Notations. On note l'ensemble des nombres réels par $\mathbb{R}$, l'ensemble des réels positifs par $\mathbb{R}_+$, l'ensemble des nombres complexes par $\mathbb{C}$, l'ensemble des entiers relatifs par $\mathbb{Z}$, des entiers positifs par $\mathbb{N}$ et des entiers strictement positifs par $\mathbb{N}^*$. Pour toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et tout réel a, on note $f(\cdot + a)$ la fonction g définie pour tout réel t par $g(t) = f(t+a)$. On note $\overline{f}$ la fonction conjuguée de f définie pour tout réel t par $\overline{f}(t) = \overline{f(t)}$.

On désigne par $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et par $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout f de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ on note $||f||$ le nombre $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$. On dit qu'une suite de fonctions $(f_p;\ p \geq 1)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ *converge uniformément* sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f si et seulement si $\lim_{p\to\infty} ||f_p - f|| = 0$. On rappelle que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ muni de la norme $||\cdot||$ est un espace vectoriel normé complet.

On rappelle la définition de l'uniforme continuité: on dit qu'une fonction F de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) dans $\mathbb{C}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) si et seulement si:

$$\forall \epsilon > 0\ ,\ \exists \delta > 0\ ,\quad \forall t, s \in \mathbb{R}\ (\text{resp. } \mathbb{C})\ ,\quad |t-s| \leq \delta \Longrightarrow |F(t) - F(s)| < \epsilon\ .$$

En particulier si f est un élément de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, f est uniformément continue si et seulement si:

$$\lim_{h\to 0} ||f(\cdot + h) - f|| = 0\ .$$

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On dit que le réel r est une période de f si r est non-nul et si pour tout réel t, on a $f(t+r) = f(t)$. On note $\mathcal{A}_r$ l'ensemble des fonctions de $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ admettant r pour période et on note $\mathcal{A}$ la réunion des ensembles $\mathcal{A}_r$, r parcourant l'ensemble des réels non-nuls. $\mathcal{A}$ est l'ensemble des fonctions périodiques de $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. Soit I un intervalle d'extrémités a et b. On définit la longueur de I que l'on note $\ell(I)$ comme le nombre $b - a$. Pour tout intervalle borné non-vide I on définit $d(I) = \sup_{x\in I} |x|$. On admet que:

$$d(I) \geq \frac{1}{2}\ell(I)\ .$$

Soit r un réel non-nul et soit g un élément de $\mathcal{A}_r$. On rappelle que pour tout réel T:

$$\int_{T-r/2}^{T+r/2} g(t)dt = \int_{-r/2}^{r/2} g(t)dt\ .$$

Pour tout réel λ, on désigne par e_λ la fonction de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ définie pour tout réel t par $e_\lambda(t) = \exp(i\lambda t)$. Pour tout réel $r > 0$, tout g de $\mathcal{A}_r$ et tout k de $\mathbb{Z}$, on définit le k-ième coefficient de Fourier de g par:

$$c_k(g) = \frac{1}{r}\int_{-r/2}^{r/2} g(t) e_{\frac{2\pi k}{r}}(-t)dt\ .$$

On rappelle la formule de Parseval:

$$\forall g \in \mathcal{A}_r\ ,\qquad \frac{1}{r}\int_{-r/2}^{r/2} |g(t)|^2 dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(g)|^2 \qquad \text{(i)}$$

Question préliminaire 1 Montrer que la fonction $e_1 + e_{\sqrt{2}}$ n'est pas dans $\mathcal{A}$.

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que E est *bien réparti* si et seulement si il existe un réel $l > 0$ tel que tout intervalle de longueur l contient un élément de E.

