Deuxième composition de mathématiques
CentraleSupélec 2023 – MPI

Notations

— Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul.

— Étant donné deux entiers naturels a et b, on note $[\![a;b]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leq k \leq b$.

— Pour deux suites de nombres réels $(u_m)_{m\in\mathbf{N}}$ et $(v_m)_{m\in\mathbf{N}}$, la notation $u_m = \mathrm{O}(v_m)$ signifie qu'il existe une suite bornée $(M_m)_{m\in\mathbf{N}}$ telle que l'on ait

$$\exists m_0 \in \mathbf{N}\,, \quad \forall m \geq m_0\,, \quad u_m = M_m v_m\ .$$

— On pourra utiliser sans démonstration la formule suivante, qui précise la formule de Stirling lorsque n tend vers $+\infty$:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\ .$$

— Toutes les variables aléatoires considérées sont discrètes.

PARTIE I - Résultats préliminaires

I.A - Calcul d'une intégrale classique

Rappelons que n désigne un entier naturel non nul. On note

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t\ .$$

I.A.1)

Q 1. Démontrer $I_n \geq \dfrac{1}{2^n}$.

Q 2. Justifier l'existence de K_n et donner la valeur exacte de K_1.

Q 3. Démontrer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n2^n}\right)$.

On pourra minorer $1+t^2$ par un polynôme de degré 1.

Q 4. En déduire, lorsque n tend vers $+\infty$, $I_n \sim K_n$.

Q 5. Établir la relation de récurrence $K_n = K_{n+1} + \dfrac{1}{2n}K_n$.

Q 6. En déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

I.A.2)

Q 7. Justifier $\displaystyle\sqrt{n}I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+u^2/n)^n}\,\mathrm{d}u$.

Q 8. Démontrer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}I_n = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

Q 9. En déduire les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ puis de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$.

Dans toute la suite, on posera pour tout x réel

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

I.B - Comportement asymptotique de $1 - \Phi$

Soit $x > 0$.

Q 10. En écrivant $\varphi(t) \leq \dfrac{t}{x}\varphi(t)$ pour $t \geq x$, démontrer $\displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{\varphi(x)}{x}$.

Q 11. À l'aide de l'étude d'une fonction bien choisie, démontrer $\dfrac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leq \displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Q 12. En déduire un équivalent simple de $1 - \Phi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

I.C - Une inégalité maximale

Dans cette sous-partie, n est un entier naturel non nul et $Z_1, \ldots, Z_n$ sont des variables aléatoires discrètes indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Pour tout p dans $[\![1; n]\!]$, on note $R_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} Z_i$. On va démontrer la propriété

$$\forall x > 0\,, \quad \mathbf{P}\left(\max_{1\leq p\leq n} |R_p| \geq 3x\right) \leq 3 \max_{1\leq p\leq n} \mathbf{P}\left(|R_p| \geq x\right)\ .$$

On admet que les différentes fonctions intervenant dans cette inégalité sont bien des variables aléatoires discrètes et on fixe x dans $\mathbf{R}_+^*$.

Pour simplifier, notons A l'événement $\left\{\displaystyle\max_{1\leq p\leq n} |R_p| \geq 3x\right\}$. Ainsi,

$$A = \left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \max_{1\leq p\leq n} |R_p(\omega)| \geq 3x\right\}\ .$$

Dans le cas où $n \geq 2$, définissons de plus les événements

$$A_1 = \{|R_1| \geq 3x\} \quad \text{et} \quad A_p = \left\{\max_{1\leq i\leq p-1} |R_i| < 3x\right\} \cap \{|R_p| \geq 3x\}$$

pour p dans $[\![2; n]\!]$.

Q 13. Exprimer l'événement A à l'aide des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Q 14. Démontrer que l'on a $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(|R_n| \geq x) + \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \mathbf{P}\left(A_p \cap \{|R_n| < x\}\right)$.

Q 15. Justifier que pour tout p dans $[\![1; n]\!]$, on a l'inclusion

$$A_p \cap \{|R_n| < x\} \subset A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\}\ .$$

Q 16. En déduire $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(|R_n| \geq x) + \displaystyle\max_{1\leq p\leq n} \mathbf{P}\left(|R_n - R_p| > 2x\right)$.

Q 17. Conclure.

