Première composition de mathématiques
ECP MP 1996

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}$ définies sur $\mathbf{R}$ et $\mathcal{L}$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ formé des fonctions lipschitziennes, c'est-à-dire des fonctions φ pour lesquelles existe une constante K_φ positive telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2\,, \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K_\varphi \, |x-y| \ .$$

On a pour but, dans ce problème, de rechercher les fonctions F dans $\mathcal{L}$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}\,, \quad F(x) - \lambda F(x+a) = f(x)\,, \tag{1}$$

où f est une fonction de $\mathcal{L}$ donnée et où a et λ sont deux réels non nuls donnés.
Les parties III et IV sont largement indépendantes.

PARTIE I - Question préliminaire

Soit F dans $\mathcal{F}$ vérifiant (1). Montrer que, pour tout x réel et tout n entier naturel non nul, on a

$$F(x) = \lambda^n F(x+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka) \tag{2}$$

$$F(x) = \lambda^{-n} F(x-na) - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} f(x-ka)\ . \tag{3}$$

PARTIE II - Quelques propriétés des fonctions lipschitziennes

II.1) Montrer que $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel réel de $\mathcal{F}$.

II.2) Soit f dans $\mathcal{F}$ dérivable. Montrer que, pour que f appartienne à $\mathcal{L}$, il faut et il suffit que sa dérivée f' soit bornée.

II.3) Soit f et g deux fonctions bornées de $\mathcal{L}$, montrer que leur produit fg est aussi une fonction de $\mathcal{L}$. En est-il de même si f et g ne sont pas toutes les deux bornées ?

II.4) Soit f dans $\mathcal{L}$. Montrer l'existence de deux réels positifs A et B tels qu'on ait

$$\forall x \in \mathbf{R}\,, \quad |f(x)| \leq A\,|x| + B\ . \tag{4}$$

II.5) Soit f dans $\mathcal{F}$. On suppose qu'existe un réel positif M tel que, pour tous x et y réels vérifiant $0 \leq x-y \leq 1$, on a $|f(x) - f(y)| \leq M\,|x-y|$. Démontrer que f appartient à $\mathcal{L}$.

PARTIE III - Étude de (1) pour $|\lambda| \neq 1$

III.A - On suppose dans cette sous-partie $|\lambda| < 1$.

III.A.1)

a) Montrer que, pour tout x réel, la série $\sum \lambda^n f(x+na)$ est absolument convergente (on pourra utiliser (4)).

b) En déduire qu'il existe une, et une seule, fonction F dans $\mathcal{L}$ vérifiant (1) et que F est donnée par

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na)\ .$$

III.A.2) Étude de trois cas particuliers

a) On suppose que f est la fonction f_1 définie par $f_1(x) = 1$. Montrer $f_1 \in \mathcal{L}$ et déterminer la fonction F_1 correspondante.

b) On suppose que f est la fonction f_2 définie par $f_2(x) = \cos(x)$. Montrer $f_2 \in \mathcal{L}$ et que la fonction F_2 correspondante est donnée par

$$F_2(x) = \frac{\cos(x) - \lambda\cos(x-a)}{1 - 2\lambda\cos(a) + \lambda^2} \tag{5}$$

c) On suppose que f est la fonction f_3 définie par $f_3(x) = \sin(x)$. Montrer $f_3 \in \mathcal{L}$ et déterminer la fonction F_3 correspondante.

III.B - On suppose dans cette sous-partie $|\lambda| > 1$.

III.B.1)

a) Montrer que, pour tout x réel, la série $\sum_{n\geq 1} \lambda^{-n} f(x-na)$ est absolument convergente.

b) En déduire qu'il existe une, et une seule, fonction F dans $\mathcal{L}$ vérifiant (1) et que F est donnée par

$$F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x-na)\ .$$

III.B.2) Dans chacun des trois cas particuliers suivants, déterminer la fonction F_i correspondante.

a) Lorsque f est la fonction f_1 définie par $f_1(x) = 1$.

b) Lorsque f est la fonction f_2 définie par $f_2(x) = \cos(x)$.

c) Lorsque f est la fonction f_3 définie par $f_3(x) = \sin(x)$.

