est le ppcm de ces polynômes minimaux, car $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ d'après la question 12. Puisque les λ_k sont distincts, il vient $\pi_f = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X-\lambda_k)^{\nu_k}$. Par hypothèse aucun polynôme de degré strictement inférieur à n n'annule f, de sorte que, d'après le théorème de cayley-Hamilton, $\pi_f = \chi_f$ et donc, par identification des facteurs irréductibles, $\boxed{\text{pour tout } k \text{ dans } [\![1;p]\!],\ \nu_k = m_k.}$

Q 17. On déduit des questions précédentes $m_k \leq \dim(F_k)$ et donc puisque l'inégalité inverse est également vraie $\boxed{\dim(F_k) = m_k.}$ Il résulte alors de la question 12 que φ_k est cyclique, de matrice compagnon associée $C_{X^{m_k}}$. Dans une base relativement à laquelle la matrice de φ_k a cette forme, celle de la restriction de f à F_k est alors $\boxed{\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}}$.

Q 18. Soit Q dans $\mathbf{C}[X]$. Puisque la somme $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ est directe d'après la question 12 et puisque chaque F_k est f stable, la décomposition de $Q(f)(x_0)$ est donnée par $Q(f)(u_1) + Q(f)(u_{m_1+1}) + \cdots + Q(f)(u_{m-1+\cdots+m_{p-1}+1})$ et donc $Q(f)(x_0)$ est nul si et seulement si $Q(f)$ annule u_1, u_{m_1+1}, $\ldots$, $u_{m-1+\cdots+m_{p-1}+1}$. Comme on peut écrire $Q(f) = P(f-\lambda_k \mathrm{Id}_E)$ avec $P = Q(X+\lambda_k)$, la question précédente donne $X^{m_k} \mid P$ ou encore $(X-\lambda_k)^{m_k} \mid Q$. Comme les (λ_k) sont tous distincts les polynômes $((X-\lambda_k)^{m_k})$ sont premiers entre eux et le lemme de Gauss permet d'en déduire que χ_f divise Q. Réciproquement le théorème de Cayley-Hamilton montre que si χ_f divise Q, alors $Q(f) = 0$ et donc a fortiori $Q(f)(x_0) = 0$. Donc $\boxed{Q(f)(x_0) = 0 \iff Q \in \chi_f \mathbf{C}[X].}$

Q 19. Il résulte de la question précédente que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est libre, car le degré de χ_f est n. Ainsi, par définition, $\boxed{f \text{ est cyclique.}}$

PARTIE III

Q 20. L'application de $\mathscr{L}(E)$ dans lui-même donnée par $g \mapsto f \circ g - g \circ f$ est linéaire et donc $C(f)$ est un espace vectoriel. Soit g et h dans $C(f)$, on a alors $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f) = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, par associativité du produit de composition. Comme l'identité commute à f, $\boxed{C(f) \text{ est une sous-algèbre de } \mathscr{L}(E).}$

III.A

Q 21. Puisqu'on a affaire à une base $g(x_0)$ est combinaison linéaire de la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ et on dispose de scalaires $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ tels que $\boxed{g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0).}$

Q 22. On pose $P = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$ de sorte que la question précédente donne $g(x_0) = P(f)(x_0)$. Puisque f commute à $P(f)$ et à g, il vient pour tout entier naturel k $g(f^k(x_0)) = f^k(g(x_0)) = f^k(P(f)(x_0)) = P(f)(f^k(x_0))$, de sorte que les endomorphismes g et $P(f)$ coïncident sur une base de E. Par conséquent on a $g = P(f)$ et donc $\boxed{g \in \mathbf{K}[f].}$

Q 23. La réciproque de la question précédent étant directe, on a $C(f) = \mathbf{K}[f]$. Par ailleurs pour P dans $\mathbf{K}[f]$, la division euclidienne de P par χ_f s'écrit $P = Q\chi_f + R$ avec R dans $\mathbf{K}_{n-1}[X]$ et on a $P(f) = R(f)$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Il en résulte $\mathbf{K}[f] \subset \mathbf{K}_{n-1}[X]$. L'inclusion réciproque étant tautologique, il vient $\boxed{C(f) = \mathbf{K}_{n-1}[f].}$