PARTIE II - Étude d'une suite de fonctions

Pour tout n dans $\mathbf{N}^*$ et tout k dans $[\![0; n]\!]$, on pose

$$x_{n,k} = -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}}\ .$$

De plus, on définit la fonction B_n de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par les conditions :

$$\forall k \in [\![0;n]\!]\ ,\ \forall x \in \left[x_{n,k} - \frac{1}{\sqrt{n}} ; x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right[\ B_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$$

et B_n est nulle en dehors de la réunion de ces intervalles. L'objectif de cette partie est de démontrer que la suite de fonctions $(B_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$ vers la fonction φ, définie dans la partie I. Autrement dit, on souhaite démontrer

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta_n = 0 \qquad \text{avec} \qquad \Delta_n = \sup_{x\in\mathbf{R}} |B_n(x) - \varphi(x)|\ .$$

L'usage d'une figure pour appréhender la problématique de cette partie sera vivement apprécié.

II.A

Q 18. Comparer les réels $-x_{n,k}$ et $x_{n,n-k}$.

Q 19. Justifier l'existence du réel Δ_n pour tout n dans $\mathbf{N}^*$.

Q 20. Démontrer que, pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, on a l'égalité $\Delta_n = \sup_{x\geq 0} |B_n(x) - \varphi(x)|$.

Q 21. Pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, démontrer que B_n est une application décroissante sur $\mathbf{R}_+$.

On pourra distinguer selon que n est pair ou impair.

Dans la suite de cette partie, on fixe $\varepsilon > 0$. La limite $\lim_{+\infty} \varphi = 0$ assure de l'existence d'un nombre ℓ dans $\mathbf{R}_+$ tel que $\varphi(\ell) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

II.B - Dans cette sous-partie, on va démontrer $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0;\ell[} |B_n(x) - \varphi(x)| = 0$.

On introduit pour cela l'ensemble

$$I_n = \{k \in [\![0;n]\!] \mid x_{n,k} \in [0;\ell+1]\}$$

dont on peut vérifier que c'est un intervalle d'entiers.

Dans la suite de cette sous-partie, on suppose que n et k varient de sorte qu'on ait $k \in I_n$.

Q 22. Démontrer, pour n tendant vers l'infini

$$k!\ (n-k)!\ = 2\pi e^{-n} k^{k+1/2} (n-k)^{n-k+1/2} \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\ .$$

On pourra utiliser la formule de Stirling *rappelée en début d'énoncé.*

Q 23. En déduire, pour n tendant vers $+\infty$,

$$B_n(x_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2} \left(2 - \frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2}}\ .$$

Q 24. En déduire

$$B_n\left(x_{n,k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}}$$

puis

$$B_n\left(x_{n,k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right)\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\ .$$

Q 25. Démontrer qu'il existe un entier naturel n_1 tel que, pour tout entier n vérifiant $n \geq n_1$,

$$\sup_{x\in[0;\ell]} |B_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

II.C

Q 26. Pour tout ℓ dans $\mathbf{R}_+^*$, démontrer qu'il existe un entier naturel n_2, tel que, pour $n \geq n_2$, $B_n(\ell) \leq 2\varphi(\ell)$.

Q 27. Conclure que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers 0.

PARTIE III - Applications

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que $\mathbf{P}(X = -1) = 1/2$ et $\mathbf{P}(X = 1) = 1/2$. On considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi que X. On définit alors

$$S_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbf{N}^*\,,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\ .$$

On dit que $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une marche aléatoire symétrique sur $\mathbf{Z}$. On admettra que pour tout $n \geq 1$, S_n est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

III.A - Théorème central limite

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I qui converge uniformément sur I vers une fonction f également continue par morceaux sur I.

Q 28. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ (respectivement $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$) est une suite de nombres réels appartenant à I qui converge vers u (respectivement v) dans I, démontrer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{u_n}^{v_n} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

On pose, pour tout i dans $\mathbf{N}^*$, $Y_i = \frac{X_i+1}{2}$ et, pour n dans $\mathbf{N}^*$, $T_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$.

Q 29. Démontrer, pour n dans $\mathbf{N}^*$ et j dans $[\![0; n]\!]$,

$$\mathbf{P}(T_n = j) = \int_{x_{n,j}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j}+1/\sqrt{n}} B_n(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

où B_n et $x_{n,j}$ ont été définis dans la partie II.

Considérons un couple (u, v) de réels tel que $u < v$, et notons

$$J_n = \left\{ j \in [\![0; n]\!]\ \middle|\ \frac{n + u\sqrt{n}}{2} \leq j \leq \frac{n + v\sqrt{n}}{2} \right\}\ .$$

Q 30. Pour n dans $\mathbf{N}^*$, justifier $\mathbf{P}\left(u \leq \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right) = \sum\limits_{j\in J_n} \mathbf{P}(T_n = j)$.

