Première composition
CentraleSupélec 2023 – MPI

Sur le calcul ombral

Objectifs

Ce problème introduit le calcul ombral et propose d'en démontrer certains résultats.
Historiquement, ce « calcul » reposait sur un ensemble de manipulations heuristiques sur les indices qui étaient traités comme des puissances. Pour justifier ces règles, une solution consiste à utiliser des endomorphismes agissant sur des polynômes. Ce problème a pour objectif de présenter ces règles et d'en déduire des identités polynomiales non triviales.

Notations

- On désigne par $\mathbf{K}$ l'un des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et par $\mathbf{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$. Dans ce problème, on identifie polynômes formels et fonctions polynomiales de $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{K}$ associées. On identifie de plus les éléments de $\mathbf{K}$ aux polynômes constants.
- Tout polynôme p dans $\mathbf{K}[X]$ s'écrit de manière unique $p = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ où (a_k) est une suite à valeurs dans $\mathbf{K}$ nulle à partir d'un certain rang. Si p n'est pas le polynôme nul, son degré $\deg(p)$ est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$. Par convention, le degré du polynôme nul est -1 (cette convention est inhabituelle).
- Si n est un entier naturel, $\mathbf{K}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- On note $\mathcal{L}(\mathbf{K}[X])$ l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbf{K}[X]$ et I l'endomorphisme identité de $\mathbf{K}[X]$. Les éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbf{K}[X])$ sont les endomorphismes bijectifs (automorphismes) de l'espace vectoriel $\mathbf{K}[X]$.
- Pour T dans $\mathcal{L}(\mathbf{K}[X])$ et p dans $\mathbf{K}[X]$, on note $Tp = T(p)$ et on définit la suite d'endomorphismes $\left(T^k\right)$ par récurrence : $T^0 = I$ et, pour tout k dans $\mathbf{N}$, $T^{k+1} = T \circ T^k = T^k \circ T$.
- Enfin D désigne l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbf{K}[X]$: $\forall p \in \mathbf{K}[X]$, $D(p) = Dp = p'$.

PARTIE I - Étude d'endomorphismes de $\mathbf{K}[X]$

I.A - Soit a dans $\mathbf{K}$. Pour tout p dans $\mathbf{K}[X]$, on pose $E_a(p) = E_a p = p(X+a)$.

Q1. Démontrer que E_a est un automorphisme de $\mathbf{K}[X]$.

I.B - À tout p dans $\mathbf{R}[X]$, on associe la fonction $J(p) = Jp$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}\,, \quad J(p)(x) = Jp(x) = \int_x^{x+1} p(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Q2. Démontrer que J est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.

Q3. Démontrer que J conserve le degré et que J est inversible.

I.C - À tout p dans $\mathbf{K}[X]$, on associe la fonction $L(p) = Lp$ de $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{K}$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{K}\,, \quad L(p)(x) = Lp(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-t} p'(x+t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Q4. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^k\,\mathrm{d}t$ existe pour tout k dans $\mathbf{N}$ et calculer sa valeur.

Q5. Démontrer que L est un endomorphisme de $\mathbf{K}[X]$. Est-il inversible ?

PARTIE II - Formule de Taylor pour les endomorphismes shift-invariants de $\mathbf{K}[X]$

Soit T un endomorphisme de $\mathbf{K}[X]$. On dit que :

- T est *shift-invariant* si $\forall a \in \mathbf{K}$, $E_a \circ T = T \circ E_a$.
- T est un *endomorphisme delta* si T est shift-invariant et si l'image du polynôme X par T est une constante non nulle : $TX \in \mathbf{K}^*$.

II.A

Q6. Soit a dans $\mathbf{K}$. Vérifier que les endomorphismes I et D sont shift-invariants, ainsi que les endomorphismes E_a, J et L définis dans la partie I. Sont-ils des endomorphismes delta ?

Q7. Démontrer que l'ensemble des endomorphismes shift-invariants de $\mathbf{K}[X]$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbf{K}[X])$. L'ensemble des endomorphismes delta de $\mathbf{K}[X]$ est-il stable par addition ? par composition ?

II.B

Q8. Soit $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$. Pour tout polynôme p dans $\mathbf{K}[X]$, démontrer que l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p$ a un sens et définit un polynôme de $\mathbf{K}[X]$.

On note alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$ l'application de $\mathbf{K}[X]$ qui, à un polynôme p dans $\mathbf{K}[X]$, associe le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p$.

Q9. Démontrer que, pour toute suite $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{K}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$ est un endomorphisme shift-invariant.

Q10. Soit $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbf{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbf{K}$ telles que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k$. Démontrer, pour tout k dans $\mathbf{N}$, $a_k = b_k$.

Pour tout n dans $\mathbf{N}$, on définit le polynôme $q_n = \dfrac{X^n}{n!}$. On se donne T un endomorphisme de $\mathbf{K}[X]$.

Q11. Démontrer que T est un endomorphisme shift-invariant si, et seulement si, $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (Tq_k)(0) D^k$.

Q12. Démontrer que deux endomorphismes shift-invariants de $\mathbf{K}[X]$ commutent.

II.C - Dans cette sous-partie, on applique le résultat de la question 11 aux endomorphismes de la partie I.

Q13. Pour tout p dans $\mathbf{K}[X]$ non nul et a dans $\mathbf{K}$, démontrer, à l'aide de la question 11, $p(X+a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\deg(p)} \frac{a^k}{k!} p^{(k)}$ où $p^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième du polynôme p. Reconnaître cette formule.

Q14. Pour p dans $\mathbf{K}[X]$, exprimer Jp en fonction des dérivées $p^{(k)}$ $(k \in \mathbf{N})$ de p.

Q15. Démontrer que l'endomorphisme $D - I$ est inversible et exprimer L en fonction de $(D-I)^{-1}$.

II.D - Dans cette sous-partie, T est un endomorphisme non nul shift-invariant de $\mathbf{K}[X]$. On rappelle que le degré du polynôme nul est par convention égal à -1 .

Q16. Démontrer qu'il existe un entier naturel $n(T)$ tel que $\forall p \in \mathbf{K}[X]$, $\deg(Tp) = \max\{-1, \deg(p) - n(T)\}$.

Q17. En déduire $\mathrm{Ker}(T)$ en fonction de $n(T)$.

Q18. Démontrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(1) T est inversible ;

(2) $T1 \neq 0$;

(3) $\forall p \in \mathbf{K}[X]$, $\deg(Tp) = \deg(p)$.

Q19. Si ces conditions sont vérifiées, démontrer que T^{-1} est encore un endomorphisme shift-invariant.

II.E - Dans cette sous-partie, T est un endomorphisme delta de $\mathbf{K}[X]$.

