CONCOURS D'ENTRÉE DES INGÉNIEURS DE LA VILLE DE PARIS
ouvert le 22 avril 1991

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Durée : 4 heures - coefficient : 6

N . B : On signale aux candidats que la notation tiendra compte du soin et de la clarté de la rédaction.
On s'efforcera de traiter les questions dans l'ordre.
Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel normé, dont la norme est notée $\| \ \|$.
Si u et v sont deux éléments de E, le segment $[u, v]$ est l'ensemble des vecteurs $tu + (l - t)v$, où t est un réel tel que $0 \leqslant t \leqslant 1$.
C étant une partie de E, C est dite convexe si et seulement si, pour tout couple (u, v) d'éléments de C, le segment $[u, v]$ est contenu dans C.

Partie I :

1°) Soit C une partie convexe de E, n un entier tel que $n \geqslant 2$.

Montrer que $\forall (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in C^n, \forall (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, la combinaison linéaire $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ est un élément de C.

2°) Dans cette question, n est un entier strictement positif, et $u_1, u_2, \ldots, u_n$ un n-uplet d'éléments de E, fixé.

a) Montrer que l'ensemble des vecteurs égaux à $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, où les $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont des réels positifs ou nuls, vérifiant $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$ est une partie convexe de E, qu'on notera C_0.
C_0 est appelée enveloppe convexe de la famille $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.
Cette définition sera utilisée dans la suite du problème.

b) Montrer que l'enveloppe convexe de $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ est la plus petite partie convexe de E contenant $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

3°) Exemples :
E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique, composée des vecteurs $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

a) Déterminer l'enveloppe convexe des vecteurs $(-1, 2)$, $(-1, -1)$, $(-1, 3)$, $(1, 1)$. On fera une figure et on justifiera la réponse.

b) Déterminer l'enveloppe convexe des vecteurs $(1, -2)$, $(-2, -3)$, $(1, 1)$, $(-1, 0)$. Là encore, on fera une figure et on justifiera avec soin la réponse.

4°) Dans cette question, n est un entier fixé, tel que $n \geqslant 2$, E est un espace vectoriel euclidien de dimension n, dont le produit scalaire sera note $(\ | \ )$. La norme utilisée sur E est la norme euclidienne associée.
Soit a un vecteur fixé de E, c un réel fixé.
Montrer que les ensembles H, F, G dont les définitions suivent, sont convexes.

$$H = \{x \text{ tel que } x \in E \text{ et } (a|x) = c\}$$
$$F = \{x \text{ tel que } x \in E \text{ et } (a|x) \geqslant c\}$$
$$G = \{x \text{ tel que } x \in E \text{ et } (a|x) \leqslant c\}$$

5°) Dans cette question, E est un espace vectoriel réel normé quelconque.

a) C étant une partie convexe de E, montrer que l'adhérence $\overline{C}$ de C est convexe.

b) C étant une partie convexe de E, montrer que l'intérieur $\mathring{C}$ de C est convexe.

Partie II :

C étant une partie convexe non vide de E, un élément x de C est appelé point extréma1 de C si et seulement si il n'existe aucun couple (u, v) d'éléments de C et aucun réel $t \in]0, 1[$ tels que : $u \neq v$ et $x = tu + (1 - t)v$.

1°) Soient u et v deux éléments de E. Quels sont les points extrémaux du segment $[u, v]$?

2°) Dans cette question, E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, muni de la base canonique, et C est l'ensemble des vecteurs (x, y) tels que $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

a) Vérifier que C est convexe.

b) Déterminer les points extrémaux de C.

3°) E est un espace vectoriel réel normé quelconque, n un entier strictement positif.
Soient $u_0, u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de E tels que les vecteurs $u_1 - u_0, u_2 - u_0, \ldots, u_n - u_0$ soient linéairement indépendants. C est l'enveloppe convexe de $\{u_0, u_1, \ldots, u_n\}$. Montrer que les points extrémaux de C sont $u_0, u_1, \ldots, u_n$.