Soient f dans $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\epsilon > 0$. On dit qu'un réel r est une *ϵ-quasi période* de f si r est non-nul et si:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t+r) - f(t)| \leq \epsilon \; .$$

On note $E(f, \epsilon)$ l'ensemble des ϵ-quasi périodes de f (il est possible que cet ensemble soit vide). On dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est une *fonction presque périodique* si et seulement si f est un élément de $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $E(f, \epsilon)$ est bien réparti pour tout $\epsilon > 0$. On désigne par $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions presque périodiques.

Question préliminaire 2 Montrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

PARTIE I

1 Soit f dans $\mathcal{B}$. Il existe donc un réel $l > 0$ tel que tout intervalle de longueur l contient un élément de $E(f, 1)$. Montrer que pour tout k dans $\mathbb{Z}$:

$$\sup_{t \in [kl, (k+1)l]} |f(t)| \leq 1 + \sup_{t \in [-l, l]} |f(t)| \; .$$

En déduire que toute fonction presque périodique est dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ·

2-a Montrer que si f est dans $\mathcal{B}$ alors $\overline{f}$, f^2 et $|f|^2$ le sont également.

2-b Soit $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uniformément continue. Montrer que $F \circ f$ est dans $\mathcal{B}$ dès que f l'est.

3 Soit $(f_n;\; n \geq 1)$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ qui convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que pour tout réel a et tout n dans $\mathbb{N}$:

$$||f(\cdot + a) - f|| \leq 2||f_n - f|| + ||f_n(\cdot + a) - f_n|| \; .$$

En déduire que f est dans $\mathcal{B}$.

4 Soit f dans $\mathcal{B}$. Soient h et ϵ deux réels strictement positifs. Soit a dans $E(f, \epsilon)$. Montrer que pour tout réel t on a:

$$|f(t+h) - f(t)| \leq 2\epsilon + |f(t-a+h) - f(t-a)| \; .$$

En déduire que toute fonction presque périodique est uniformément continue.

On dit qu'une fonction f de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est *normale* si et seulement si de toute suite de réels $(a_n;\; n \geq 1)$ on peut extraire une sous-suite $(a_{n_j};\; j \geq 1)$ telle que la suite de fonctions $(f(\cdot + a_{n_j});\; j \geq 1)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions normales. Le but des questions **5** et **6** est de montrer que $\mathcal{B} = \mathcal{N}$.

5 On cherche tout d'abord à montrer que $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}$. On fixe f dans $\mathcal{B}$ et $(a_n;\; n \geq 1)$, une suite réelle.

5-a Soit ϵ un réel strictement positif. Il existe $l > 0$ tel que tout intervalle de longueur l contient un élément de $E(f, \epsilon/3)$. Montrer qu'il existe une suite $(b_n;\ n \geq 1)$ à valeurs dans $[0, l]$ telle que d'une part:

$$a_n - b_n \in E(f, \epsilon/3) ,$$

et d'autre part:

$$\forall m, n \geq 1 , \quad ||f(\cdot + a_n) - f(\cdot + a_m)|| \leq \frac{2\epsilon}{3} + ||f - f(\cdot + b_n - b_m)|| .$$

5-b Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une sous-suite $(a_{n_j};\ j \geq 1)$ (dépendant de ϵ) telle que

$$\forall i, j \geq 1 , \quad ||f(\cdot + a_{n_j}) - f(\cdot + a_{n_i})|| \leq \epsilon .$$

(Indication: penser à extraire de $(b_n;\ n \geq 1)$ une sous-suite convergente et à utiliser l'uniforme continuité de f.)

5-c Montrer par récurrence qu'il existe une famille de suites strictement croissantes d'indices $(n_j^{(p)};\ j \geq 1)$, $p \in \mathbb{N}^*$ telle que:

$$\forall p \geq 1 , \quad \{n_j^{(p+1)};\ j \geq 1\} \subset \{n_j^{(p)};\ j \geq 1\}$$

et

$$\forall p, i, j \geq 1 , \quad ||f(\cdot + a_{n_j^{(p)}}) - f(\cdot + a_{n_i^{(p)}})|| \leq \frac{1}{p} .$$

En déduire que $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}$ (considérer la suite $(a_{n_p^{(p)}};\ p \geq 1)$).