Q20. Démontrer qu'il existe une suite de scalaires $(\alpha_k)_{k\in\mathbf{N}}$ vérifiant $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 \neq 0$ et $T = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k D^k$.

Q21. Démontrer qu'il existe un unique endomorphisme U shift-invariant et inversible tel que $T = D \circ U$. Préciser U dans le cas $T = D$, puis dans le cas $T = L$.

Q22. Pour tout polynôme p dans $\mathbf{K}[X]$ non nul, vérifier $\deg(Tp) = \deg(p) - 1$. En déduire $\mathrm{Ker}(T)$ et le spectre de T.

Q23. Pour n dans $\mathbf{N}$, on note T_n la restriction de T à $\mathbf{K}_n[X]$. Démontrer que T_n est un endomorphisme de $\mathbf{K}_n[X]$. Est-il diagonalisable ?

Q24. Déterminer $\mathrm{Im}\,(T_n)$ en fonction de n dans $\mathbf{N}$ et en déduire que T est surjectif.

PARTIE III - Suite de polynômes associée à un endomorphisme delta

On souhaite montrer que, pour tout endomorphisme delta Q, il existe une unique suite de polynômes $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{K}[X]$ telle que

- $q_0 = 1$;
- $\forall n \in \mathbf{N}$, $\deg(q_n) = n$;
- $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $q_n(0) = 0$;
- $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $Qq_n = q_{n-1}$.

Cette suite sera appelée *suite de polynômes associée* à l'endomorphisme delta Q.

III.A - Soit Q un endomorphisme delta.

Q25. Démontrer l'existence et l'unicité de la suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes associée à Q.

Q26. Démontrer, pour tout entier naturel n, $\forall (x,y) \in \mathbf{K}^2$, $q_n(x+y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q_k(x)q_{n-k}(y)$.

III.B - Réciproquement, soit $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbf{K}[X]$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\deg(q_n) = n$ et

$$\forall (x,y) \in \mathbf{K}^2, \quad q_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} q_k(x)q_{n-k}(y) .$$

Q27. Démontrer qu'il existe un unique endomorphisme delta Q dont $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite de polynômes associée.

III.C - Soit Q un endomorphisme delta, soit $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de polynômes associée à Q et soit n un entier naturel.

Q28. Démontrer que la famille $(q_0, q_1, \ldots, q_n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

Q29. D'après la question 23, Q induit un endomorphisme de $\mathbf{K}_n[X]$ noté Q_n. Donner sa matrice dans la base précédente. En déduire sa trace, son déterminant et son polynôme caractéristique.

III.D - Dans cette sous-partie, on détermine la suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes associée à certains endomorphismes.

Q30. Pour $Q = D$, vérifier $\forall n \in \mathbf{N}$, $q_n = \dfrac{X^n}{n!}$.

Q31. Pour $Q = E_1 - I$, vérifier $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $q_n = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$.

III.E - Cette sous-partie propose de généraliser la formule de Taylor démontrée dans la partie II. On se donne Q un endomorphisme delta et on note $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de polynômes associée à Q.

Q32. Démontrer que, pour tout p dans $\mathbf{K}[X]$, l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(Q^k p\right)(0)q_k$ a un sens et définit un polynôme de $\mathbf{K}[X]$, puis $p = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(Q^k p\right)(0)q_k$.

Q33. En déduire que, pour tout endomorphisme shift-invariant T, on a $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (Tq_k)(0)Q^k$.

III.F

Q34. En choisissant $Q = E_1 - I$, démontrer que, si p est un polynôme non constant, alors

$$p'(X) = \sum_{k=1}^{\deg(p)} \frac{1}{k}\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+1}\binom{k}{j}p(X+j)\right).$$

C'est la formule de dérivation numérique des polynômes.

PARTIE IV - Un peu de calcul ombral

Si T est un endomorphisme de $\mathbf{K}[X]$ on définit sa dérivée de Pincherle, notée T', comme l'endomorphisme de $\mathbf{K}[X]$ tel que

$$\forall p \in \mathbf{K}[X], \quad T'(p) = T(Xp) - XT(p) .$$

IV.A - Soit S et T deux endomorphismes de $\mathbf{K}[X]$.

Q35. Démontrer que, s'il existe $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de scalaires telle que $T=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$, alors $T'=\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k D^{k-1}$.

Q36. Si T est un endomorphisme shift-invariant, démontrer que T' est encore un endomorphisme shift-invariant.

Q37. Si T est un endomorphisme delta, démontrer que T' est un endomorphisme shift-invariant et inversible.

Q38. Vérifier $(S\circ T)'=S'\circ T+S\circ T'$.

IV.B - Soit Q un endomorphisme delta. On rappelle que d'après la partie II, il existe un unique endomorphisme U shift-invariant et inversible tel que $Q=D\circ U$. On note $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de polynômes associée à Q au sens de la partie III.

Q39. Démontrer que, pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, on a $\left(Q'\circ U^{-n-1}\right)(X^n)=XU^{-n}\left(X^{n-1}\right)$.

Q40. En déduire, pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, $n!\,q_n(X)=XU^{-n}\left(X^{n-1}\right)$ puis $nq_n(X)=X\left(Q'\right)^{-1}(q_{n-1})$.

IV.C - Dans cette sous-partie, on applique les résultats de la question 40 à l'endomorphisme L étudié dans les parties I et II. On note $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sa suite de polynômes associée au sens de la partie III.

Q41. Vérifier, pour $n\in\mathbf{N}^*$, $\ell_n'=\ell_{n-1}'-\ell_{n-1}$, $X\ell_n''-X\ell_n'+n\ell_n=0$ et $\ell_n(X)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1}\frac{X^k}{k!}$.

IV.D - Soit Q un endomorphisme delta de suite de polynômes associée notée $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Q42. Démontrer qu'il existe un unique endomorphisme inversible T tel que

$$\forall n\in\mathbf{N}\,,\quad Tq_n=\frac{X^n}{n!}\ .$$

Q43. Démontrer aussi $D=T\circ Q\circ T^{-1}$.

IV.E - On fixe $\alpha>0$ et on définit la fonction W de $\mathbf{K}[X]$ par

$$W:\left|\begin{array}{cl}\mathbf{K}[X] & \to\mathbf{K}[X]\\ p & \mapsto p(\alpha X)\end{array}\right.$$

Q44. Démontrer que W est un automorphisme de $\mathbf{K}[X]$.

On pose $P=W\circ L\circ W^{-1}$ où L est l'endomorphisme étudié dans les parties I et II.