Q 31. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(u \leq \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right) = \displaystyle\int_u^v \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ puis $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi(u)$ où les applications φ et Φ ont été définies dans la partie I.

III.B - Critère de tension

Dans cette dernière sous-partie, on fixe ε dans $]0; 1[$.

Q 32. Démontrer qu'il existe x_0 supérieur à 1 tel que l'on ait

$$\forall x \geq x_0\,,\ \exists n_x \in \mathbf{N}\,,\ \forall n \geq n_x\,,\ x^2\mathbf{P}\left(|S_n| \geq x\sqrt{n}\right) \leq \varepsilon\ .$$

Q 33. Pour x_0 et x comme à la question précédente, on fixe vérifiant $N \geq \dfrac{n_x}{\varepsilon}$ et on choisit $n \geq N$. Démontrer alors

$$x^2\mathbf{P}\left(\max_{1\leq p\leq n} |S_p| \geq 3x\sqrt{n}\right) \leq 3\varepsilon\ .$$

Deuxième composition de mathématiques – CentraleSupélec 2023 – MPI

PARTIE I - Résultats préliminaires

I.A - Calcul d'une intégrale classique

I.A.1)

Q 1. Par croissance de l'intégrale et puisque, pour t dans $[0;1]$, on a $\frac{1}{(1+t^2)^n} \geq \frac{1}{2^n}$ $\boxed{I_n \geq \dfrac{1}{2^n}.}$

Q 2. L'intégrande étant continu sur $\mathbf{R}_+$ et puisqu'au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{1}{(1+t^2)^n} = \mathrm{O}\left(t^{-2}\right)$, par critère de Riemann $\boxed{K_n \text{ existe.}}$ De plus, puisqu'on a $\displaystyle\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan$, il vient $\boxed{K_1 = \dfrac{\pi}{2}.}$

Q 3. Pour t supérieur à 1, on a $(1+t^2)^n \geq (1+t)^n$ par croissance de la puissance n^{e}. Par croissance de l'intégrale, on a donc $0 \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(n-1)2^n}$ et donc

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n2^n}\right).}$$

Remarque : cela n'a en fait aucun sens puisque n a été fixé par le sujet.

Q 4. Par relation de Chasles on a donc $K_n - I_n = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n2^n}\right) = \mathrm{o}\left(I_n\right)$, d'après la question 1, i.e. $\boxed{I_n \sim K_n.}$

Remarque : une fois encore n ne saurait varier.

Q 5. Par intégration par parties,

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{(1+t^2)^n} + \int \frac{2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

et donc, par convergence des intégrales et existence des limites en 0 et $+\infty$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{(1+t^2)^n}$, il vient, après avoir remarqué $t^2 = 1+t^2-1$ et utilisé la linéarité de l'intégrale, $K_n = 2n(K_n - K_{n+1})$, ou encore $\boxed{K_n = K_{n+1} + \dfrac{1}{2n}K_n.}$

Q 6. On en déduit, en tenant compte de $K_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $K_n = \dfrac{(2n-3)\dots 1}{(2n-2)\dots 2}\dfrac{\pi}{2}$, soit $K_n = \dfrac{(2n-2)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}\dfrac{\pi}{2}$. En utilisant la formule de Stirling, il vient $K_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n-1}}$. On conclut, grâce à la question 4 $\boxed{I_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}.}$

I.A.2)

Q 7. Par changement de variable $t = \frac{u}{\sqrt{n}}$ dans $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$, il vient $\boxed{\sqrt{n}I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+u^2/n)^n}\,\mathrm{d}u.}$

Q 8. Soit φ la fonction pente $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ (prolongée par 1 en 0) associée à ln par rapport à 1. Par concavité de ln, cette fonction est décroissante. Par décroissance de la fonction inverse, on en déduit qu'à u fixé dans $\mathbf{R}_+^*$, $k \mapsto \dfrac{k}{u^2}\ln(1+u^2/k)$ est croissante et donc aussi, par positivité de u^2, $k \mapsto k\ln(1+u^2/k)$. Cette assertion reste vraie pour $u = 0$.