4°) Dans cette question, n est un entier, tel que $n \geqslant 2$, et E est l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
C est l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $(a_{i,j})$ tels que :

$$\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\,, a_{i,j} \geqslant 0 \text{ et } \forall i \in \{1, \ldots, n\}\,, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1, \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}\,, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

a) Montrer que C est une partie convexe de E, stable pour le produit des matrices.

b) Soit A une matrice élément de C, de coefficients $(a_{i,j})$. Montrer que s'il existe un couple d'indices (i, j) tel que $0 < a_{i,j} < 1$, A n'est pas un point extrémal de C.

c) En déduire l'ensemble des points extrémaux de C.

d) Soit A une matrice élément de C, inversible, et dont l'inverse appartient à C. Montrer que A est un point extrémal de C.

e) Réciproquement, montrer que tout élément extrémal de C est une matrice inversible, dont l'inverse appartient à C. En déduire l'ensemble des matrices inversibles de C dont l'inverse est dans C.

Partie III :

Dans cette partie, E est un espace euclidien de dimension finie n, tel que $n \geqslant 2$. Le produit scalaire pourra être noté $(\ |\ )$.
C étant une partie convexe, fermée, non vide de E, u étant un vecteur de E, on définit la distance de u à C, notée $d(u, C)$, par : $d(u, C) = \inf_{x \in C} \|u - x\|$.
On pourra noter d cette distance pour abréger.
Dans les questions 1°, 2°, 3°, u désignera un vecteur fixé. La partie C convexe, fermée, non vide de E est, sauf indication contraire, fixée dans toute cette partie.

1°) Soient x et y deux éléments de E. Montrer que :

$$\|x - y\|^2 = 2\,\|x - u\|^2 + 2\,\|y - u\|^2 - 4\,\|(x + y)/2 - u\|^2 . \tag{1}$$

2°) Montrer que, pour tout couple (x, y) d'éléments de C,
$$\|x - y\|^2 \leqslant 2\,\|x - u\|^2 + 2\,\|y - u\|^2 - 4d^2 \text{ où } d = d(u, C).$$

3°) a) Montrer qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de C telle que :
$$\|x_n - u\| \xrightarrow{n \to +\infty} d = d(u, C).$$

b) Montrer que la suite (x_n) est une suite de Cauchy.

c) Montrer qu'il existe un unique vecteur x de C tel que : $\|x - u\| = d(u, C)$.

On vient d'établir que, si u est un vecteur de E, il existe x unique dans C tel que : $\|x - u\| = d(u, C)$.
On pose $x = proj_C(u)$, et on appelle projection sur C l'application qui à u associe x. Cette définition est valable pour toute la suite.

4°) Dans cette question, u n'appartient pas à C, et on pose $x = proj_C(u)$.
Soit y un élément de C. En remarquant que :
$\forall t \in [0, 1]\,, \|x - u\| \leqslant \|(1 - t)x + ty - u\|$, montrer que :

$$(y - x | x - u) \geqslant 0. \tag{2}$$

Réciproquement, montrer que si x est un élément de C, tel que
$\forall y \in C, (y - x | x - u) \geqslant 0$, alors : $x = proj_C(u)$.

5 $^\circ$) Dans cette question, C est un sous-espace vectoriel de E.

a) Vérifier que C est convexe et fermé.

b) Montrer que la projection sur C définie en III.3 $^\circ$) est la projection orthogonale sur C.

6 $^\circ$) C désigne toujours une partie convexe, fermée, non vide de E, et u est un élément de la frontière de C. On appelle (u_n) une suite de vecteurs n'appartenant pas à C, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|u - u_n\| < \frac{1}{n}.$$

a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe un vecteur x_n de C, et un vecteur unitaire v_n tels que :

$$\forall y \in C, (y - x_n | v_n) \geqslant 0.$$

b) Montrer que, de la suite (v_n), on peut extraire une sous-suite convergente $(v_{\varphi(n)})$, dont on appellera la limite v.

c) En déduire qu'il existe un vecteur unitaire v de E tel que : $\forall y \in C, (y - u|v) \geqslant 0$.