Q45. Démontrer

$$P=\frac{1}{\alpha}D\circ\left(\frac{1}{\alpha}D-I\right)^{-1}\ .$$

Q46. Démontrer ensuite que P est un endomorphisme delta dont la suite de polynômes associée $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie

$$\forall n\in\mathbf{N}\,,\quad p_n=\ell_n(\alpha X)\ .$$

Q47. Vérifier $D=L\circ(L-I)^{-1}$ puis $P=L\circ(\alpha I+(1-\alpha)L)^{-1}$.

On note T l'unique automorphisme vérifiant, pour tout n dans $\mathbf{N}$, $T\ell_n=\dfrac{X^n}{n!}$ et on pose $Q=T\circ P\circ T^{-1}$.

Q48. Démontrer $Q=D\circ(\alpha I+(1-\alpha)D)^{-1}$. En déduire que Q est un endomorphisme delta dont la suite de polynômes associée $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie

$$\forall n\in\mathbf{N}^*\,,\quad r_n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\alpha^k(1-\alpha)^{n-k}\frac{X^k}{k!}\ .$$

Q49. Conclure

$$\forall n\in\mathbf{N}^*\,,\quad \ell_n(\alpha X)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\alpha^k(1-\alpha)^{n-k}\ell_k(X)\ .$$

Les endomorphismes W et T étudiés dans la sous-partie IV.E *sont appelés opérateurs ombraux. Les polynômes (ℓ_n) associés à l'endomorphisme L sont connus sous le nom de polynômes de* Laguerre *(de paramètre -1). La dernière formule démontrée grâce aux opérateurs ombraux est leur formule de duplication.*

Première composition – CentraleSupélec 2023 – MPI

PARTIE I - Étude d'endomorphismes de $\mathbf{K}[X]$

Q1. La composition à droite étant linéaire, il en va de même pour E_a. De plus on a $E_a \circ E_{-a} = E_{-a} \circ E_a = I$, donc $\boxed{E_a \text{ est un automorphisme de } \mathbf{K}[X].}$

Q2. Par linéarité de l'intégrale, J est linéaire. De plus tout fonction polynoniale admet une telle fonction comme primitive. Il résulte alors du théorème de Leibniz-Newton, dit théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, que $J(p)$ est une fonction polynomiale, et donc, par identification de la fonction avec le polynôme associé, $\boxed{J \text{ est un endomorphisme de } \mathbf{R}[X].}$

Q3. Pour n dans $\mathbf{N}$, on a $JX^n = \dfrac{1}{n+1}((X+1)^{n+1} - X^{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}X^k$. La famille $(JX^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc constituée de polynômes non nuls, échelonnée en degré et est donc libre. Puisque J envoie une base sur une famille libre, J est injective. Par cardinalité et puisqu'on a affaire à des polynômes de degrés inférieurs à n, $(JX^k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$ et on en déduit que J induit un automorphisme de $\mathbf{K}_n[X]$ par restriction. Si p est un polynôme de degré n et si d est le degré de Jp, alors $d \leq n$ d'après ce qui précède et si $d < n$, alors Jp appartient à l'image de $\mathbf{K}_d[X]$ par J et donc J n'est pas injective, ce qui est une contradiction. On en conclut que $\boxed{J \text{ conserve le degré}}$. De plus p admet un antécédent par J dans $\mathbf{K}_n[X]$ et donc J est également surjective, de sorte que $\boxed{J \text{ est inversible.}}$
Remarque : si on note q un polynôme tel que $q' = p$, on a $Jp = q(X+1) - q$. La formule de Taylor, qui est exacte pour les polynômes, donne alors $Jp = \displaystyle\sum_{n=1}^{\deg(q)}\frac{q^{(n)}}{n!} = p + \frac{1}{2}p' + \dots$, ce qui démontre que J préserve le degré. Une telle application nécessairement bijective.

Q4. Soit k dans $\mathbf{N}$ et f_k défini sur $\mathbf{R}_+$ par $f_k(t) = e^{-t}t^k$. Alors f_k est continu et donc localement intégrable sur $\mathbf{R}_+$. De plus, par croissance comparée, $f_k(t) = \mathrm{o}\left(e^{-t/2}\right)$ et donc f_k est localement intégrable en $+\infty$ par comparaison à une fonction exponentielle d'exposant strictement négatif. Pour $k = 0$, cette intégrale vaut 1, en prenant $-f_0$ comme primitive de f_0. Une intégration par parties donne alors $(k+1)\int f_k = f_{k+1} + \int f_{k+1}$ et donc, en prenant les valeurs en 0 et la limite en $+\infty$, $(k+1)\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^k\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{k+1}\,\mathrm{d}t$. Une récurrence immédiate permet de conclure que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^k\,\mathrm{d}t \text{ existe et vaut } k!.}$

Q5. L'intégrande dans $Lp(x)$ est une fonction polynomiale en x dont les coefficients sont des polynômes en t multipliés par f_0, avec $f_0(t) = e^{-t}$ comme précédemment. Par linéarité de l'intégrale et en utilisant la question précédente on en déduit que $Lp(x)$ est défini pour pour x et est une fonction polynomiale. Par linéarité de la dérivation, de la multiplication par une fonction et de l'intégrale, il en résulte que $\boxed{L \text{ est un endomorphisme de } \mathbf{K}[X].}$ Puisque $L1 = 0$, L n'est pas injectif et donc $\boxed{L \text{ n'est pas inversible.}}$

PARTIE II - Formule de Taylor pour les endomorphismes shift-invariants de $\mathbf{K}[X]$

Q6. L'identité commute avec tout opérateur. Soit p dans $\mathbf{K}[X]$. D'après la formule de dérivation d'une composée on a $D(E_ap) = (X+a)'E_a(Dp) = E_a(Dp)$. Pour b dans $\mathbf{K}$, $E_a \circ E_b = E_b \circ E_a = E_{a+b}$. Soit b dans $\mathbf{R}$. Par changement de variable affine bijectif $t = u+b$, on a $E_aJ = JE_a$. Enfin, par définition de L, pour x dans $\mathbf{R}$ on a $Lp(x) = L(E_xp)(0)$ et donc $(E_a \circ L)p(x) = Lp(x+a) = L(E_x \circ E_ap)(0) = L(E_ap)(x)$. On en conclut que $\boxed{I,\ D,\ E_a,\ J \text{ et } L \text{ sont shift-invariants}}$. De plus $IX = X$, $DX = 1$, $E_aX = X + a$, $JX = X + \frac{1}{2}$ et $LX = -1$, donc $\boxed{D \text{ et } L \text{ sont des endomorphismes delta, contrairement à } I,\ E_a \text{ et } J.}$