On considère maintenant la suite de fonctions continues par morceaux sur $\mathbf{R}_+$ donnée par $f_k(u) = \dfrac{1}{(1+u^2/k)^k}\mathbb{1}_{[0;\sqrt{k}]}(u)$. Elle converge simplement vers la fonction continue $u \mapsto \exp(-u^2)$, en décroissant. On a donc, pour k dans $\mathbf{N}^*$ et u dans $\mathbf{R}_+$, $0 \leq f_k(u) \leq \dfrac{1}{1+u^2}$. Comme la fonction majorante est continue, positive et intégrable sur $\mathbf{R}_+$, il résulte du théorème de convergence dominée $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u.}$

Q 9. Il résulte de la question 6 $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}}$ et donc, par partié et changement de variable $u = t/\sqrt{2}$, $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}.}$

I.B - Comportement asymptotique de $1 - \Phi$

Q 10. On pose $u(x) = -\varphi(x)$ de sorte qu'on a $u'(x) = x\varphi(x)$ et donc $\varphi(x) = \frac{1}{x}u'(x)$. Soit t dans $\mathbf{R}$ vérifiant $t \geq x$, on a alors $t \geq x > 0$. Comme la fonction inverse est décroissante et u' est à valeurs positives, il vient $\varphi(t) \leq \dfrac{1}{x}u'(t)$. Par croissance de l'intégrale on en déduit, en utilisant le théorème de LEIBNIZ-NEWTON, dit théorème fondamental du calcul différentiel et intégral et le fait que, par croissance comparée, $\lim_{+\infty} u = 0$, $\boxed{\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{\varphi(x)}{x}.}$

Q 11. On pose maintenant $v(x) = -\frac{\varphi(x)}{x}$, de sorte qu'on a $v'(x) = \frac{1+x^2}{x^2}\varphi(x)$ et donc $\varphi(x) = \frac{x^2}{1+x^2}v'(x)$. La fonction $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^2}$ est cette fois-ci croissante, v' est encore à valeurs positives et, par croissance comparée, on a en encore $\lim_{+\infty} v = 0$. Il en résulte comme précédemment et avec les mêmes notations, $\varphi(x) \geq \dfrac{x^2}{1+x^2}v'(t)$ puis par croissance de l'intégrale $\boxed{\frac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leq \int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.}$

Q 12. Au voisinage de l'infini, on a $\dfrac{1}{u} \sim \dfrac{u}{1+u^2}$ et donc, par encadrement par des équivalents et relation de CHASLES, $\boxed{1 - \Phi(x) \sim \frac{\varphi(x)}{x}.}$

Remarque : une fois encore le texte est en défaut car x a été fixé et ne saurait tendre vers $+\infty$.

I.C - Une inégalité maximale

Q 13. Soit ω dans Ω. On note $X = \{p \in [\![1;n]\!] \mid |R_p(\omega)| \geq 3x\}$ et $p = \min X$ avec la convention $p = +\infty$ si $X = \emptyset$. On a

$$\omega \in A \iff X \neq \emptyset \iff p \neq +\infty$$

et de plus si $p \neq +\infty$, alors, pour tout q dans $[\![1;n]\!]$, $\omega \in A_q \iff q = p$. On en déduit, en notant par le symbole $\sum$ la réunion disjointe, $\boxed{A = \sum_{k=1}^{n} A_k.}$

Remarque : dans l'énoncé initial x n'était pas fixé ni quantifié dans les questions de cette sous-partie. Un comble au vu des sous-parties précédentes !

Q 14. On note $B = (|R_n| < x)$, alors, puisque $(B, \overline{B})$ est un système complet d'événements,

$$A = (A \cap B) + (A \cap \overline{B}) = \left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) \cap B + A \cap \overline{B}$$

et donc, d'après les lois de de Morgan, et puisque $A\cap\overline{B}$ est inclus dans $\overline{B}$, qui est lui-même disjoint de B,

$$A\subset\sum_{k=1}^{n}(A_k\cap B)+\overline{B}$$

et donc, par sous-additivité de la probabilité $\mathbf{P}$, $\boxed{\mathbf{P}\left(A\right)\leq\mathbf{P}\left(|R_n|\geq x\right)+\sum_{p=1}^{n}\mathbf{P}\left(A_p\cap\{|R_n|<x\}\right).}$

Q 15. Soit ω dans A_p vérifiant $|R_n(\omega)|<x$, alors par inégalité triangulaire, on a $|R_n(\omega)-R_p(\omega)|\geq|R_p(\omega)|-|R_n(\omega)|>3x-x$ et donc $\boxed{A_p\cap\{|R_n|<x\}\subset A_p\cap\{|R_n-R_p|>2x\}.}$

Q 16. D'après le lemme des coalitions, pour p dans $[\![1;n]\!]$, A_p et R_n-R_p sont indépendants, puisque les Z_i le sont. Par croissance de la probabilité et il résulte de la question précédente qu'on a, pour p dans $[\![1;n]\!]$, $\mathbf{P}\left(A_p\cap\{|R_n|<x\}\right)\leq\mathbf{P}\left(A_p\right)\mathbf{P}\left(|R_n-R_p|>2x\right)$, et donc

$$\mathbf{P}\left(A_p\cap\{|R_n|<x\}\right)\leq\mathbf{P}\left(A_p\right)\max_{1\leq q\leq n}\mathbf{P}\left(|R_n-R_q|>2x\right)\ .$$