FIN DE L'ÉNONCÉ

Deuxième composition de mathématiques – EIVP 1991

PARTIE I

I.1) On montre par récurrence sur n dans $[\![2, +\infty]\!]$ que C est stable par barycentration à coefficients strictement positifs pour n points. Pour $n = 2$ cela résulte de la définition. L'hérédité résulte de l'associativité du barycentre puisqu'un barycentre à coefficients strictement positifs de $n+1$ points est barycentre à coefficients strictement positifs d'un des $n+1$ points et d'un barycentre à coefficients strictement positifs des n autres.

Le cas des coefficients positifs en résulte également puisqu'un barycentre à coefficients positifs est aussi un barycentre à coefficients strictement positifs. Donc

$\boxed{C \text{ est stable par barycentration à coefficients positifs.}}$

I.2)

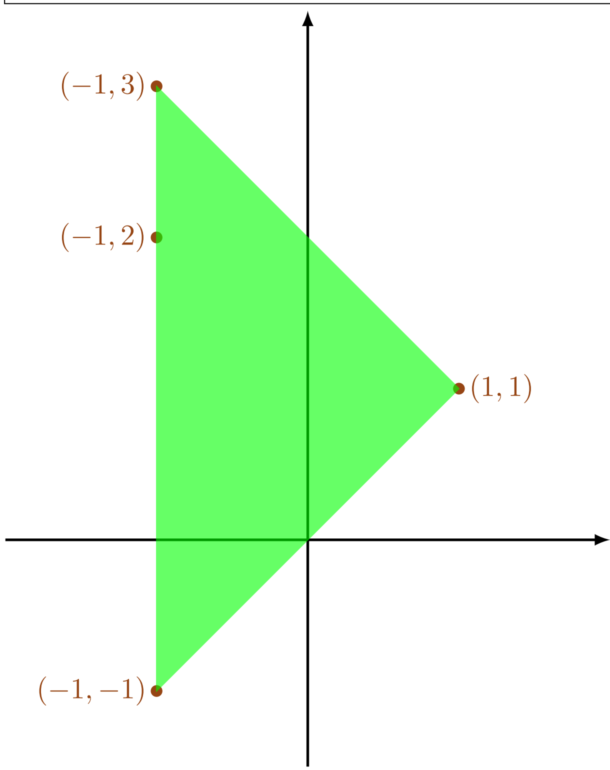
a) Par définition C_0 est formé des barycentres à coefficients positifs d'éléments de $(u_1, \ldots, u_n)$. Par associativité du barycentre, tout barycentre à coefficients positifs d'éléments de C_0 est donc aussi barycentre à coefficients positifs d'éléments de $(u_1, \ldots, u_n)$, i.e. $\boxed{C_0 \text{ est convexe.}}$

b) Si C est convexe et contient $(u_1, \ldots, u_n)$, il contient C_0 d'après I.1. Comme C_0 est convexe, c'est donc $\boxed{\text{la plus petite partie convexe de } E \text{ contenant } (u_1, \ldots, u_n).}$

I.3)

a) Puisque $(-1, 2) = \dfrac{3}{4}(-1, 3) + \dfrac{1}{4}(-1, -1)$, le plus petit convexe contenant $(-1, -1)$, $(-1, 3)$ et $(1, 1)$ contient aussi $(-1, 2)$. De plus comme ils ne sont pas alignés, l'enveloppe convexe de $(-1, -1)$, $(-1, 3)$ et $(1, 1)$ est le triangle dont ils sont les sommets et donc l'enveloppe convexe des quatre points $(-1, 2)$, $(-1, -1)$, $(-1, 3)$ et $(1, 1)$ est