III.B

Q 24. Soit $(F_i)_{1 \leq i \leq r}$ des sous-espaces vectoriels de E et F leur somme, i.e. l'espace vectoriel engendré par leur réunion. Pour i dans $[\![1; r]\!]$, si F_i est distinct de F, on dispose de x_i dans $F \setminus F_i$ et, de même si la réunion $\cup_{j \neq i} F_j$ ne contient pas F_i, on dispose de y_i dans $F_i \setminus \cup_{j \neq i} F_j$. En particulier pour λ dans $\mathbf{K}$, $x_i + \lambda y_i$ n'est pas dans F_i sinon x_i le serait et deux tels vecteurs pour des scalaires λ distincts ne sont pas dans un même F_j, sinon leur différence le serait et par là même y_i le serait. Il en résulte que la droite affine passant par x_i et de direction y_i contient au plus $r - 1$ points de $\cup_{j=1}^r F_j$. Comme $\mathbf{K}$ est infini, on en déduit que soit parmi F_i et $\cup_{j \neq i} F_j$, l'un contient l'autre, soit la réunion $\cup_{j=1}^r F_j$ est distincte de F. On en déduit que sous l'hypothèse que tous les F_k sont distincts de F et que $F = \cup_{j=1}^r F_j$, alors le prédicat « $F_k \subset \cup_{j<k} F_j$ et $F = \cup_{j<k} F_j$ » est vrai pour $k = r$ et donc, par récurrence descendante, pour tout k dans $[\![1; r]\!]$. Comme il aboutit à $F = \{0\}$ pour $k = 1$ et donc à $F_1 = \dots = F_r = \{0\}$, cette contradiction montre que $F = \cup_{j=1}^r F_j$ entraîne que l'un des F_k est égal à F, i.e. $\boxed{\text{si une réunion finie de sous-espaces vectoriel en est un, l'un d'eux contient les autres.}}$

Q 25. Soit x dans E. L'application de $\mathbf{K}[X]$ dans E donnée par $P \mapsto P(f)(x)$ est linéaire et son noyau est stable par multiplication par $\mathbf{K}[X]$ car pour P et Q dans $\mathbf{K}[X]$ on a $QP(f)(x) = Q(f)(P(f)(x))$. C'est donc un idéal de $\mathbf{K}[X]$. Il contient le noyau de $P \mapsto P(f)$, i.e. $\pi_f \mathbf{K}[X]$. C'est donc un idéal non nul de $\mathbf{K}[X]$, et si on note $\pi_{f,x}$ son générateur unitaire, $\pi_{f,x} \mid \pi_f$. Soit J l'ensemble des diviseurs unitaires de π_f. C'est un ensemble fini, de cardinal 2^k où k est le nombre de facteurs irréductibles (unitaires) de π_f comptés avec multiplicité. Pour P dans J, on note $F_P = \mathrm{Ker}(P(f))$. Pour x dans E, $\pi_{f,x} \in J$ et on note I la réunion des $\pi_{f,x}$ pour x dans E, de sorte que I est un ensemble fini, inclus dans J. Pour x dans E, comme $\pi_{f,x}(f)(x) = 0$ par construction, on dispose de P dans I tel que $x \in F_P$. On en déduit que E est réunion des $(F_P)_{P \in I}$. Comme on a affaire à une réunion finie de sous-espaces vectoriels de E, on en déduit que l'un d'eux contient les autres, i.e. $E = \mathrm{Ker}(P(f))$ pour un certain P dans I. On dispose donc de x_1 dans E tel que π_{f,x_1} annule f. Comme ce polynôme est un diviseur de π_f, par définition de ce dernier, $\pi_{f,x_1} = \pi_f$. En particulier π_{f,x_1} est de degré d. Par définition de π_{f,x_1} cela entraîne en particulier que $\boxed{(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1)) \text{ est libre.}}$