Par additivité de la probabilité on en déduit

$$\sum_{p=1}^{n}\mathbf{P}\left(A_p\cap\{|R_n|<x\}\right)\leq\mathbf{P}\left(A\right)\max_{1\leq p\leq n}\mathbf{P}\left(|R_n-R_p|>2x\right)\ ,$$

et donc, en utilisant la question 14 ainsi que la positivité des probabilités et $\mathbf{P}\left(A\right)\leq1$,

$\boxed{\mathbf{P}\left(A\right)\leq\mathbf{P}\left(|R_n|\geq x\right)+\max_{1\leq p\leq n}\mathbf{P}\left(|R_n-R_p|>2x\right).}$

Q 17. Pour tout p dans $[\![1;n]\!]$ on a $\{|R_n-R_p|>2x\}\subset\{|R_n|>x\}\cup\{|R_p|>x\}$ et donc, par sous-additivité de la probabilité et croissance d'icelle, il vient $\mathbf{P}\left(|R_n-R_p|>2x\right)\leq\mathbf{P}\left(|R_n|\geq x\right)+\mathbf{P}\left(|R_p|\geq x\right)$, ce qui permet de conclure en utilisant la question précédente

$\boxed{\mathbf{P}\left(\max_{1\leq p\leq n}|R_p|\geq3x\right)\leq3\max_{1\leq p\leq n}\mathbf{P}\left(|R_p|\geq x\right).}$

PARTIE II - Étude d'une suite de fonctions

II.A

Q 18. Soit n dans $\mathbf{N}^*$ et k dans $[\![0;n]\!]$. On a $x_{n,k}+x_{n,n-k}=-2\sqrt{n}+\frac{2n}{\sqrt{n}}=0$ et donc $\boxed{-x_{n,k}=x_{n,n-k}.}$

Q 19. Soit n dans $\mathbf{N}^*$. Par définition de B_n, cette fonction ne prend qu'un nombre fini de valeurs et est donc bornée. Comme on a $0\leq\varphi\leq1$, il en va de même pour φ et donc pour $B_n-\varphi$. Par conséquent $\boxed{\Delta_n\text{ existe.}}$

Q 20. Soit n dans $\mathbf{N}^*$. On note D_n l'ensemble des points de discontinuité de B_n, i.e.

$$D_n=\left\{x_0+\frac{2k-1}{\sqrt{n}}\ \middle|\ k\in[\![0;n+1]\!]\right\}=\left\{x_k\pm\frac{1}{\sqrt{n}}\ \middle|\ k\in[\![0;n]\!]\right\}\ .$$

D'après la question 18, D_n est symétrique par rapport à l'origine, tout comme $\mathbf{R}\setminus D_n$. Par symétrie du triangle de Pascal, la restriction de B_n à $\mathbf{R}\setminus D_n$ est paire. Comme $B_n-\varphi$ est continue à droite ou à gauche en tout point et que D_n est discret, les suprema de $|B_n-\varphi|$ sur $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}\setminus D_n$, ou sur $\mathbf{R}_+$ et $\mathbf{R}_+\setminus D_n$ sont identiques. Par parité les suprema sur $\mathbf{R}_+\setminus D_n$ et sur $\mathbf{R}\setminus D_n$ sont identiques et il en résulte que le supremum sur $\mathbf{R}$ est aussi le supremum sur $\mathbf{R}_+$, i.e. $\boxed{\Delta_n=\sup_{x\geq0}|B_n(x)-\varphi(x)|.}$

Q 21. Soit n dans $\mathbf{N}^*$. On a

$$x_0 - \frac{1}{\sqrt{n}} < x_0 + \frac{1}{\sqrt{n}} = x_1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < \cdots < x_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}} = x_n - \frac{1}{\sqrt{n}} < x_n - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

de sorte que B_n est décroissante sur $\mathbf{R}_+$ si et seulement si, pour tout k dans $[\![0;n]\!]$, on a : $n > k \geq \frac{n}{2} \Longrightarrow B_n(x_{n,k+1}) \leq B_n(x_{n,k})$, et cette dernière propriété résulte directement de celles du triangle de PASCAL et plus précisément de $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$, puisque $n > k \geq \frac{n}{2} \Longrightarrow n-k \leq k+1$. On en déduit que $\boxed{B_n \text{ est une application décroissante sur } \mathbf{R}_+.}$