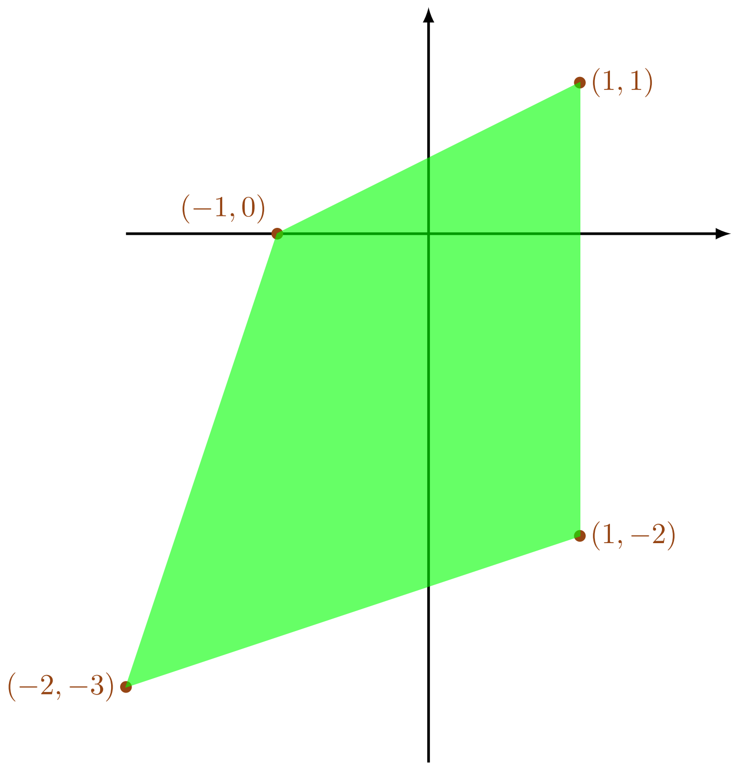
$\boxed{\text{le triangle de sommets } (-1, -1), (-1, 3) \text{ et } (1, 1).}$



b) Aucun des quatre points considérés n'est barycentre des trois autres. En effet le demi-plan d'équation $x+y \geq -1$ est convexe et ne contient pas $(-2,-3)$, mais contient les trois autres et donc d'après I.2.b) l'enveloppe convexe de ces trois points ne contient pas $(-2,-3)$. Le même raisonnement avec $x+y \leq -1$ montre que $(1,1)$ n'est pas barycentre des trois autres. Enfin en considérant les demi-plans d'équations $4x-3y \geq 1$ et $4x-3y \leq 1$, on conclut que $(-1,0)$ et $(1,-2)$ ne sont pas non plus barycentres des trois autres.

Comme les droites d'équations $x+y+1=0$ et $4x-3y=1$ se coupent en $\left(-\dfrac{2}{7},-\dfrac{5}{7}\right)$ et que l'abscisse de ce point est comprise entre 1 et -2 d'une part, et entre -1 et 1 d'autre part, les segments joignant $(1,1)$ et $(-2,-3)$ d'une part et $(-1,0)$ et $(1,-2)$ d'autre part se coupent en $\left(-\dfrac{2}{7},-\dfrac{5}{7}\right)$, Par conséquent le quadrilatère de sommets $(1,1)$, $(-1,0)$, $(-2,-3)$ et $(1,-2)$, dans cet ordre est convexe et donc l'enveloppe convexe des quatres points $(-2,-3)$, $(1,1)$, $(-1,0)$ et $(1,-2)$ est

$\boxed{\text{le quadrilatère de sommets } (1,1),\ (-1,0),\ (-2,-3) \text{ et } (1,-2), \text{ dans cet ordre.}}$



I.4) Soit I un ensemble fini et $(x_i,\alpha_i)_{i\in I}$ dans $(E\times\mathbf{R}_+)^I$ avec $\sum_{i\in I}\alpha_i = 1$. Par linéarité du produit scalaire, si x est un barycentre de $(x_i,\alpha_i)_{i\in I}$, alors $\langle a \mid x\rangle$ est barycentre de $(\langle a \mid x_i\rangle,\alpha_i)$ et donc par convexité des intervalles $\{c\}$, $[c;+\infty[$ et $]-\infty;c]$, $\boxed{F,\ G \text{ et } H \text{ sont convexes.}}$