PARTIE IV - Étude de (1) pour $|\lambda| = 1$

IV.A - On suppose dans cette sous-partie $\lambda = 1$.

IV.A.1) Montrer que, pour qu'il existe une fonction F dans $\mathcal{L}$ vérifiant (1), il faut que f soit bornée.

IV.A.2)

a) Montrer, en en explicitant une, qu'il existe des fonctions F dans $\mathcal{L}$ non nulles vérifiant

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F(x) - F(x+a) = 0\ .$$

b) Soit F dans $\mathcal{L}$ vérifiant (1). La fonction F est-elle unique ?

IV.A.3) On suppose dans cette question que f est la fonction définie par $f(x) = \cos(x)$.

a) Si $\cos(a) \neq 1$, montrer qu'en faisant tendre λ vers 1 dans la fonction F_2 donnée par (5), on obtient une fonction F dans $\mathcal{L}$ vérifiant (1).

b) Si $a = 2\pi$, établir qu'il n'existe aucune fonction F dans $\mathcal{L}$ vérifiant (1).

IV.B - On suppose dans cette sous-partie $\lambda = -1$.

IV.B.1)

a) Montrer, en en explicitant une, qu'il existe des fonctions F dans $\mathcal{L}$ non nulles vérifiant

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F(x) + F(x+a) = 0 .$$

b) Soit F dans $\mathcal{L}$ vérifiant (1). La fonction F est-elle unique ?

IV.B.2) On suppose dans cette question que f est la fonction définie par $f(x) = \cos(x)$.

a) Si $\cos(a) \neq -1$, expliciter une fonction F dan $\mathcal{L}$ vérifiant (1).

b) Si $a = \pi$, établir qu'il n'existe aucune fonction F dans $\mathcal{L}$ vérifiant (1).

IV.B.3) On suppose dans cette question qu'on a $a = 1$ et que f est une fonction dans $\mathcal{L}$ décroissante, de limite nulle en $+\infty$ et à dérivée f' croissante.

a) Montrer que, pour tout x réel, la série $\sum(-1)^n f(x+n)$ converge.

b) Montrer qu'il existe une, et une seule, fonction F dans $\mathcal{L}$ vérifiant (1) et $\lim_{+\infty} F = 0$. (Pour établir $F \in \mathcal{L}$, on pourra utiliser la question II.5.)

Première composition de mathématiques – ECP MP 1996

PARTIE I - Question préliminaire

Soit x réel et n un entier naturel non nul

$$F(x) - \lambda^n F(x+na) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\lambda^k F(x+ka) - \lambda^{k+1} F(x+(k+1)a)\Big)$$

puisqu'on a affaire à une somme télescopique. Il en résulte, d'après (1),

$$\boxed{F(x) = \lambda^n F(x+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka)}$$

En appliquant ce qui précède à $x - na$, il vient $F(x-na) = \lambda^n F(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x-(n-k)a)$ et donc, en divisant par λ^n qui est non nul, et en effectuant un changement d'indice

$$\boxed{F(x) = \lambda^{-n} F(x-na) - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} f(x-ka).}$$

PARTIE II - Quelques propriétés des fonctions lipschitziennes

II.1) Soit, pour k dans $\mathbf{R}_+$, $\mathcal{L}_k$ l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ lipschitziennes de rapport k. Par inégalité triangulaire la somme de fonctions dans $\mathcal{L}_k$ appartient à $\mathcal{L}_{2k}$. De plus si α est réel et f appartient à $\mathcal{L}_k$, alors αf appartient à $\mathcal{L}_{|\alpha|k}$. Comme $\mathcal{L} = \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{L}_k$, $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$ et $0 \in \mathcal{L}$, il en résulte que $\boxed{\mathcal{L} \text{ est un sous-espace vectoriel réel de } \mathcal{F}.}$