Q7. Les endomorphismes nul et identité sont shift-invariants. Par linéarité de la composition à droite, pour T et S des endomorphismes shift-invariants de $\mathbf{K}[X]$ et a et λ dans $\mathbf{K}$, on a $E_a \circ (T+S) = E_a \circ T + E_a \circ S = T \circ E_a + S \circ E_a = (T+S) \circ E_a$ (la dernière égalité résultant de la définition de $T+S$), $E_a \circ (\lambda T) = \lambda(E_a \circ T) = \lambda(T \circ E_a) = (\lambda T) \circ E_a$ (la dernière égalité résultant de la définition de λT) et $E_a \circ T \circ S = T \circ E_a \circ S = T \circ S \circ E_a$. Il en résulte que

$\boxed{\text{l'ensemble des endomorphismes shift-invariants de } \mathbf{K}[X] \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{L}(\mathbf{K}[X]).}$

Puisque D et $-D$ sont shift-invariants, d'après ce qui précède, ce sont des endomorphismes delta puisque $DX = 1$ et $-DX = -1$. Or on a $(D + (-D))X = 0$ et $D \circ DX = 0$, donc

$\boxed{\text{l'ensemble des endomorphismes delta de } \mathbf{K}[X] \text{ n'est stable ni par addition, ni par composition.}}$

Q8. Soit p dans $\mathbf{K}[X]$. Pour k dans $\mathbf{N}$ avec $k > \deg(p)$, on a $D^k p = 0$ et donc la somme infinie est en fait une somme finie et on a $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p = \sum_{k=0}^{\deg(p)} a_k D^k p$. Puisque D est un endomorphisme de $\mathbf{K}[X]$ et puisque $\mathcal{L}(\mathbf{K}[X])$ est une algèbre $\boxed{\text{l'expression } \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p \text{ a un sens et définit un polynôme de } \mathbf{K}[X].}$

Q9. Soit $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ et p dans $\mathbf{K}[X]$, le degré de p et celui de $E_a p$ sont égaux et donc $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k(E_a p) = \sum_{k=0}^{\deg(p)} a_k D^k(E_a p)$. Or l'opérateur $\sum_{k=0}^{\deg(p)} a_k D^k$ est shift-invariant d'après la question 7 et donc cette dernière expression est égale à $E_a \left(\sum_{k=0}^{\deg(p)} a_k D^k p \right)$, ce qui n'est rien d'autre que $E_a \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p \right)$. Par conséquent $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k \text{ est un endomorphisme shift-invariant.}}$

Q10. On remarque que, pour k et n dans $\mathbf{N}$ et en posant $q_n = \dfrac{X^n}{n!}$, on a $D^k q_n(0) = \delta_{k,n}$. Dès lors, en évaluant l'égalité entre opérateurs $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k$ en q_n, puis en évaluant cette nouvelle égalité entre polynômes en 0, on obtient $a_n = b_n$. Il en résulte $\boxed{\text{pour tout } k \text{ dans } \mathbf{N},\ a_k = b_k.}$

Q11. La réciproque résulte directement de la question 9. Soit T un endomorphisme shift-invariant et $U = \sum_{k=0}^{+\infty} (Tq_k)(0) D^k$. D'après la remarque effectuée à la question précédente, on a, pour n dans $\mathbf{N}$, $Uq_n(0) = Tq_n(0)$. Par linéarité de T et U et puisque $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{K}[X]$, on en déduit que pour tout polynôme p dans $\mathbf{K}[X]$, $Up(0) = Tp(0)$. Puisque T et U sont shift-invariants, par hypothèse sur T et d'après le début de la question pour U, on en déduit que pour tout a dans $\mathbf{K}$, $Up(a) = E_a(Up)(0) = U(E_a p)(0) = T(E_a p)(0) = E_a(Tp)(0) = TP(a)$ et donc $Up = Tp$. Il en résulte $U = T$ et donc

$$\boxed{T \text{ est shift-invariant si et seulement si } T = \sum_{k=0}^{+\infty} (Tq_k)(0) D^k.}$$

Q12. Soit n dans $\mathbf{N}$. La question précédente entraîne en particulier que si T est shift-invariant alors il laisse stable $\mathbf{K}_n[X]$ et sa restriction à $\mathbf{K}_n[X]$ est un polynôme en D. On en déduit que si T et U sont shift-invariants et si p est dans $\mathbf{K}[X]$, le calcul de $T \circ Up$ et $U \circ Tp$ s'effectue dans $\mathbf{K}_n[X]$ avec $n = \deg(p)$.

Comme deux polynômes en D commutent, les restrictions de T et U à $\mathbf{K}_n[X]$ commutent et donc $T \circ U$ et $U \circ T$ coïncident en p. Comme c'est vrai pour tout polynôme p,
$\boxed{\text{deux endomorphismes shift-invariants de } \mathbf{K}[X] \text{ commutent.}}$

Q13. D'après la question 11 et puisque E_a est shift-invariant d'après la question 6, $E_a = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} D^k$. En appliquant cette identité à p, il vient $\boxed{p(X+a) = \sum_{k=0}^{\deg(p)} \frac{a^k}{k!} p^{(k)}.}$ Il s'agit de la $\boxed{\text{formule de Taylor.}}$

Q14. Pour n dans $\mathbf{N}$ une primitive de q_n est donnée par q_{n+1}, donc $Jq_n(0) = q_{n+1}(1) - q_{n+1}(0) = \frac{1}{(n+1)!}$.
Il résulte de la question 11 que, pour p dans $\mathbf{K}[X]$, on a $\boxed{Jp = \sum_{k=0}^{\deg(p)} \frac{1}{(k+1)!} p^{(k)}.}$

Q15. D'après la question 8 on peut définir $T = -\sum_{k=0}^{+\infty} D^k$. On a alors $D \circ T = T \circ D = T + I$ donc $(D - I) \circ T = T \circ (D - I) = I$. On en déduit que $\boxed{\text{l'endomorphisme } D - I \text{ est inversible.}}$ D'après la question 4, pour n dans $\mathbf{N}^*$ on a $Lq_n(0) = -\frac{(n-1)!}{(n-1)!} = -1$ et $L1 = 0$. Donc d'après la question 11 on a, puisque L est shift-invariant d'après la question 6, $L = -\sum_{k=1}^{+\infty} D^k$. Il résulte des calculs précédents qu'on a $\boxed{L = I + (D - I)^{-1}.}$

Q16. Puisque T est non nul l'ensemble $\{n \in \mathbf{N} \,|\, Tq_n(0) \neq 0\}$ est non vide, d'après la question 11. On note $n(T)$ ou n son minimum. Pour $k > n$ et p dans $\mathbf{K}[X]$, $D^k p$ est soit nul, soit de degré strictement inférieur à celui de $D^n p$. Comme on a $Tp = (Tq_n)(0) D^n p + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (Tq_k)(0) D^k p$ et $(Tq_n)(0) \neq 0$, on en déduit que le degré de Tp est celui de $D^n p$. Comme $D^n p$ est soit nul, soit de degré $\deg(p) - n$, il vient $\boxed{\deg(Tp) = \max\{-1, \deg(p) - n(T)\}.}$