I.5)

a) Soit x et y dans $\overline{C}$ et t dans $[0;1]$. On dispose de deux suites (x_n) et (y_n) à valeurs dans C et convergeant respectivement vers x et y. Par convexité de C la suite $((1-t)x_n+ty_n)$

est à valeurs dans C et, par linéarité de la limite, converge vers $(1-t)x+ty$. Il en résulte $(1-t)x+ty \in \overline{C}$ et donc $\boxed{\overline{C} \text{ est convexe.}}$

b) Soit x et y dans $\mathring{C}$ et t dans $[0;1]$. On dispose de deux boules ouvertes $B(x,r)$ et $B'(y,r')$ incluses dans C. Soit $s=\min(r,r')$ et $b=(1-t)x+ty$, pour z dans $B(b,s)$, on a

$$z=(1-t)x+ty+z-b=(1-t)(x+z-b)+t(y+z-b)$$

avec $x+z-b \in B(x,r)$ et $y+z-b \in B(y,r')$ puisque $\|z-b\| \leq s=\min(r,r')$. Par conséquent $x+z-b$ et $y+z-b$ appartiennent à C et, par convexité de C, z aussi. Il en résulte $B(b,s) \subset C$ et $b \in \mathring{C}$. Donc $\boxed{\mathring{C} \text{ est convexe.}}$

PARTIE II

II.1) Si $u=v$, $[u;v]=\{u\}$ et cet ensemble étant réduit à un point, ce point y est extrémal. On suppose maintenant $u \neq v$. Par définition tout point de $]u;v[$ est barycentre à coefficients strictement positifs de u et v et donc n'est pas extrémal dans $[u;v]$. Pour t dans $[0;1]$, on a $u=(1-t)u+tv \Leftrightarrow t(u-v)=0 \Leftrightarrow t=0$ et $v=(1-t)u+tv \Leftrightarrow (1-t)(u-v)=0 \Leftrightarrow t=1$ et donc les points extrémaux de $[u;v]$ sont $\boxed{u \text{ et } v.}$

II.2)

a) Soit x et y dans C et t dans $[0;1]$. Par inégalité triangulaire et positivité de t et $1-t$, il vient, en prenant comme norme la norme euclidienne sur le plan,

$$\|(1-t)x+ty\| \leq (1-t)\|x\|+t\|y\| \leq (1-t)+t=1$$

et donc $\boxed{C \text{ est convexe.}}$

b) Avec les mêmes notations, si $\|x\|<1$, on dispose de u de norme 1 tel que $x=\|x\|\,u$ et, en posant $t=\dfrac{1-\|x\|}{2}$, on a $0<t\leq\dfrac{1}{2}<1$ et

$$x=(1-t)u+t(-u)$$

et comme u et $-u$ sont de norme 1, donc appartiennent à C, et $0<t<1$, x n'est pas extrémal.

Soit maintenant u dans C de norme 1. Soit x et y dans C et t dans $]0;1[$. Par inégalité triangulaire et positivité de t et $1-t$, il vient

$$\|(1-t)x+ty\| \leq (1-t)\|x\|+t\|y\| \leq (1-t)+t=\|u\|$$

avec égalité si et seulement si $(1-t)x$ et ty sont colinéaires de même sens et donc, par non nullité de t et $1-t$, s'il en va de même pour x et y, et si x et y sont de norme 1. Il en résulte que u est extrémal, i.e.

$\boxed{\text{les points extrémaux de } C \text{ sont les points du cercle d'équation } x^2+y^2=1.}$

II.3) Soit x dans C. Par indépendance de $(u_1 - u_0, \dots, u_n - u_0)$, x s'écrit de façon unique sous la forme $u_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(u_i - u_0)$ avec $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in [0;1]^n$ de somme inférieure à 1. Soit alors j tel que α_j soit dans $]0;1[$. On pose $x_t = x + t(u_j - u_0)$ pour t dans $\mathbf{R}$. Alors x_t appartient à C si $-\alpha_j \leq t \leq 1 - \alpha_j$ et l'écriture

$$x = (1 - \alpha_j)x_{-\alpha_j} + \alpha_j x_{1-\alpha_j}$$

montre que x n'est pas extrémal. Il en résulte que si un tel j existe, x n'est pas extrémal, i.e. si x est distinct de u_0, u_1, …, u_n, x n'est pas extrémal.