II.2) Si f' est bornée sur $\mathbf{R}$, alors elle y est continue. Pour x et y réels avec $x < y$, on peut appliquer le théorème de Lagrange (dit des accroissements finis) puisque f est continue sur $[x;y]$ et dérivable sur $]x;y[$. On obtient

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{]x;y[} |f'| \times |x-y| \leq \sup_{\mathbf{R}} |f'| \times |x-y|$$

et cette dernière expression est symétrique en x et y et encore valide si $x = y$ car $0 \leq 0$, donc valide sans restriction sur x et y réels. Donc f est lipschitzienne de rapport $\sup_{\mathbf{R}} |f'|$ et appartient donc à $\mathcal{L}$.

Réciproquement on dispose de k tel que f soit lipschitzienne de rapport k. Alors, pour tous x et y réels, avec $y \neq x$, on a $\left|\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leq k$ et donc, en passant à la limite pour y tendant vers x en étant distinct de x, il vient puisque f est dérivable en x et la valeur absolue est continue, $|f'(x)| \leq k$ et donc f' est bornée. Autrement dit

$\boxed{f \text{ appartient à } \mathcal{L} \text{ si et seulement si sa dérivée est bornée.}}$

II.3) Puisque f et g sont lipschitziennes bornées, on dispose de k et M dans $\mathbf{R}_+$ tels que f et g soient lipschitziennes de rapport k et bornées par M, que l'on peut choisir communs à f et g quitte à les augmenter. Pour x et y dans $\mathbf{R}$, on a ainsi

$$f(x)g(x) - f(y)g(y) = \begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ g(y) & g(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(x) - f(y) & f(y) \\ g(y) - g(x) & g(x) \end{vmatrix}$$

et donc, par inégalité triangulaire,

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq 2kM\,|x-y| \ .$$

Il en résulte que $\boxed{fg \text{ appartient à } \mathcal{L}.}$

Soit f et g la fonction identité. Elles sont donc lipschitziennes de rapport 1. Néanmoins leur produit est la fonction carré, qui est dérivable de dérivée non bornée, et donc non lipschitzienne d'après ce qui précède. Par conséquent

$\boxed{\text{le résultat tombe en défaut si } f \text{ et } g \text{ ne sont pas toutes les deux bornées.}}$

II.4) Puisque f est lipschitzienne, on dispose de A réel positif tel que f soit lipschitzienne de rapport A. On pose par ailleurs $B = |f(0)|$. En particulier B est un réel positif. De plus pour x réel, il vient, par inégalité triangulaire et inégalité de Lipschitz

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leq A\,|x-0| + B\,,$$

i.e. $\boxed{|f(x)| \leq A\,|x| + B.}$

II.5) Soit x et y réels. Soit $n > |x-y|$, ce qui est licite puisque $\mathbf{R}$ est archimédien. On pose pour k dans $[\![0;n]\!]$, $x_k = x + \dfrac{k}{n}(y-x)$. Il vient par inégalité triangulaire et par hypothèse

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \\ &\leq M \sum_{k=0}^{n-1} |x_{k+1} - x_k| = M\,|x_n - x_0| \end{aligned}$$

puisque tous les termes sont de même signe, celui de $y-x$, et donc qu'on a affaire à une somme télescopique. Il vient $|f(x) - f(y)| \leq M\,|x-y|$ et par conséquent $\boxed{f \text{ appartient à } \mathcal{L}.}$

PARTIE III - Étude de (1) pour $|\lambda| \neq 1$

III.A

III.A.1) a) Soit x réel. D'après (4), on a $\lambda^n f(x+na) = O(n\lambda^n)$. De plus, par comparaison à une série géométrique (règle de d'Alembert), la série à termes strictement positifs $\sum n\,|\lambda|^n$ est convergente puisque $|\lambda| < 1$. Il en résulte, par comparaison, que