6 On cherche ensuite à montrer que $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}$. Pour cela, on raisonne par l'absurde: supposons qu'il existe f, un élément de $\mathcal{N}$ qui ne soit pas dans $\mathcal{B}$.

6-a Montrer qu'il existe un réel $\epsilon_0 > 0$ et une suite d'intervalles bornés $(I_n;\ n \geq 1)$ tels que $\ell(I_1) \geq 1$ et pour tout $n \geq 1$:
- I_n est inclus dans le complémentaire de $E(f, \epsilon_0)$;
- $\ell(I_{n+1}) > 5\,(d(I_1) + \ldots + d(I_n))$.

(On rappelle que pour tout intervalle borné I, on a posé $d(I) = \sup_{x \in I} |x|$.)

6-b Montrer qu'il existe une suite de réels $(\alpha_n;\ n \geq 1)$ telle que $\alpha_1 \in I_1$ et pour tout $n \geq 1$:
- α_{n+1} est dans I_{n+1} mais pas dans $I_1 \cup \ldots \cup I_n$;
- l'intervalle fermé de longueur $2(d(I_1) + \ldots + d(I_n))$ centré en α_{n+1} est inclus dans I_{n+1} .

6-c Montrer que pour tous i, j entiers distincts plus grands que 1, $\alpha_i \neq \alpha_j$ et

$$\alpha_i - \alpha_j \notin E(f, \epsilon_0) .$$

Conclure.

7-a Montrer que si f et g sont dans $\mathcal{B}$ alors fg et $f + g$ le sont également (utiliser le fait que $\mathcal{N} = \mathcal{B}$).

7-b On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions de la forme $a_1 e_{\lambda_1} + a_2 e_{\lambda_2} + \ldots + a_n e_{\lambda_n}$, pour n variant dans $\mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \ldots a_n$ dans $\mathbb{C}$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$.

8-a Soit $(a_n;\ n \geq 1)$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $\sum_{n\geq 1} |a_n| < \infty$. Montrer que la série de fonctions $g = \sum_{n\geq 1} a_n e_{1/n}$ est bien définie et appartient à $\mathcal{B}$.

8-b Montrer que:

$$\forall n \geq 1\ , \quad \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g(t) e_{1/n}(-t) dt = a_n\ .$$

(Justifier soigneusement la réponse.)

8-c Montrer ensuite que g est périodique si et seulement si la suite $(a_n;\ n \geq 1)$ est nulle à partir d'un certain rang.

Dans les parties II et III, on admet que l'ensemble $\mathcal{C}$ est dense dans $\mathcal{B}$ pour la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire:

$$\forall f \in \mathcal{B},\ \forall \epsilon > 0,\ \exists P \in \mathcal{C}\ :\quad ||f - P|| \leq \epsilon\ . \tag{ii}$$

PARTIE II

Dans cette partie on utilise (ii) pour donner une caractérisation nécessaire des fonctions qui s'obtiennent comme limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de fonctions périodiques continues . Pour tout réel λ, toute fonction f de $\mathcal{B}$ et tout réel $T > 0$, on pose:

$$a(f, \lambda, T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t) e_\lambda(-t) dt\ .$$

1-a Montrer que pour tout P de $\mathcal{C}$ et tout réel λ, $\lim_{T\to\infty} a(P, \lambda, T)$ existe.

1-b Montrer que pour tout réel λ et tout élément f de $\mathcal{B}$, $\lim_{T\to\infty} a(f, \lambda, T)$ existe. On note $a(f, \lambda)$ cette limite et on définit le *spectre de* f, noté $\mathrm{Spec}(f)$, par:

$$\mathrm{Spec}(f) = \{\lambda \in \mathbb{R}\ :\ a(f, \lambda) \neq 0\}\ .$$

1-c Soit P un élément de $\mathcal{C}$. Calculer explicitement $\mathrm{Spec}(P)$ et $a(P, \lambda)$ pour tout réel λ.