Q17. Pour p dans $\mathbf{K}[X]$, on a donc $Tp = 0 \iff \deg(p) - n(T) \leq -1$, i.e. $\boxed{\mathrm{Ker}(T) = \mathbf{K}_{n(T)-1}[X].}$

Q18. D'après la question 16 $T1$ est soit nul, soit de degré 0 et ce dernier cas est équivalent à $n(T) = 0$. De plus si $n(T) = 0$, la même question montre que T préserve le degré puisque tout polynôme est de degré supérieur à -1. On en déduit (2) $\implies$ (3). Si T préserve le degré, il est en particulier injectif et, pour n dans$\mathbf{N}$, il laisse stable $\mathbf{K}_n[X]$. Sa restriction à cet espace de dimension finie est donc aussi injective, donc surjective. Il en résulte que tout polynôme de $\mathbf{K}[X]$ admet un antécédent par T, de degré inférieur à celui de p (et donc en fait de même degré). Par conséquent (3) $\implies$ (1). Enfin (1) $\implies$ (2) puisque si T est inversible, il est injectif et $T1 \neq 0$. En résumé $\boxed{\text{les trois assertions (1), (2) et (3) sont équivalentes.}}$

Q19. Soit a dans $\mathbf{K}$. On a donc $T \circ E_a = E_a \circ T$. En composant par T^{-1} à gauche et à droite, il vient $E_a \circ T^{-1} = T^{-1} \circ E_a$, i.e. $\boxed{T^{-1} \text{ est encore un endomorphisme shift-invariant.}}$

Q20. On pose $(\alpha_k)_{k \in \mathbf{N}} = ((Tq_k)(0))_{k \in \mathbf{N}}$. Il résulte de la question 11 que $TX = \alpha_0 X + \alpha_1$. Puisque T est un endomorphisme delta, on a donc $\boxed{\alpha_0 = 0 \text{ et } \alpha_1 \neq 0.}$ Cette même question permet d'affirmer

$$\boxed{T = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k D^k.}$$

Q21. La question précédente montre que U donné par $U = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{k+1} D^k$ vérifie $T = D \circ U$. La question 11 montre que U est shift-invariant et la question 18 montre que U est inversible. Si V est un autre endomorphisme shift-invariant tel que $T = D \circ V$, alors on peut écrire $V = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$ d'après la question 11 et l'égalité $D \circ V = T$ se récrit $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k D^k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1} D^k$. Il résulte alors de la question 10 que $V = U$. Donc $\boxed{\text{il existe un unique endomorphisme } U \text{ shift-invariant et inversible tel que } T = D \circ U.}$ Les formules précédentes donnent $\boxed{U = I \text{ si } T = D}$ et, puisque $L = -\sum_{k=1}^{+\infty} D^k$, $\boxed{U = (D - I)^{-1} \text{ si } T = L.}$

Q22. Soit p dans $\mathbf{K}[X]$ non nul. Avec les notations précédentes Up est de même degré que p et donc, avec convention $\deg(0) = -1$, $D(Up)$ est de degré $\deg(p) - 1$, i.e. $\boxed{\deg(Tp) = \deg(p) - 1.}$ Il en résulte directement $\boxed{\operatorname{Ker}(T) = \mathbf{K}.}$ De plus si p n'est pas nul, Tp est de degré strictement inférieur à celui de p et ne peut donc pas être un multiple non nul de p. On en déduit $\operatorname{Sp}(T) \subset \{0\}$. Comme $\operatorname{Ker}(T)$ est non trivial, $\boxed{\operatorname{Sp}(T) = \{0\}.}$

Q23. Soit n dans $\mathbf{N}$. D'après la question précédente l'image de T_n est incluse dans $\mathbf{K}_{n-1}[X]$ et donc $\boxed{T_n \text{ est un endomorphisme de } \mathbf{K}_n[X].}$ D'après la question précédente son spectre est réduit à $\{0\}$ et il est donc diagonalisable si et seulement s'il est nul. Comme le noyau de T est $\mathbf{K}$, c'est le cas si et seulement si $n = 0$. En résumé $\boxed{T_n \text{ est diagonalisable si et seulement si } n = 0.}$

Q24. Soit n dans $\mathbf{N}$. Comme $\mathbf{K}_n[X]$ contient le noyau de T, $\mathbf{K}$ est aussi le noyau de T_n. D'après le théorème du rang, son image est de donc de dimension n. Comme elle est incluse dans $\mathbf{K}_{n-1}[X]$ d'après ce qui précède, on a, par dimension, $\boxed{\operatorname{Im}(T_n) = \mathbf{K}_{n-1}[X].}$ Comme l'image de T contient toutes les images des T_n pour n dans $\mathbf{N}$, elle contient la réunion des $\mathbf{K}_{n-1}[X]$, i.e. $\mathbf{K}[X]$. Autrement dit $\boxed{T \text{ est surjectif.}}$

PARTIE III - Suite de polynômes associée à un endomorphisme delta

Q25. Pour n dans $\mathbf{N}^*$ on note φ_n l'application de $\mathbf{K}_n[X]$ dans $\mathbf{K}_{n-1}[X] \times \mathbf{K}$ donnée par $p \mapsto (Qp, p(0))$. Alors φ_n est linéaire car Q et l'évaluation en 0 le sont. Son noyau est formé des polynômes constants valant 0 en 0, d'après la question 22, donc il est réduit à $\{0\}$. C'est donc une application injective. Comme les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension finie, c'est une application bijective. On en déduit, en notant P_n l'ensemble des éléments de $\mathbf{K}_n[X]$ de degré exactement n, que la bi-restriction de φ_n à P_n et $P_{n-1} \times \mathbf{K}$ est également bijective si $n > 0$, puisqu'elle l'est sur leurs complémentaires respectifs. Dans le cas $n = 0$, c'est encore le cas pour la bi-restriction à P_0 et $P_{-1} \times \mathbf{K}^*$. On note ψ_n la bijection réciproque de cette bi-restriction. Les conditions sur la suite de polynômes associée s'énoncent alors ainsi : $q_0 = 1$ et pour n dans $\mathbf{N}$, $q_{n+1} = \psi_{n+1}((q_n, 0))$. D'après l'axiome de construction des suites par récurrence, on en déduit $\boxed{\text{l'existence et l'unicité de la suite } (q_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ de polynômes associée à } Q.}$