Réciproquement si x et y sont dans C et t dans $]0;1[$ et si $(1-t)x + ty = u_i$ pour un certain i dans $[\![0,n]\!]$, on dispose de $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in [0;1]^n$ et $(\beta_i)_{1 \leq i \leq n} \in [0;1]^n$ de sommes inférieures à 1 tels que $x = u_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(u_i - u_0)$ et $y = u_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_i(u_i - u_0)$ et donc, par indépendance de $(u_1 - u_0, \dots, u_n - u_0)$, pour tout j dans $[\![1,n]\!]$ et distinct de i, on a $(1-t)\alpha_j + t\beta_j = 0$. Par extrémalité de 0 dans $[0;1]$, d'après II.1, il en résulte $\alpha_j = \beta_j = 0$. Si $i = 0$ on en déduit $x = y = u_0$ et sinon on en déduit aussi $(1-t)\alpha_i + t\beta_i = 1$. Par extrémalité de 1 dans $[0;1]$, il vient $\alpha_i = \beta_i = 1$ et donc $x = y = u_i$. Par conséquent u_i est extrémal dans C et $\boxed{\text{les points extrémaux de } C \text{ sont } u_0, \dots, u_n.}$

II.4)

a) Puisque $\mathbf{R}_+$ est convexe, il en va de même $(\mathbf{R}_+)^{n^2}$ et donc de l'ensemble des matrices réelles à coefficients positifs. De plus un hyperplan (affine) est convexe d'après I.4. Et donc, en tant qu'intersection de convexes, $\boxed{C \text{ est convexe.}}$

D'après les formules pour le produit matriciel, l'ensemble des matrices réelles à coefficients positifs est stable par produit puisque $\mathbf{R}_+$ l'est par addition et multiplication. De plus en notant u le vecteur somme des éléments de la base canonique de $\mathbf{R}^n$, une matrice A à coefficients réels positifs est dans C si et seulement si $Au = u$ et ${}^t uA = {}^t u$. Par conséquent si A et B sont dans C, il vient $ABu = Au = u$ et ${}^t uAB = {}^t uB = {}^t u$ et donc $AB \in C$. Il en résulte que $\boxed{C \text{ est stable par produit.}}$

b) Soit (i_0, j_0) un couple d'indice tel que $0 < a_{i_0,j_0} < 1$. Puisque $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} = 1$, on dispose de j_1 distinct de j_0 tel que $0 < a_{i_0,j_1} < 1$. De même, puisque $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j_1} = 1$, on dispose de i_1 distinct de i_0 tel que $0 < a_{i_1,j_1} < 1$. Plus généralement on construit par récurrence une suite (i_n, j_n) telle que, pour tout n dans $\mathbf{N}$, $0 < a_{i_n,j_n} < 1$ et $0 < a_{i_n,j_{n+1}} < 1$ et on pose $I_n = \{\, i_k \mid k \in [\![0,n]\!] \}$ et $J_n = \{\, j_k \mid k \in [\![0,n]\!] \}$. On impose de plus : si $i_n \in I_{n-1}$ alors $j_{n+1} = j_{k+1}$ si $i_n = i_k$ avec $k < n$, et si $j_{n+1} \in J_n$ alors $i_{n+1} = i_k$ si $j_{n+1} = j_k$. Dans ces deux cas, on arrête la construction par récurrence et on élimine les termes précédant (i_k, j_{k+1}) dans le premier cas, ou précédant (i_k, j_k) dans le second cas. Par finitude de l'ensemble des indices, on est assuré de l'arrêt de la construction et on obtient ainsi une suite de cardinal pair où chaque ligne apparaît 0 ou deux fois, de façon successive dans la suite des indices, et de même pour chaque colonne.

Soit $\varepsilon = \min\left(a_{i_n,j_n}, a_{i_n,j_{n+1}}, \ldots, a_{i_{m-1},j_m}, 1 - a_{i_n,j_n}, 1 - a_{i_n,j_{n+1}}, \ldots, 1 - a_{i_{m-1},j_m}\right)$. On a $0 < \varepsilon < 1$ puisqu'il s'agit d'un minimum sur des éléments de $]0;1[$. Soit X la matrice dont les coefficients d'indice (i,j) sont nuls sauf ceux d'indices (i_n, j_n), (i_{n+1}, j_{n+1}), …, (i_{m-1}, j_{m-1}) qui valent 1 et ceux d'indices (i_n, j_{n+1}), (i_{n+1}, j_{n+2}), …, (i_{m-1}, j_m) qui valent -1. Par construction $A + \varepsilon X$ et $A - \varepsilon X$ appartiennent à C puisque la somme des coefficients de X sur toute ligne ou tout colonne est nulle : il y a un nombre pair de coefficients et tout 1 sur une ligne est suivi d'un -1, et tout -1 sur une colonne est suivi d'un 1. Comme A est le milieu de ces deux matrices, $\boxed{A \text{ est n'est pas extrémale.}}$