$\boxed{\text{la série } \sum \lambda^n f(x+na) \text{ est absolument convergente.}}$

b) Soit x dans $\mathbf{R}$ et F dans $\mathcal{L}$ vérifiant (1). D'après la question précédente le second terme du membre de droite de (2) admet une limite quand n tend vers l'infini. D'après (4), le premier terme est dans $O(n\lambda^n)$ et tend donc vers 0 en l'infini puisque $|\lambda| < 1$. Il en résulte que si F existe, il est donné par la formule

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na) \ .$$

Réciproquement, d'après la question précédente, une telle formule définit bien un élément de $\mathcal{F}$. Il vérifie (1) en séparant le terme d'indice $n = 0$ dans la somme précédente et en mettant λ en facteur. De plus, pour x et y réels, il vient pour tout N dans $\mathbf{N}$,

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \lambda^n f(x+na) - \sum_{n=0}^{N} \lambda^n f(y+na)\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |\lambda|^n K_f |x-y| \leq \frac{K_f}{1-|\lambda|} |x-y|$$

où K_f est une constante de Lipschitz pour f, et donc, par passage à la limite en N,

$$|F(x) - F(y)| \leq \frac{K_f}{1-|\lambda|} |x-y| \ .$$

Donc F appartient à $\mathcal{L}$ et

il existe une, et une seule, fonction F dans $\mathcal{L}$ vérifiant (1) et elle est donnée par

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na) \ .$$

III.A.2) a) Puisque f_1 est constante, elle est lipschitzienne de rapport nul, donc $\boxed{f_1 \in \mathcal{L}.}$

Puisque, pour λ réel, $f_1 - \lambda f_1 = (1-\lambda) f_1$, il vient pour λ distinct de 1, $\dfrac{1}{1-\lambda} f_1 - \lambda \dfrac{1}{1-\lambda} f_1 = f_1$. Autrement dit $\dfrac{1}{1-\lambda} f_1$ vérifie (1) pour toute valeur de a et indépendamment de λ distinct de 1. De plus, comme $\mathcal{L}$ est un espace vectoriel, $\dfrac{1}{1-\lambda} f_1 \in \mathcal{L}$. Par unicité de la solution, il vient $\boxed{F_1 = \dfrac{1}{1-\lambda} f_1.}$

b) Puisque f_2 est dérivable à dérivée bornée par 1 il vient, d'après II.2, $\boxed{f_2 \in \mathcal{L}.}$

On remarque que si f est lipschitzienne, alors, pour tout réel t, $x \mapsto f(x+t)$ est lipschitzienne de même rapport, puisque l'accroissement des valeurs est contrôlé par l'accroissement de la variable. On remarque de plus que, pour x, a et λ réels, on a

$$\cos(x) - \lambda \cos(x-a) - \lambda\left(\cos(x+a) - \lambda \cos(x)\right) = (1 - 2\lambda \cos(a) + \lambda^2) \cos(x)$$

puisque $\cos(x+a) + \cos(x-a) = 2\cos(x)\cos(a)$. On remarque de plus

$$1 - 2\lambda \cos(a) + \lambda^2 = (1 - \lambda e^{ia})(1 - \lambda e^{-ia}) = \left|1 - \lambda e^{ia}\right|^2$$

et donc cette quantité n'est nulle que si $\lambda = 1$ et $a \in 2\pi\mathbf{Z}$ ou si $\lambda = -1$ et $a \in \pi + 2\pi\mathbf{Z}$. On en déduit que, sauf dans les cas précédemment cités, la fonction donnée par $F_2(x) = \dfrac{1}{1 - 2\lambda\cos(a) + \lambda^2}\left(\cos(x) - \lambda\cos(x-a)\right)$ vérifie (1). De plus, en tant que combinaison linéaire de deux fonctions lipschitziennes, $F_2 \in \mathcal{L}$.