II.B

Q 22. Pour n dans $\mathbf{N}^*$ et k dans $[\![0;n]\!]$, on a $k \in I_n \iff \frac{n}{2} \leq k \leq \frac{n}{2} + \frac{\ell}{2}\sqrt{n}$. En particulier $k \sim n-k \sim \frac{n}{2}$ par encadrement par équivalents. La formule de STIRLING rappelée en début d'énoncé fournit alors

$$k!\,(n-k)! = 2\pi e^{-n} k^{k+1/2}(n-k)^{n-k+1/2}\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{k}\right)\right)\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n-k}\right)\right)$$

et donc, puisque $\mathrm{O}\left(\frac{1}{k}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n-k}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$,

$$\boxed{k!\,(n-k)! = 2\pi e^{-n} k^{k+1/2}(n-k)^{n-k+1/2}\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right).}$$

Q 23. Il résulte de la question précédente et de la formule de STIRLING pour $n!$,

$$B_n(x_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{n^{n+1}}{2^{n+1}k^{k+1/2}(n-k)^{n-k+1/2}}\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

soit $\boxed{B_n(x_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2}\left(2 - \frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2}}.}$

Q 24. Pour n dans $\mathbf{N}^*$ et k dans I_n, on a $\frac{2k}{n} = 1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}$ et donc aussi $\frac{2(n-k)}{n} = 1 - \frac{x_{n,n-k}}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}$. On a également $k + \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2} = k - \frac{n}{2} = -\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}$ et donc aussi $n - k + \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2} = \frac{n}{2} - k = \frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}$. En écrivant les puissances $k + \frac{1}{2}$ et $n - k + \frac{1}{2}$ respectivement comme $\frac{n+1}{2} - \frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}$ et $\frac{n+1}{2} + \frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}$, et en utilisant $\left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}$, il vient directement

$$\boxed{B_n\left(x_{n,k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}\left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}}.}$$

Remarquons qu'on a $x_{n,k} = \mathrm{O}(1)$ par hypothèse et donc $\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}} = \mathrm{o}(1)$, et $\frac{x_{n,k}^2}{n} = \mathrm{o}(1)$. On en déduit, en développant le logarithme au voisinage de 1, $\pm\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}\ln\left(1 \pm \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right) = \frac{x_{n,k}^2}{2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et $\frac{n+1}{2}\ln\left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right) = -\frac{x_{n,k}^2}{2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. Puisqu'on a $\exp\left(\mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = 1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, il vient

$$\left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}\left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} = \exp\left(\frac{x_{n,k}^2}{2}\right)\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

et donc $\boxed{B_n\left(x_{n,k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right)\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).}$

Q 25. La question précédente donne $(B_n - \varphi)(x_{n,k}) = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \mathrm{o}(1)$. On applique ce résultat avec $\ell+1$. Soit maintenant x dans $[0;\ell\,]$. On dispose alors pour tout n dans $\mathbf{N}^*$ et de k dans I_n (défini pour $\ell+1$) tel que $|x - x_{n,k}| < \frac{1}{\sqrt{n}}$ et donc tel que $B_n(x) = B_n(x_{n,k})$, puis $B_n(x) - \varphi(x) = \varphi(x_{n,k}) - \varphi(x) + \mathrm{o}(1)$. Comme x et $x_{n,k}$ appartiennent tous deux au segment $[0;\ell+1\,]$ et que φ y est uniformément continue, car continue et en vertu du théorème de HEINE, il résulte de $x_{n,k} = x + \mathrm{o}(1)$ (avec $\mathrm{o}(1)$ indépendant de x) qu'on a aussi $\varphi(x_{n,k}) - \varphi(x) = \mathrm{o}(1)$ (avec $\mathrm{o}(1)$ ne dépendant que de n, mais ni de k ni de x). Ainsi on a $B_n(x) - \varphi(x) = \mathrm{o}(1)$, i.e. il existe un entier naturel n_1 tel que, pour tout entier n vérifiant $n \geq n_1$, on ait $\boxed{\sup_{x\in[0;\ell\,]} |B_n(x) - \varphi(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}.}$

II.C

Q 26. Soit ℓ dans $\mathbf{R}_+^*$. On applique ce qui précède à $\varepsilon = 2\varphi(\ell)$, ce qui permet de prendre le même ℓ que fixé ici pour appliquer les résultats de la sous-partie précédente. On note n_2 l'entier n_1 obtenu dans cette sous-partie. Comme ℓ appartient à $[0;\ell\,]$, on a en particulier, pour $n \geq n_2$, $|B_n(\ell) - \varphi(\ell)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} = \varphi(\ell)$ et donc, par inégalité triangulaire $\boxed{B_n(\ell) \leq 2\varphi(\ell).}$

Remarque : le réel ℓ avait été fixé pour le restant de la partie par le sujet, il ne saurait donc varier.