Q 26. On raisonne comme en question 9 et donc E_1 est f-stable si et seulement si les $f(e_i)$ sont dans E_1, ce qui est tautologique pour $i < d$. Pour $i = d$, puisque π_f est de degré d, f^d est combinaison linéaire des f^i pour $0 \leq i < d$, et en particulier $f(e_d)$ est combinaison linéaire des e_i pour $1 \leq i \leq d$. Par conséquent $\boxed{E_1 \text{ est } f\text{-stable.}}$ Par définition E_1 est l'ensemble des $P(f)(x_1)$ pour P dans $\mathbf{K}_{d-1}[X]$. Réciproquement puisque E_1 est f-stable, $f^k(e_1)$ est dans E_1 pour tout entier k et donc $P(f)(e_1)$ aussi pour tout polynôme P dans $\mathbf{K}[X]$, i.e. $\boxed{E_1 = \{P(f)(x) \mid P \in \mathbf{K}[X]\}.}$

Q 27. Par construction $(e_1, \ldots, e_d)$ est une base de E_1 et est égale à $(e_1, \psi(e_1), \ldots, \psi^{d-1}(e_1))$, donc par définition $\boxed{\psi \text{ est cyclique.}}$

Q 28. Soit x dans F, alors pour i dans $\mathbf{N}$ on a $\Phi(f^i(f(x))) = \Phi(f^{i+1}(x)) = 0$ et donc $f(x) \in F$, i.e. $\boxed{F \text{ est } \Phi\text{-stable.}}$ Par ailleurs si x est dans E_1, on dispose de scalaires (α_k) tels qu'on ait $x = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k e_k$ et pour i dans $[\![0; d-1]\!]$ on a $f^i(x) = \sum_{k=1} d - i\alpha_k e_{k+i}$, donc $\Phi(f^i(x)) = \alpha_{d-i}$. On en déduit que $E_1 \cap F$ est réduit à $\{0\}$, donc $\boxed{E_1 \text{ et } F \text{ sont en somme directe.}}$

Q 29. Avec les notations de la question précédente, pour $x = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k e_k$ on a $\Psi(x) = (\alpha_d, \ldots, \alpha_1)$, i.e. $\Psi_{|E_1}$ est l'isomorphisme canonique entre E_1 et $\mathbf{K}^d$ associé à la base $(e_d, \ldots, e_1)$ de E_1 :
$\boxed{\Psi \text{ induit un isomorphisme entre } E_1 \text{ et } \mathbf{K}^d.}$

Q 30. Par linéarité de Φ, on a $F = \{x \in E \,|\, \forall P \in \mathbf{K}[X]\,,\ \Phi(P(f)(x)) = 0\}$. Comme pour P dans $\mathbf{K}[X]$, par division euclidienne par π_f comme en question 23, $P(f)$ est égal à $R(f)$ avec R le reste de la division euclidienne de P par π_f et donc $F = \{x \in E \,|\, \forall R \in \mathbf{K}_{d-1}[X]\,,\ \Phi(R(f)(x)) = 0\}$. Et une nouvelle fois par linéarité de Φ, il vient $F = \mathrm{Ker}(\Psi)$. Le théorème du rang et la question précédente permettent de conclure $\boxed{E = E_1 \oplus F.}$

Q 31. On démontre l'assertion par récurrence sur la dimension de E en utilisant le prédicat sur m entier naturel : pour tout $\mathbf{K}$-espace vectoriel G de dimension m et tout endomorphisme g de G, il existe r sous-espaces vectoriels de G, notés G_1, …, G_r, tous g-stables tels que $G = G_1 \oplus \cdots \oplus G_r$, la bi-restriction de g à G_i est cyclique de polynôme minimal P_i vérifiant $P_{i+1} \mid P_i$ si $i < r$.