Par unicité $\boxed{F_2(x) = \dfrac{\cos(x) - \lambda\cos(x-a)}{1 - 2\lambda\cos(a) + \lambda^2}.}$

Remarque : d'après la formule obtenue en II.1, on a, pour x réel, $F_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \cos(x+na)$, i.e.

$$F_2(x) = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n e^{ina}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{ix}}{1-\lambda e^{ia}}\right) = \frac{\mathrm{Re}(e^{ix}(1-\lambda e^{-ia}))}{|1-\lambda e^{ia}|^2}$$

ce qui est la formule proposée.

c) Puisque f_3 est donnée par $f_3(x) = f_2(x - \pi/2)$, d'après la première remarque faite dans la réponse à la question précédente, $\boxed{f_3 \in \mathcal{L}.}$

Toujours d'après cette remarque, la fonction donnée par $F_2(x - \pi/2)$ est lipschitzienne et elle vérifie la même équation fonctionnelle que F_2 en changeant f_2 en f_3, i.e. pour x réel, $\boxed{F_3(x) = \dfrac{\sin(x) - \lambda\sin(x-a)}{1 - 2\lambda\cos(a) + \lambda^2}.}$

Remarque : d'après la formule obtenue en II.1, on a, pour x réel, $F_3(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \sin(x+na)$, i.e. en s'appuyant sur les calculs de la remarque précédente

$$F_3(x) = \frac{\mathrm{Im}(e^{ix}(1-\lambda e^{-ia}))}{|1-\lambda e^{ia}|^2} .$$

III.B

III.B.1) a) Soit x réel. D'après (4), on a $\lambda^{-n} f(x - na) = O(n\lambda^n)$. De plus, par comparaison à une série géométrique (règle de d'Alembert), la série à termes strictement positifs $\sum n\,|\lambda|^{-n}$ est convergente puisque $|\lambda| > 1$. Il en résulte, par comparaison, que

$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} \lambda^{-n} f(x-na) \text{ est absolument convergente.}}$

b) Soit x dans $\mathbf{R}$ et F dans $\mathcal{L}$ vérifiant (1). D'après la question précédente le second terme du membre de droite de (3) admet une limite quand n tend vers l'infini. D'après (4), le premier terme est dans $O(n\lambda^{-n})$ et tend donc vers 0 en l'infini puisque $|\lambda| > 1$. Il en résulte que si F existe, il est donné par la formule

$$F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x - na) .$$

Réciproquement, d'après la question précédente, une telle formule définit bien un élément de $\mathcal{F}$. Il vérifie (1) en séparant le terme d'indice $n = 1$ dans la somme précédente évaluée en $x + a$. De plus, pour x et y réels, il vient pour tout N dans $\mathbf{N}^*$,

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \lambda^{-n} f(x-na) - \sum_{n=1}^{N} \lambda^{-n} f(y-na)\right| \leq \sum_{n=1}^{N} |\lambda|^{-n} K_f\,|x-y| \leq \frac{K_f}{|\lambda|-1}\,|x-y|$$

où K_f est une constante de Lipschitz pour f, et donc, par passage à la limite en N,

$$|F(x) - F(y)| \leq \frac{K_f}{|\lambda|-1}\,|x-y| .$$

Donc F appartient à $\mathcal{L}$ et

il existe une, et une seule, fonction F dans $\mathcal{L}$ vérifiant (1) et elle est donnée par

$$\boxed{F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x - na)\ .}$$

III.B.2) Les justifications apportées dans la sous-partie précédente montrent que f_1, f_2 et f_3 appartiennent à $\mathcal{L}$ et que les équations vérifiées par F_1, F_2 et F_3 sont indépendantes de a et λ sous certaines conditions, à savoir $\lambda \neq 1$ pour F_1 et $\lambda \neq e^{ia}$ pour F_2 et F_3.