Q 27. Soit ε dans $\mathbf{R}_+^*$. On fixe ℓ, n_1 et n_2 comme précédemment et on pose $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Pour n dans $\mathbf{N}^*$ avec $n \geq n_0$, on a donc $|B_n(x) - \varphi(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$ pour x dans $[0;\ell\,]$. Pour $x \geq \ell$, on a, par décroissance de B_n sur $\mathbf{R}_+$, $B_n(x) \in [0; B_n(\ell)\,] \subset [0; 2\varphi(\ell)\,]$ et, également par décroissance de φ sur $\mathbf{R}_+$, $\varphi(x) \in [0;\varphi(\ell)\,]$, de sorte que $|B_n(x) - \varphi(x)| \leq 2\varphi(\ell) = \varepsilon$. On en déduit $\Delta_n \leq \varepsilon$ et donc $\boxed{(\Delta_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ converge vers } 0.}$

PARTIE III - Applications

III.A - Théorème central limite

Q 28. Puisque les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*})$ convergent, elles sont bornées. On note $[a;b\,]$ un segment contenant tous leurs termes, de sorte que $[a;b\,]$ contient également u et v. Par relation de CHASLES et inégalité triangulaire, on a pour tout n dans $\mathbf{N}^*$

$$\left|\int_{u_n}^{v_n} f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_{u_n}^{v_n} (f_n(x) - f)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{u_n}^{u} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{v}^{v_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

et donc, puisque des fonctions continues par morceaux sont bornées sur tout compact et en notant $\|\cdot\|_\infty$ la norme uniforme sur $[a;b\,]$, il vient par inégalité de la moyenne

$$\left|\int_{u_n}^{v_n} f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq (b-a)\,\|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty\,(|u_n - u| + |v_n - v|) = \mathrm{o}(1)$$

par hypothèse sur les suites (f_n), (u_n) et (v_n). Ainsi $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_{u_n}^{v_n} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x.}$

Q 29. Soit n dans $\mathbf{N}^*$. Par définition de X, $\frac{X+1}{2}$ suit une loi de BERNOULLI de paramètre $\frac{1}{2}$. Par indépendance des (X_i), il résulte du lemme des coalitions que T_n suit une loi binomiale de paramètre $(n, \frac{1}{2})$. Puisque, pour j dans $[\![0;n]\!]$, B_n est constante égale à $\frac{\sqrt{n}}{2}\mathbf{P}(T_n = j)$ sur l'intervalle de longueur $\frac{2}{\sqrt{n}}$ centré en $x_{n,j}$, il vient directement $\boxed{\mathbf{P}(T_n = j) = \int_{x_{n,j}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j}+1/\sqrt{n}} B_n(x)\,\mathrm{d}x.}$

Q 30. Soit n dans $\mathbf{N}^*$. On a

$$u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v \Longleftrightarrow \frac{n+\sqrt{n}u}{2} \leq T_n \leq \frac{n+\sqrt{n}v}{2}$$

et donc $\mathbf{P}\left(u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right) = \mathbf{P}(T_n \in J_n)$, soit $\boxed{\mathbf{P}\left(u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right) = \sum_{j \in J_n} \mathbf{P}(T_n = j).}$

Q 31. On a $\frac{n+\sqrt{n}u}{2} \sim \frac{n+\sqrt{n}v}{2} \sim \frac{n}{2}$ et donc, pour n assez grand on a $J_n = \mathbf{Z} \cap \left[\frac{n+\sqrt{n}u}{2}; \frac{n+\sqrt{n}v}{2}\right]$.

Comme on a également $\frac{n+\sqrt{n}v}{2} - \frac{n+\sqrt{n}u}{2} \sim \frac{v-u}{2}\sqrt{n}$, l'intervalle précédent est asymptotiquement de longueur supérieure à 1 et contient donc au moins un entier. On en déduit que pour n assez grand J_n est non vide. Soit donc n un tel élément de $\mathbf{N}^*$. On remarque également que J_n est un intervalle entier borné, en tant qu'intersection d'un intervalle réel et d'un intervalle entier borné. On peut ainsi définir $a_n = \min J_n$, $b_n = \max J_n$, $u_n = x_{n,a_n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $v_n = x_{n,b_n} + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Il résulte des deux questions précédentes qu'on a