1-d Soit $(f_n;\ n \geq 1)$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ qui converge uniformément vers f. Montrer que pour tout réel λ:

$$\lim_{n\to\infty} a(f_n, \lambda) = a(f, \lambda)\ .$$

2 Soit f dans $\mathcal{B}$ et $P_k = \sum_{m=1}^{n_k} a_m^{(k)} e_{\ell_m^{(k)}}$, $k \geq 1$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que $||f - P_k|| \leq 1/k$.

2-a Montrer que si λ n'est pas dans $\{\ell_m^{(k)};\ k \geq 1;\ n_k \geq m \geq 1\}$, alors $a(P_k, \lambda) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2-b Montrer que $\mathrm{Spec}(f)$ est au plus dénombrable.

3-a Soient r un réel non-nul et g un élément de $\mathcal{A}_r$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Q_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(g) e_{2\pi k/r}$. Montrer que pour tout réel λ on a:

$$|a(Q_n, \lambda) - a(g, \lambda)| \leq \left(\sum_{|k|>n} |c_k(g)|^2 \right)^{1/2} .$$

3-b En déduire $\mathrm{Spec}(g)$ (une justification soigneuse est demandée).

4 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle qu'il existe une suite $(f_p;\ p \geq 1)$ d'éléments de $\mathcal{A}$ satisfaisant:

$$\lim_{p \to \infty} ||f - f_p|| = 0 .$$

4-a Montrer que les éléments de $\mathrm{Spec}(f)$ sont tous des multiples rationnels d'un même réel.

4-b On suppose que $\mathrm{Spec}(f)$ contient un élément non-nul. Il existe une suite $(r_p;\ p \geq 1)$ de réels non-nuls telle que $f_p \in \mathcal{A}_{r_p}$, pour tout $p \geq 1$. Montrer qu'il existe un certain rang p_0 tel que les périodes r_p , $p \geq p_0$ sont toutes des multiples rationnels d'un même réel.

4-c Donner un exemple simple de fonction presque périodique qui n'est pas limite uniforme de fonctions périodiques continues.

PARTIE III

Soit f un élément de $\mathcal{B}$. D'après II-2-b, $\mathrm{Spec}(f)$ est au plus dénombrable. Si $\mathrm{Spec}(f)$ est infini, on en fixe une énumération notée $(\lambda_n;\ n \geq 1)$ et on pose:

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} |a(f, \lambda)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a(f, \lambda_n)|^2 ,$$

(cette expression pouvant prendre éventuellement la valeur $+\infty$). Si $\mathrm{Spec}(f)$ est vide, on pose

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} |a(f, \lambda)|^2 = 0 .$$

Si $\mathrm{Spec}(f)$ est fini, la somme $\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} |a(f, \lambda)|^2$ est définie sans ambiguité. Le but de cette partie est de généraliser la formule de Parseval aux fonctions presque périodiques. Plus précisément, on se propose de montrer le résultat suivant:

$$\forall f \in \mathcal{B} , \quad \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} |a(f, \lambda)|^2 . \qquad \text{(iii)}$$

1 Soit $f \in \mathcal{B}$. Justifier l'existence de

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt .$$

Montrer que tout élément de $\mathcal{A}$ satisfait (iii).

2-a Soient $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, n réels distincts. On note $\mathcal{C}_{\tau_1,\ldots,\tau_n}$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{C}$ de $e_{\tau_1}, \ldots, e_{\tau_n}$. Soit $P = \sum_{k=1}^{n} b_k e_{\tau_k}$un élément de $\mathcal{C}_{\tau_1,\ldots,\tau_n}$. Montrer que $a(|f-P|^2, 0)$ est bien défini et que:

$$a(|f-P|^2,0) = a(|f|^2,0) - \sum_{k=1}^{n} |a(f,\tau_k)|^2 + \sum_{k=1}^{n} |b_k - a(f,\tau_k)|^2 .$$

En déduire que $\inf\{a(|f-P|^2,0);\ P \in \mathcal{C}_{\tau_1,\ldots,\tau_n}\}$ est atteint en un unique élément de $\mathcal{C}_{\tau_1,\ldots,\tau_n}$ à préciser.