a) Par unicité de la solution et la remarque précédente, $\boxed{F_1 = \dfrac{1}{1-\lambda} f_1.}$

b) Par unicité de la solution et la remarque précédente, $\boxed{F_2(x) = \dfrac{\cos(x) - \lambda\cos(x-a)}{1 - 2\lambda\cos(a) + \lambda^2}.}$

c) Par unicité de la solution et la remarque précédente, $\boxed{F_3(x) = \dfrac{\sin(x) - \lambda\sin(x-a)}{1 - 2\lambda\cos(a) + \lambda^2}.}$

PARTIE IV - Étude de (1) pour $|\lambda| = 1$

IV.A

IV.A.1) Soit F vérifiant (1), K_F une constante de Lipschitz pour F et x un réel. On a donc

$$|f(x)| = |F(x) - F(x+a)| \leq K_F\,|a|$$

et donc $\boxed{f \text{ est bornée.}}$

IV.A.2) a) Toute fonction constante, par exemple f_1, est lispchitzienne (de rapport 0) et a-périodique, donc

$\boxed{\text{il existe des fonctions } F \text{ dans } \mathcal{L} \text{ non nulles vérifiant } \forall x \in \mathbf{R},\ F(x) - F(x+a) = 0.}$

b) Puisque $\mathcal{L}$ est un espace vectoriel $F + f_1$ appartient à $\mathcal{L}$ et, d'après ce qui précède, $F + f_1$ vérifie (1). Il en résulte que $\boxed{\text{la fonction } F \text{ n'est pas unique.}}$

IV.A.3) a) Les justifications apportées dans la partie précédente montrent que f_2 appartient à $\mathcal{L}$ et que l'équation vérifiée par F_2 est indépendante de a et λ à condition d'avoir $\lambda \neq e^{ia}$. Comme $\cos(a) \neq 1$, cette condition est bien vérifiée. La fonction donnée par $\dfrac{\cos(x) - \cos(x-a)}{2(1-\cos(a))}$ est donc une solution, ou encore en simplifiant l'expression,

$\boxed{\text{la fonction } F \text{ donnée par } F(x) = -\dfrac{\sin(x + \frac{a}{2})}{2\sin(\frac{a}{2})} \text{ appartient à } \mathcal{L} \text{ et vérifie (1).}}$

b) Pour x et y réels et n dans $\mathbf{N}$, on obtient grâce à (2),

$$F(x) - F(y) - F(x + 2n\pi) + F(y + 2n\pi) = n(\cos(x) - \cos(y))$$

ou encore, par inégalité triangulaire,

$$|\cos(x) - \cos(y)| \leq \frac{1}{n}\left(|F(x) - F(y)| + |-F(x + 2n\pi) + F(y + 2n\pi)|\right)$$

et donc, si F est lipschitzienne de rapport k, on en déduit que cos est lipschitzienne de rapport $2k/n$. Comme cos n'est pas constante, ceci est impossible.

$\boxed{\text{Il n'existe aucune fonction } F \text{ dans } \mathcal{L} \text{ vérifiant (1).}}$

IV.B

IV.B.1) a) On pose, pour x réel, $F_a(x) = \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$. Puisque F_a à dérivée bornée par $\frac{\pi}{|a|}$, il appartient à $\mathcal{L}$. Comme $F_a(0) = 1$, F_a est non nul et de plus, pour x réel, on a

$$F_a(x) + F_a(x + a) = \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{a}x + \pi\right) = 0\,,$$

donc $\boxed{F_a \text{ est une fonction dans } \mathcal{L} \text{ non nulle et vérifiant } \forall x \in \mathbf{R},\ F_a(x) + F_a(x + a) = 0.}$

b) Puisque $\mathcal{L}$ est un espace vectoriel $F + F_a$ appartient à $\mathcal{L}$ et, d'après ce qui précède, $F + F_a$ vérifie (1). Il en résulte que $\boxed{\text{la fonction } F \text{ n'est pas unique.}}$

IV.B.2) a) Les justifications apportées dans la partie précédente montrent que f_2 appartient à $\mathcal{L}$ et que l'équation vérifiée par F_2 est indépendante de a et λ à condition d'avoir $\lambda \neq e^{ia}$. Comme $\cos(a) \neq -1$, cette condition est bien vérifiée. La fonction donnée par $\dfrac{\cos(x) + \cos(x - a)}{2(1 + \cos(a))}$ est donc une solution, ou encore en simplifiant l'expression,