$$\mathbf{P}\left(u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right) = \int_{u_n}^{v_n} B_n(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Puisque J_n est un intervalle entier, on a $\frac{n+\sqrt{n}u}{2} \leq a_n \leq \frac{n+\sqrt{n}u}{2} + 1$ et donc $u \leq u_n \leq u + \frac{2}{\sqrt{n}}$, et *mutatis mutandis* $v \geq v_n \geq v - \frac{2}{\sqrt{n}}$. En particulier $\lim u_n = u$ et $\lim v_n = v$. On peut donc appliquer la question 28 avec $I = \mathbf{R}$, $f_n = B_n$ et $f = \varphi$, en vertu de la partie II puisqu'on a affaire à des fonctions continues par morceaux sur $\mathbf{R}$ avec (f_n) convergeant uniformément vers f. On en déduit

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right) = \int_u^v \varphi(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Soit ε dans $\mathbf{R}_+^*$. On choisit v strictement supérieur à u tel que $\frac{1}{v^2} \leq \varepsilon$ et $0 \leq 1 - \Phi(v) \leq \varepsilon$, ce qui est licite d'après les questions 10 et 11. Pour un tel v, d'après ce qui précède, on dispose de n_0 dans $\mathbf{N}^*$ tel que pour $n \geq n_0$ on a $\left|\mathbf{P}\left(u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right) - \int_u^v \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \varepsilon$. On en déduit, pour un tel n,

$$\mathbf{P}\left(u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \geq \mathbf{P}\left(u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right) \geq \int_u^v \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \geq \int_u^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x - 2\varepsilon\ .$$

Par ailleurs puisque S_n est une somme de variables indépendantes, il résulte de la linéarité de l'espérance et de l'identité de Koenig-Huyghens, $\mathbf{E}(S_n) = 0$ et $\mathrm{V}(S_n) = n$, et donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > v\right) \leq \frac{1}{v^2} \leq \varepsilon$. Par additivité de la probabilité, il en résulte

$$\mathbf{P}\left(u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \leq \mathbf{P}\left(u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right) + \varepsilon \leq \int_u^v \varphi(x)\,\mathrm{d}x + 2\varepsilon \leq \int_u^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + 2\varepsilon$$

par positivité de φ et croissance de l'intégrale. On en conclut $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi(u).}$

III.B - Critère de tension

Q 32. En reprenant les notations de la question précédente on a, par linéarité de la limite et additivité de la probabilité, $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} < v\right) = 1 - \Phi(u) - (1 - \Phi(v)) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right)$, et donc $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} = v\right) = 0$. Toujours par additivité, il vient $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(u > \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \Phi(u)$ et donc aussi, avec le calcul précédent, $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(u \geq \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \Phi(u)$. Comme, pour n dans $\mathbf{N}^*$ et x dans $[1;+\infty[$, on a (en dénotant par $+$ la réunion disjointe)

$$(|S_n| \geq x\sqrt{n}) = \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq x\right) + \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq -x\right)$$

il vient par linéarité de la limite $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(|S_n| \geq x\sqrt{n}\right) = 1 - \Phi(x) + \Phi(-x) = 2(1-\Phi(x))$, par parité de φ. Il résulte de la question 10 que $x^2(1-\Phi(x)) = \mathrm{o}\left(1\right)$ au voisinage de l'infini, par croissances comparées, et donc il existe x_0 supérieur à 1 tel que l'on ait, pour $x \geq x_0$, l'existence de n_x dans $\mathbf{N}^*$ tel que pour $n \geq n_x$ on ait $\boxed{x^2\mathbf{P}\left(|S_n| \geq x\sqrt{n}\right) \leq \varepsilon.}$

Q 33. Soit p dans $[\![1;n]\!]$. Si $p \geq n_x$ alors on a, par croissance de la probabilité et positivité de x^2,

$$x^2\mathbf{P}\left(|S_p| \geq x\sqrt{n}\right) \leq x^2\mathbf{P}\left(|S_p| \geq x\sqrt{p}\right) \leq \varepsilon$$

d'après ce qui précède. Sinon, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev déjà utilisée, il vient

$$x^2\mathbf{P}\left(|S_p| \geq x\sqrt{n}\right) \leq \frac{p}{n} \leq \frac{n_x}{N} \leq \varepsilon\ .$$

Par indépendance des (X_i) on peut donc appliquer la question 17 et obtenir
$\boxed{x^2\mathbf{P}\left(\max_{1\leq p\leq n} |S_p| \geq 3x\sqrt{n}\right) \leq 3\varepsilon.}$