Soit donc G et g comme ci-dessus. La question précédente permet de construire G_1 et F tels que $G = G_1 \oplus F$, tous deux g-stables. Comme F est g-stable il est de dimension strictement inférieure à celle de G. Si le prédicat étudié est vrai pour F, on dispose de G_2, …, G_r tous $g_{|F}$-stable tels que $F = G_2 \oplus \cdots \oplus G_r$ et tels que la bi-restriction de $g_{|G}$ à G_i est cyclique de polynôme minimal P_i vérifiant $P_{i+1} \mid P_i$ si $i < r$. Comme la bi-restriction de $g_{|G}$ à G_i est aussi celle de g, on constate que le prédicat est vrai pour G à condition de démontrer $P_2 \mid P_1$. Or comme on a affaire à des espaces $g_{|F}$-stables le polynôme minimal de $g_{|F}$ est le ppcm des polynômes minimaux de ses bi-restrictions aux G_i. C'est donc le ppcm des P_i et donc P_2 par divisibilité des P_i entre eux. On en déduit que P_2 divise π_g et comme d'après la question 7 P_1 est de degré d, donc est égal à π_g car il divise π_g, il vient $P_2 \mid P_1$. Ceci achève la récurrence et donc $\boxed{\text{le théorème de décomposition de Frobenius est démontré.}}$

III.C

Q 32. On utilise les notations de la question précédente. Par stabilité des sous-espaces E_i, si g laisse stable les E_i et si les restrictions de g et f à E_i commutent entre elles, alors g commute à f. D'après la question 23 on en déduit $\prod_{i=1}^{r} C(f_{|E_i}) \simeq \prod_{i=1}^{r} \mathbf{K}_{m_i-1}[X]$ en notant $m_i = \dim(E_i)$. Par propriété universelle, ou recollement, on a une application injective de $\prod_{i=1}^{r} C(f_{|E_i})$ dans $C(f)$. En particulier $C(f)$ est de dimension supérieure à $\sum_{i=1}^{r} m_i$, i.e. n puisque E est somme directe des E_i : $\boxed{\dim(C(f) \geq n).}$

Q 33. Comme le degré de π_f est inférieur à celui de χ_f donc à n et que $\mathbf{K}[f]$ est isomorphe à un supplémentaire de $\pi_f\mathbf{K}[X]$ d'après le théorème du rang, la dimension de $\mathbf{K}[f]$ est le degré de π_f. Enfin comme $\mathbf{K}[f]$ est inclus dans $C(f)$, on a $\mathbf{K}[f] = C(f)$ si et seulement si $\pi_f = \chi_f$ et $C(f)$ est de dimension n. D'après la question 25 on en déduit que f est cyclique. La réciproque est donnée par les questions 22 et 23 :
$\boxed{f \text{ est cyclique si et seulement si } C(f) = \mathbf{K}[f].}$

PARTIE IV

IV.A

Q 34. La théorie générale montre que χ_f est produit de termes de la forme $X+1$, $X-1$ et $X^2-2\cos(\theta)X+1$ avec $0<\theta<\pi$. De plus f est alors orthosemblable à une matrice par blocs avec des blocs de la forme (-1), (1) et $\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$, avec autant de blocs que de facteurs correspondants. On en déduit que si deux isométries ont même polynôme caractéristique, leurs formes réduites sont égales et donc il existe des bases orthonormales $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E pour lesquelles les matrices de f et f' sont les formes réduites et donc sont égales : $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f').}$

Q 35. Si f est orthocyclique, sa matrice dans une base orthonormée quelconque est une matrice orthogonale et donc orthosemblable à une matrice compagnon elle-même orthogonale. Par orthogonalité des colonnes de cette matrice on en déduit que tous les coefficients de la dernière colonne sont nuls sauf le premier, et comme cette colonne admet une norme 1, ce premier coefficient est égal à ± 1, i.e. le polynôme associé est $X^n\pm 1$. On en déduit, d'après la question 3, $\chi_f=X^n\pm 1$. Réciproquement si $\chi_f=X^n\pm 1$, on considère f' dans $\mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans une base orthonormée quelconque de E est C_{χ_f}. Alors cette matrice est orthogonale et donc $f'\in\mathscr{O}(E)$. Il résulte de la question précédente que la matrice de f dans une base orthonormée quelconque est orthosemblable à C_{χ_f} et donc $\boxed{f \text{ est orthocyclique.}}$