2-b Montrer que:

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} |a(f,\lambda)|^2 \leq a(|f|^2, 0) .$$

2-c Soit $(P_k;\ k \geq 1)$ la suite d'éléments de $\mathcal{C}$ considérée à la question II-2: d'après II-2-a et II-2-b, on sait que Spec(f) est inclus dans $\{\ell_m^{(k)};\ k \geq 1;\ n_k \geq m \geq 1\}$. En déduire que:

$$\forall k \geq 1 \text{ , } \exists S_k \text{ fini } \subset \mathrm{Spec}(f) \ :\ \sum_{\lambda \in S_k} |a(f,\lambda)|^2 \geq a(|f|^2,0) - \frac{1}{k^2} .$$

En déduire l'assertion (iii).

3-a Soit f une fonction presque périodique à valeurs réelles positives. On suppose qu'elle est non-nulle. Il existe alors un réel x_0 et δ un réel strictement positif, tels que:

$$\inf_{y \in]x_0-\delta, x_0+\delta[} f(y) = c > 0 .$$

On introduit un réel l tel que tout intervalle de longueur l contient au moins un élément de $E(f, c/2)$. On peut supposer sans restriction que $l \geq 2\delta$. Montrer que tout intervalle I de longueur supérieure à l contient un intervalle J de longueur δ tel que:

$$\inf_{y \in J} f(y) \geq c/2 .$$

3-b Déduire de la question précédente que $a(f,0) > 0$.

3-c Montrer que:

$$\forall g_1, g_2 \in \mathcal{B} , \qquad (\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ , } a(g_1,\lambda) = a(g_2,\lambda)) \Longrightarrow g_1 = g_2 .$$

3-d Soit f dans $\mathcal{B}$. Soit $(\lambda_n;\ n \geq 1)$ une énumération de Spec(f). On suppose que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a(f,\lambda_n)| < \infty .$$

Prouver que pour tout réel t,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a(f,\lambda_n) e_{\lambda_n}(t) .$$

ÉPREUVE COMMUNE PARIS-LYON-CACHAN – ENS 2002 - MP

Préliminaires

1 Soit r une période de $e_1+e_{\sqrt{2}}$. Par périodicité et puisque l'exponentielle est un morphisme de groupes, il vient $e_1+e_{\sqrt{2}} = e_1(r)e_1 + e_{\sqrt{2}}(r)e_{\sqrt{2}}$ et, comme la famille $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{C}}$ est libre dans $\mathbf{R}^{\mathbf{C}}$, l'unicité de l'écriture des combinaisons linéaires permet de conclure $e_1(r) = e_{\sqrt{2}}(r) = e_1(r\sqrt{2}) = 1$. Comme $\mathrm{Ker}(e_1) = 2\pi\mathbf{Z}$ et, par irrationnalité de $\sqrt{2}$, $\mathbf{Z}\cap\mathbf{Z}\sqrt{2} = \{0\}$, on en déduit $r=0$, ce qui est exclu. Cette contradiction montre que $\boxed{e_1+e_{\sqrt{2}} \text{ n'est pas dans } \mathscr{A}.}$

2 Soit f dans $\mathscr{A}$ et ε dans $\mathbf{R}_+^*$. Par définition f appartient à $C(\mathbf{R},\mathbf{C})$ et on dispose d'une période r de f. Comme toute période est une ε-quasi période, $E(f,\varepsilon)$ contient $r\mathbf{Z}^*$ et donc tout intervalle I de longueur $3|r|$ contient un élément de $E(f,\varepsilon)$ car un tel intervalle contient au moins deux éléments de $r\mathbf{Z}$ et donc en particulier un élément $r\mathbf{Z}$ non nul. D'où $\boxed{\mathscr{A}\subset\mathscr{B}.}$