Q26. Soit y dans $\mathbf{K}$ et n dans $\mathbf{N}$. Le polynôme $E_y q_n$ est de degré n. Comme $(q_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille de polynômes non nuls étagées en degrés et de cardinal $n+1$ dans $\mathbf{K}_n[X]$, c'en est une base et on dispose de scalaires $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ dans $\mathbf{K}^{n+1}$ tels que $E_y q_n = \sum_{k=0}^{n} a_k q_k$. Soit j dans $[\![0; n]\!]$. Puisque Q est shift-invariant et par définition d'une suite associée, il vient $E_y q_{n-j} = Q^j E_y q_n = \sum_{k=j}^{n} a_k q_{k-j}$ et donc, en évaluant en 0, $q_{n-j}(y) = a_j$. On en déduit, pour tout x dans $\mathbf{K}$, $\boxed{q_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} q_k(x) q_{n-k}(y).}$

Q27. Par définition $(q_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille de polynômes non nuls étagées en degrés et de cardinal $n+1$ dans $\mathbf{K}_n[X]$, donc c'en est une base. Il en résulte que $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{K}[X]$. Il existe donc un unique endomorphisme Q de $\mathbf{K}[X]$ tel que $Qq_0 = 0$ et pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, $Qq_n = q_{n-1}$. Comme tout endomorphisme delta admet $\mathbf{K}$ comme noyau d'après la question 22, il y a au plus un endomorphisme delta de suite associée égale à $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et c'est l'endomorphisme Q ainsi défini. L'assertion en résulte si on démontre que Q est bien un endomorphisme delta. Comme X est de degré 1, on dispose de a et b scalaires, avec $a \neq 0$, tels que $X = aq_1 + q_0$ et donc $QX = aq_0 \neq 0$. Soit maintenant y dans $\mathbf{K}$. Par linéarité l'égalité $E_y \circ Q = Q \circ E_y$ est vraie si et seulement si elle est vraie lorsqu'on l'évalue sur la base $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Comme $E_y(Qq_0) = 0 = Q(E_y q_0)$ puisque $q_0 = 1$, on s'intéresse au cas $n \in \mathbf{N}^*$. Soit x dans $\mathbf{K}$, on a, par hypothèse sur la suite (q_k) au rang $n-1$, $E_y(Qq_n)(x) = q_{n-1}(x+y) = \sum_{k=1}^{n} q_{k-1}(x) q_{n-k}(y)$ et donc $E_y(Qq_n) = \sum_{k=0}^{n} Qq_k q_{n-k}(y) = Q\left(\sum_{k=0}^{n} q_{n-k}(y) q_k\right)$, i.e. en utilisant l'hypothèse sur la suite au rang n, $E_y(Qq_n) = Q(E_y q_n)$. Ainsi $\boxed{\text{il existe un unique endomorphisme delta } Q \text{ dont } (q_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est la suite de polynômes associée.}}$

Q28. Par définition $(q_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille de polynômes non nuls étagées en degrés et de cardinal $n+1$ dans $\mathbf{K}_n[X]$, donc $\boxed{(q_0, q_1, \ldots, q_n) \text{ est une base de } \mathbf{K}_n[X].}$

Q29. Par hypothèse la matrice de Q_n dans la base précédente est $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}}$. Par invariance de ces éléments par changement de base, on en déduit $\boxed{\operatorname{tr}(Q_n) = \det(Q_n) = 0 \text{ et } \chi_{Q_n} = X^{n+1}.}$

Q30. On pose $\forall n \in \mathbf{N}$, $r_n = \dfrac{X^n}{n!}$. On a $r_0 = 1$ et pour n dans $\mathbf{N}$, $\deg(r_n) = n$. De plus si $n > 0$, on a $r_n(0) = 0$ et $Dr_n = r_{n-1}$, donc d'après l'unicité en question 25, pour $Q = D$ on a $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ q_n = \dfrac{X^n}{n!}.}$

Q31. On pose $\forall n \in \mathbf{N}$, $r_n = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$. On a $r_0 = 1$ et pour n dans $\mathbf{N}$, $\deg(r_n) = n$. De plus si $n > 0$, on a $r_n(0) = 0$ et

$$(E_1 - I)r_n = \frac{(X+1)X\cdots(X-n+2) - X\ldots(X-n+1)}{n!} = r_{n-1}\frac{X+1-(X-n+1)}{n} = r_{n-1}\,,$$

donc d'après l'unicité en question 25, pour $Q = E_1 - I$ on a $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*,\ q_n = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}.}$

Q32. D'après la question 24, pour tout p dans $\mathbf{K}[X]$ et tout k entier vérifiant $k > \deg(p)$, on a $Q^k p = 0$ et donc on a affaire à une somme finie. Ainsi l'expression $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \left(Q^k p\right)(0) q_k \text{ a un sens}}$ et vaut $\sum_{k=0}^{\deg(p)} \left(Q^k p\right)(0) q_k$.

Puisque $\mathbf{K}[X]$ est un espace vectoriel, $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\left(Q^k p\right)(0)q_k \text{ définit un polynôme de } \mathbf{K}[X].}$ D'après la question 28 on dispose de $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ tel que $p=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kq_k$. Pour n dans $\mathbf{N}$, on a donc $Q^np=\sum_{k=n}^{+\infty}a_kq_{n-k}$ et, en évaluant en 0, il vient $Q^np(0)=a_n$. Par conséquent $\boxed{p=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(Q^kp\right)(0)q_k.}$

Q33. Soit T un endomorphisme shift-invariant. En appliquant T à l'identité précédente et en évaluant en 0, il vient pour tout polynôme p dans $\mathbf{K}[X]$, $Tp(0)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(Q^kp\right)(0)(Tq_k)(0)$. Pour x dans $\mathbf{K}$, on applique ce qui précède à E_xp et il vient, en tenant compte de la shift-invariance de T et Q, $(E_x\circ T)p(0)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left((E_x\circ Q^k)p\right)(0)(Tq_k)(0)$, i.e. $Tp(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(Q^kp\right)(x)(Tq_k)(0)$. Par conséquent $Tp=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(Tq_k\right)(0)Q^kp$ et donc $\boxed{T=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(Tq_k\right)(0)Q^k.}$

Q34. On prend $Q=E_1-I$ et $T=D$. Soit p un polynôme non constant et k un entier naturel. D'après l'expression trouvée en question 31, on a $Tq_k(0)=0$ si $k=0$ et $Tq_k(0)=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{k!}=(-1)^{k-1}\dfrac{1}{k}$.
Par ailleurs, puisque E_1 et I commutent $Q^k=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}E_1^j$, i.e. $Q^k=(-1)^{k-1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+1}\binom{k}{j}E_j$.
En appliquant la formule précédente et en utilisant la remarque faite en question 32 sur la somme infinie qui se ramène à une somme finie jusqu'au degré de p, il vient

$$\boxed{p'(X)=\sum_{k=1}^{\deg(p)}\frac{1}{k}\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+1}\binom{k}{j}p(X+j)\right).}$$