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ donnée par } F(x) = \frac{\cos(x + \frac{a}{2})}{2\cos(\frac{a}{2})} \text{ appartient à } \mathcal{L} \text{ et vérifie (1).}}$$

b) Pour x et y réels et n dans $\mathbf{N}$, on obtient grâce à (2),

$$F(x) - F(y) - F(x + 2n\pi) + F(y + 2n\pi) = 2n(\cos(x) - \cos(y))$$

ou encore, par inégalité triangulaire,

$$|\cos(x) - \cos(y)| \leq \frac{1}{2n}\left(|F(x) - F(y)| + |-F(x + 2n\pi) + F(y + 2n\pi)|\right)$$

et donc, si F est lipschitzienne de rapport k, on en déduit que cos est lipschitzienne de rapport k/n. Comme cos n'est pas constante, ceci est impossible.

$\boxed{\text{Il n'existe aucune fonction } F \text{ dans } \mathcal{L} \text{ vérifiant (1).}}$

IV.B.3) a) Puisque f est décroissante et de limite nulle en l'infini, elle est positive. Il en résulte que, pour x réel, la série $\sum(-1)^n f(x + n)$ est une série alternée dont le terme général est décroissant en valeur absolue. D'après le théorème de Leibniz (critère spécial des séries alternées) $\boxed{\text{la série } \sum(-1)^n f(x + n) \text{ converge.}}$

b) Soit F une fonction dans $\mathcal{L}$ vérifiant (1) et $\lim_{+\infty} F = 0$, et x un réel.
Puisqu'on a $\lim_{+\infty} F = 0$, on a aussi $\lim(-1)^n F(x+n) = 0$. Il résulte de (2) qu'on a nécessairement $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(x+n)$.
Réciproquement si F est défini, d'après le théorème de Leibniz sur le reste des séries alternées, on a aussi $|F(x)| \leq f(x)$. Il en résulte $\lim_{+\infty} F = 0$.
De plus, puisqu'on a affaire à une somme de deux séries convergentes, on a

$$\begin{aligned} F(x)+F(x+1) &= f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f(x+n) + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(x+n+1) \\ &= f(x) + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \left(f(x+n+1) - f(x+n+1)\right) = f(x) \end{aligned}$$

et donc F vérifie (1).
Enfin si y est un réel vérifiant $0 \leq x-y \leq 1$, on a, toujours car on a affaire à une somme de séries convergentes,

$$F(x) - F(y) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(f(y+n) - f(x+n)\right) .$$

Or la fonction f' est croissante, donc f est convexe et il en résulte que la fonction pente est une fonction croissante. Il vient donc, pour tout entier naturel n

$$\frac{f(y+n)-f(x+n)}{y-x} \leq f'(x) \leq f'(y+1) \leq \frac{f(y+n+1)-f(x+n+1)}{y-x} .$$

Cette suite d'inégalité résulte également du théorème de Rolle et de la croissance de f'.
Puisqu'on a $y-x \leq 0$, il en résulte que la série $\sum(-1)^{n+1}\dfrac{f(y+n)-f(x+n)}{x-y}$ est une série alternée dont la valeur absolue du terme général, à savoir $f(y+n)-f(x+n)$, est décroissante et tend vers 0 (puisque $\lim_{+\infty} f = 0$). Cette série est donc convergente et sa somme est, en valeur absolue, majorée par celle de son premier terme.
D'où $|F(x)-F(y)| \leq |f(x)-f(y)|$ et il en résulte que F est lipschitzienne puisque f l'est, en utilisant II.5. Par conséquent

$\boxed{\text{il existe une, et une seule, fonction } F \text{ dans } \mathcal{L} \text{ vérifiant (1) et } \lim_{+\infty} F = 0.}$