IV.B

Q 36. Puisque f est nilpotent on a $\chi_f=X^n$ et donc χ_f est scindé sur $\mathbf{R}$ et ainsi f est trigonalisable. On dispose donc d'une base $(e_1,\dots,e_n)$ dans laquelle la matrice de f est triangulaire inférieure et, par nilpotence, cette matrice est de diagonale nulle. Autrement dit $f(e_n)=0$, $f(e_{n-1})\in \mathrm{V}ect\,(e_n)$, …, $f(e_1)\in \mathrm{V}ect\,(e_2,\dots,e_n)$. Soit alors $(e'_n,\dots,e'_1)$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de $(e_n,\dots,e_1)$. Comme e'_k appartient à $\mathrm{V}ect\,(e_k,\dots,e_n)$, $f(e'_k)$ appartient à $\mathrm{V}ect\,(f(e_k),\dots,f(e_n))$ donc à $\mathrm{V}ect\,(e_{k+1},\dots,e_n)$ et donc aussi à $\mathrm{V}ect\left(e'_{k+1},\dots,e'_n\right)$. Autrement dit

$$\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans la base orthonormée } (e'_n,\dots,e'_1) \text{ est triangulaire inférieure.}}$$

Q 37. Si f est orthocyclique sa matrice dans une base orthonormée quelconque est semblable à C_{χ_f}, i.e. à C_{X^n}. Soit alors $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée relativement à laquelle la matrice de f est C_{X^n}. On a $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{V}ect\,(e_2,\dots,e_n)$ et $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{V}ect\,(e_n)$. Donc f est de rang $n-1$ et $\mathrm{Ker}(f)^\perp=\mathrm{V}ect\,(e_1,\dots,e_{n-1})$. Soit alors $(a_i)_{1\le i\le n-1}$ et $(b_i)_{1\le i\le n-1}$ des scalaires, alors en posant $x=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}a_ie_i$ et $y=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}b_ie_i$, il vient $\langle x\,|\,y\rangle=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}a_ib_i$, ainsi que $f(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}a_ie_{i+1}$ et $f(y)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}b_ie_{i+1}$ et donc $\langle f(x)\,|\,f(y)\rangle=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}a_ib_i$. Donc $\forall(x,y)\in\left((\mathrm{Ker}(f))^\perp\right)^2$, $\langle f(x)\,|\,f(y)\rangle=\langle x\,|\,y\rangle$.

Réciproquement on dispose d'après la question précédente d'une base orthonormée $(e_1,\dots,e_n)$ relativement à laquelle la matrice de f est triangulaire inférieure. En particulier $f(e_n)=0$ et donc $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{V}ect\,(e_n)$ puisque f est de rang $n-1$. On montre ensuite par récurrence descendante on a $f(e_k)=\pm e_{k+1}$ pour $k<n$. Pour $k=n-1$, on a $f(e_{n-1})\in\mathbf{R}e_n$ et comme e_{n-1} est unitaire et dans $\mathrm{Ker}(f)^\perp$, son image est également unitaire et ainsi $f(e_{n-1})=\pm e_n$. Si le résultat est vrai pour tout $j>k$, alors commence par remarquer que $f(e_k)$ appartient à $\mathrm{V}ect\,(e_{k+1},\dots,e_n)$. Comme de plus e_k est orthogonal à e_n, tout comme e_{k+1}, …, e_{n-1}, $f(e_k)$ est orthogonal à $f(e_{k+1})$, …, $f(e_{n-1})$ et ainsi $f(e_k)$ appartient à $\mathbf{R}e_{k+1}$. Comme enfin il est unitaire $f(e_k)=\pm e_{k+1}$. On note $f(e_k)=\varepsilon_ke_{k+1}$ pour $k<n$ avec $\varepsilon_k=\pm 1$. On pose alors $e'_k=f^{k-1}(e_1)$ pour $1\le k\le n$, de sorte que $e'_k=\pm e_k$ et donc $(e'_1,\dots,e'_n)$ est orthonormée et, par construction on en déduit que f est orthocyclique si et seulement si $\boxed{f \text{ est de rang } n-1 \text{ et } \forall(x,y)\in((\mathrm{Ker}(f))^\perp)^2,\ \langle f(x)\,|\,f(y)\rangle=\langle x\,|\,y\rangle.}$