PARTIE IV - Un peu de calcul ombral

Q35. Soit k dans $\mathbf{N}^*$ et p dans $\mathbf{K}[X]$. D'après la formule de Leibniz de dérivation d'un produit, on a $D^k(Xp)=XD^kp+kD^{k-1}p$. De plus, puisque $D^0=I$, on a $D^0(Xp)=XD^0p$. Soit $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ tel que $T=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kD^k$. Comme Xp est de degré $1+\deg(p)$ au plus, on a, en posant $n=1+\deg(p)$, $T(Xp)=\sum_{k=0}^{n}a_kD^k(Xp)=X\sum_{k=0}^{n}a_kD^kp+\sum_{k=1}^{n}ka_kD^{k-1}p$. Comme $n-1\geq\deg(p)$, on en déduit $T(Xp)=XTp+\sum_{k=1}^{+\infty}ka_kD^{k-1}p$ et donc $\boxed{T'=\sum_{k=1}^{+\infty}ka_kD^{k-1}.}$

Q36. Soit T un endomorphisme shift-invariant. D'après la question 11, T est de la forme requise à la question précédente et donc T' aussi. En appliquant la question 11 dans le sens réciproque on en conclut que $\boxed{T' \text{ est un endomorphisme shift-invariant.}}$

Q37. Soit T un endomorphisme delta. Il est donc shift-invariance et donc T' aussi d'aprèce ce qui précède. De plus, par définition, on a $T'1=TX-XT1$. Or on a $T1=0$ et TX est une constante non nulle, donc $T'1\neq0$. Donc d'après la question 18 $\boxed{T' \text{ est un endomorphisme shift-invariant et inversible.}}$

Q38. Soit p dans $\mathbf{K}[X]$. On a $(S\circ T)'p = S(T(Xp)) - XS(Tp)$, $(S'\circ T)p = S(XTp) - XS(Tp)$ et $(S\circ T')p = S(T(Xp)) - S(XTp)$ par linéarité de S. Il en résulte directement $\boxed{(S\circ T)' = S'\circ T + S\circ T'.}$

Q39. Soit n dans $\mathbf{N}^*$. Puisque $Q = D\circ U$, la formule précédente donne $Q' = U + D\circ U'$, puisque $D' = I$ d'après la question 35. On a donc $Q'X^n = UX^n + D\circ U'(X^n)$, puis, en vertu de la commutativité des endomorphismes shift-invariants vue en question 12 et puisque $DX^n = nX^{n-1}$,

$$Q'\circ U^{-n-1}(X^n) = U^{-n}X^n + U^{-n-1}\circ U'(nX^{n-1}) = U^{-n}X^n + nU^{-n-1}\circ U'(X^{n-1})\ .$$

De plus, par définition, $U^{-n}X^n = XU^{-n}(X^{n-1}) + (U^{-n})'(X^{n-1})$. La formule de la question 35 donne immédiatement par récurrence, pour T shift-invariant, $(T^n)' = nT^{n-1}\circ T'$ et, si T est inversible, $0 = I' = T^{-1}\circ T' + (T^{-1})'\circ T$, soit $(T^{-1})' = -T^{-2}\circ T'$ en utilisant encore la commutativité. On a donc $(U^{-n})' = nU^{-n+1}\circ(U^{-1})' = -nU^{-n-1}\circ U'$. On obtient donc $\boxed{\left(Q'\circ U^{-n-1}\right)(X^n) = XU^{-n}\left(X^{n-1}\right).}$

Q40. Soit n dans $\mathbf{N}^*$. On pose $r_n = \dfrac{1}{n!}XU^{-n}\left(X^{n-1}\right)$. Comme U est inversible, il préserve le degré d'après la question 18, donc U^{-n} aussi, et donc r_n est de degré n. Comme il est divisible par X, on a aussi $r_n(0) = 0$. Comme $U^{-1}1$ est de degré nul, c'est un scalaire et donc $Qr_1 = U^{-1}1QX$. Comme $QX = U\circ D(X) = U1$, il vient $Qr_1 = 1$. On a également

$$Qr_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left(Q'\circ U^{-n-1}(X^n) + XQ\circ U^{-n-1}(X^n)\right) = \frac{1}{(n+1)!}\left(n!\,r_n + XU^{-n}\circ D(X^n)\right)$$

par commutativité des endomorphismes shift-invariants et donc $Qr_{n+1} = r_n$. Par caractérisation obtenue en question 25, on en déduit $q_n = r_n$ et donc $\boxed{n!\,q_n(X) = XU^{-n}\left(X^{n-1}\right).}$ Par inversibilité de Q' et de $n!\,q_n = (Q'\circ U^{-n-1})(X^n)$, il vient $n!\,X(Q')^{-1}q_n = XU^{-n-1}X^n = (n+1)!\,q_{n+1}$ et donc $(n+1)q_{n+1} = X(Q')^{-1}q_n$. De plus $Q' = U + U'\circ D$, donc $Q'\circ U^{-1} = I + U'\circ U^{-1}\circ D$ et il vient $Q'\circ U^{-1}1 = 1$, puis $(Q')^{-1}1 = U^{-1}1$. Or, d'après la formule précédente, $q_1 = XU^{-1}1$ et on en déduit $q_1 = X(Q')^{-1}q_0$. Par conséquent $\boxed{nq_n(X) = X\left(Q'\right)^{-1}(q_{n-1}).}$

Q41. Soit n dans $\mathbf{N}^*$. D'après la question 15 on a $L = I + (D-I)^{-1}$, ce que l'on peut écrire $L = (D-I)^{-1}(D-I+I)$ et donc $L = U\circ D$ avec $U = (D-I)^{-1}$ et U est inversible. On en tire $(D-I)\circ L = D$, ce qui fournit en l'appliquant à ℓ_n, $\boxed{\ell_n' = \ell_{n-1}' - \ell_{n-1}.}$ De $L = I + (D-I)^{-1}$ il vient $L' = -(D-I)^{-2}$ grâce aux calculs effectués en question 39 et en tenant compte de $I' = 0$ et $D' = I$. On en déduit $(L')^{-1} = -(D-I)^2$ donc $X(L')^{-1}\circ L = -X(D-I)\circ D$. En l'appliquant à ℓ_n il vient en utilisant la dernière formule de la question précédente, $\boxed{X\ell_n'' - X\ell_n' + n\ell_n = 0.}$ En utilisant la première formule on obtient $n!\,\ell_n = X(D-I)^n(X^{n-1}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}XD^{n-k}X^{n-1}$. Pour $k = 0$ le terme correspondant dans la somme est nul car $D^nX^{n-1} = 0$. On obtient donc $\ell_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1}{n}\binom{n}{k}XD^{n-k}\left(\frac{X^{n-1}}{(n-1)!}\right)$.