c) D'après ce qui précède, si A est extrémale dans C ses coefficients sont tous égaux à 0 ou à 1. Par somme, cela impose qu'il y ait exactement un 1 dans chaque ligne et dans chaque colonne, i.e. que A soit une matrice de permutation. Réciproquement si A est une matrice de permutation, tous ses coefficients sont extrémaux dans $[0;1]$ et donc si M et N sont dans C et t dans $]0;1[$ avec $A = (1-t)M + tN$, alors, pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!]^2$ $a_{i,j} = m_{i,j} = n_{i,j}$, i.e. $A = M = N$ et donc A est extrémale. Donc $\boxed{\text{les points extrémaux de } C \text{ sont les matrices de permutation.}}$

d) Soit A dans C, inversible et d'inverse dans C. Soit M et N dans C et dans $[0;1]$ tels que $A = (1-t)M + tN$. Alors $I_n = (1-t)A^{-1}M + tA^{-1}N$. Par stabilité de C par produit et par extrémalité de I_n, d'après II.4.a) et II.4.b), on en déduit $A^{-1}M = A^{-1}N = I_n$ et donc $A = M = N$. Donc $\boxed{A \text{ est extrémale.}}$

e) D'après II.4.c) les éléments extrémaux sont les matrices de permutation et elles sont donc inversibles, d'inverse la matrice de la permutation inverse, qui est donc un élément de C. On en déduit que

$\boxed{\text{les matrices inversibles de } C \text{ dont l'inverse appartient à } C \text{ sont les matrices de permutation.}}$

PARTIE III

Éléments de correction

III.1) C'est l'identité de la médiane pour $x - u$ et $y - u$.

III.2) Cela résulte de $\dfrac{x+y}{2} \in C$ et de ce qui précède.

III.3)

a) Cela résulte de la définition de la borne inférieure.

b) Cela résulte de ce qui précède appliqué à $x = x_n$ et $y = x_{n+p}$, pour N tel que, pour $n \geq N$, $\|x_n - u\| \leq \varepsilon$.

c) Puisque E est de dimension finie, il est complet et donc (x_n) converge. Sa limite est un point tel que $\|x - u\| = d$. L'unicité résulte de III.2 appliqué à x et y tels que $\|x - u\| = \|y - u\| = d$.

III.4) La remarque résulte de la convexité de C et de la définition de la borne inférieure. En élevant au carré, on en déduit que le polynôme en t donné par $t^2 \|x - y\|^2 + 2t\langle y - x \mid x - u\rangle$ est positif sur $[0;1]$. En particulier sa dérivée en 0 est positive, puisqu'il est nul en 0. L'assertion en découle.

Réciproquement le calcul précédent montre qu'on a $\|x-u\| \leq \|y-u\|$, en l'utilisant pour y dans C et $t=1$.

III.5)

a) C est convexe car stable par toute combinaison linéaire. Il est fermé car E est de dimension finie.

b) C'est le théorème de Pythagore.

III.6)

a) On utilise la question III.4 et on prend $x_n = proj_C(u_n)$ et v_n tel que $x_n - u_n = \|x_n - u_n\|\, v_n$.

b) Puisque (v_n) est unitaire, cette suite est bornée et l'assertion résulte du théorème de Bolzano-Weierstrass dans E de dimension finie.

c) Puisque $x_n = proj_C(u_n)$, on a $\|x_n - u_n\| \leq \|u - u_n\| < \dfrac{1}{n}$ et donc (x_n) et (u_n) ont même limite, à savoir u. Par continuité des applications multilinéaire et convergence de $(v_{\varphi(n)})$ et $(x_{\varphi(n)})$, l'assertion découle d'un passage à la limite.