Or on a $\dfrac{1}{n}\dbinom{n}{k} = \dfrac{1}{k}\dbinom{n-1}{k-1}$ pour k dans $[\![1;n]\!]$, et on obtient donc, en utilisant la question 30 $\ell_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1}{k}\binom{n-1}{k-1}X\frac{X^{k-1}}{(k-1)!}$, soit $\boxed{\ell_n(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1}\frac{X^k}{k!}.}$

Q42. Puisque $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est étagée en degré, formée de polynômes non nuls, et engendre $\mathbf{K}[X]$ en utilisant la question 28, c'est une base de $\mathbf{K}[X]$. Il en va de même pour la famille associée à D, donc il existe un unique endomorphisme envoyant la première base sur la seconde et il est alors inversible, autrement dit $\boxed{\text{il existe un unique endomorphisme inversible } T \text{ tel que } \forall n\in\mathbf{N},\ Tq_n = \dfrac{X^n}{n!}.}$

Q43. Par construction on a, pour n dans $\mathbf{N}^*$, $T \circ Q \circ T^{-1} \dfrac{X^n}{n!} = T \circ Q q_n = T q_{n-1} = \dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$. De plus $T \circ Q \circ T^{-1} 1 = T \circ Q 1 = T 0 = 0$ et donc $T \circ Q \circ T^{-1}$ et D coïncident sur une base de $\mathbf{K}[X]$. Puisque ce sont des endomorphismes, on en déduit $\boxed{D = T \circ Q \circ T^{-1}.}$

Q44. La composition à droite par αX étant linéaire, W est un endomorphisme de $\mathbf{K}[X]$. Comme il admet pour inverse l'endomorphisme définit par $p \mapsto p(\alpha^{-1} X)$, on en déduit que $\boxed{W \text{ est un automorphisme de } \mathbf{K}[X].}$

Q45. Par dérivation d'une fonction composée, on a $D \circ W^{-1} = \alpha^{-1} W^{-1} \circ D$ et donc $W \circ D \circ W^{-1} = \alpha^{-1} D$. De même, en posant $U = (D - I)^{-1}$, on a $W \circ U \circ W^{-1} = (W \circ U^{-1} \circ W^{-1})^{-1} = \big(\alpha^{-1} D - I\big)^{-1}$ et donc, puisque $L = U \circ D$ et donc $P = W \circ D \circ W^{-1} \circ W \circ U \circ W^{-1}$, on obtient $\boxed{P = \dfrac{1}{\alpha} D \circ \left(\dfrac{1}{\alpha} D - I\right)^{-1}.}$

Q46. La formule précédente exhibe une écriture de P sous la forme $P = D \circ U$ avec $U = (D - \alpha I)^{-1}$. En particulier U est shift-invariant et inversible, comme inverse d'un tel endomorphisme et donc P est shift-invariant et vérifie $PX = U(DX) = U1$, et donc PX est une constante non nulle. Par conséquent $\boxed{P \text{ est un endomorphisme delta}}$. Pour tout n dans $\mathbf{N}^*$ on a $P(W\ell_n) = W\ell_{n-1}$ par construction. De plus la famille $(W\ell_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vérifie les propriétés suivante : $W\ell_0 = 1$, $\deg(W\ell_n) = \deg(\ell_n) = n$, $W\ell_n(0) = \ell_n(0) = 0$ et donc $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ p_n = \ell_n(\alpha X).}$

Q47. On a déjà obtenu $L = I + (D - I)^{-1}$ en question 15, et donc on a $(L - I)^{-1} = D - I$ et $L \circ (L - I)^{-1} = (I + (D - I)^{-1}) \circ (D - I) = D - I + I$, i.e. $\boxed{D = L \circ (L - I)^{-1}.}$ On en déduit $D - \alpha I = L \circ (L - I)^{-1} - \alpha I = (L - \alpha(L - I)) \circ (L - I)^{-1}$ et donc $(D - \alpha I)^{-1} = (L - I) \circ (\alpha I + (1 - \alpha) L)^{-1}$. En composant à gauche par D et en tenant compte de la formule que l'on vient de démontrer, on obtient $\boxed{P = L \circ (\alpha I + (1 - \alpha) L)^{-1}.}$

Q48. D'après la question 43, on a $T \circ L \circ T^{-1} = D$. Or on a $Q = T \circ L \circ T^{-1} \circ \big(T \circ (\alpha I + (1 - \alpha) L) \circ T^{-1}\big)^{-1}$ et il vient $\boxed{Q = D \circ (\alpha I + (1 - \alpha) D)^{-1}.}$ Puisque Q s'écrit sous la forme $D \circ U$ avec U un endomorphisme shift-invariant inversible, comme en question 46, on en déduit que $\boxed{Q \text{ est un endomorphisme delta}}$. On pose pour n dans $\mathbf{N}^*$, $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k} \frac{X^k}{k!}$. Par unicité de la suite de polynômes associée, il suffit de vérifier $Qs_1 = 1$ et, pour $n > 1$, $Qs_n = s_{n-1}$, ou encore, $Ds_1 = (\alpha I + (1 - \alpha) D) 1$ et pour $n > 1$, $Ds_n = (\alpha I + (1 - \alpha) D) s_{n-1}$. Comme on a $s_1 = \alpha X$, il vient $Ds_1 = \alpha = (\alpha I + (1 - \alpha) D) 1$. Pour k dans $[\![1; n]\!]$, les coefficients de $\dfrac{X^{k-1}}{(k-1)!}$ dans Ds_n et $(\alpha I + (1 - \alpha) D) s_{n-1}$ sont resprectivement $\dbinom{n-1}{k-1} \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k}$ et $\alpha \dbinom{n-2}{k-2} \alpha^{k-1} (1 - \alpha)^{n-1-(k-1)} + (1 - \alpha) \dbinom{n-2}{k-1} \alpha^k (1 - \alpha)^{n-1-k}$ et ils coïncident donc d'après la formule du triangle de Pascal. Par conséquent $\boxed{r_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k} \frac{X^k}{k!}.}$

Q49. De même qu'en question 46 la suite associée à Q est la suite $(Tp_n)_{n \in \mathbf{N}}$, i.e. $(TW\ell_n)_{n \in \mathbf{N}}$. On en déduit, pour n dans $\mathbf{N}^*$, $TW\ell_n = r_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k} T\ell_k$, et donc par linéarité et inversibilité de T, $\boxed{\ell_n(\alpha X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k} \ell_k(X).}$