PARTIE I

1 Soit k dans $\mathbf{Z}$ et x dans $[k\ell,(k+1)\ell]$. Comme ce dernier intervalle est de longueur ℓ, on dispose d'une 1-quasi période r lui appartenant. On a alors, puisque f est continue sur le compact $[-\ell,\ell]$ et y est donc bornée,

$$|f(x)| = |f(x)-f(x-r)+f(x-r)| \leq 1+|f(x-r)| \leq 1+\sup_{[-\ell,\ell]}|f|$$

puisque $|x-r|\leq \ell([k\ell,(k+1)\ell]) = \ell$. Donc, par passage au supremum,
$\boxed{\sup_{[k\ell,(k+1)\ell]}|f| \leq 1+\sup_{[-\ell,\ell]}|f|.}$
Comme cette majoration est indépendante de k et que tout réel appartient à l'un des intervalles $[k\ell,(k+1)\ell]$ pour k dans $\mathbf{Z}$, il vient $\|f\| \leq 1+\sup_{[-\ell,\ell]}|f|$ et, en particulier, $\boxed{f\in C_b(\mathbf{R},\mathbf{C}).}$

2

2-a Soit f dans $C(\mathbf{R},\mathbf{C})$, ε dans $\mathbf{R}_+^*$ et g l'une des applications $z\mapsto\overline{z}$, $z\mapsto z^2$ et $z\mapsto|z|^2$. Comme g est continue sur $\mathbf{C}$, elle est uniformément continue sur tout compact de $\mathbf{C}$, d'après le théorème de Heine, et notamment sur le disque de centre 0 et de rayon $\|f\|$ où f prend ses valeurs. De plus $g\circ f$ est continue sur $\mathbf{R}$.

On dispose donc de η dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que, pour z et z' dans $\mathbf{C}$ de modules inférieurs à $\|f\|$, $|z-z'|\leq\eta \Rightarrow |g(z)-g(z')|\leq\varepsilon$. En particulier pour t et u dans $\mathbf{R}$, si $|f(t)-f(u)|\leq\eta$ alors $|g\circ f(t) - g\circ(f)(u)|\leq\varepsilon$. Il en résulte que, si r est une η-quasi période de f, alors c'est une ε-quasi période de $g\circ f$. Dans ce cas, comme $E(f,\eta)$ est bien réparti, on dispose de ℓ dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que tout intervalle de longueur ℓ contienne un élément de $E(f,\eta)$ et donc aussi de $E(g,\varepsilon)$, qui est donc bien réparti. Donc $g\circ f$ est quasi-périodique, i.e. $\boxed{\overline{f},\ f^2 \text{ et } |f|^2 \text{ sont dans } \mathscr{B}.}$

2-b Soit f dans $C(\mathbf{R},\mathbf{C})$. Le raisonnement précédent s'applique de la même façon puisque si F est uniformément continue sur $\mathbf{C}$, elle l'est sur le disque de centre 0 et de rayon $\|f\|$. Donc $\boxed{F\circ f \text{ est quasi-périodique.}}$

3 Puisque $\mathscr{B}$ est inclus dans $C_b(\mathbf{R},\mathbf{C})$ qui est complet, $f \in C_b(\mathbf{R},\mathbf{C})$. Soit a un réel, $f \mapsto f(\cdot+a)$ est une isométrie de $C_b(\mathbf{R},\mathbf{C})$ puisque la translation par a est une bijection de $\mathbf{R}$ sur lui-même. Pour n dans $\mathbf{N}$ on a donc, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \|f(\cdot+a)-f\| &\leq \|f(\cdot+a)-f_n(\cdot+a)\|+\|f_n(\cdot+a)-f_n\|+\|f_n-f\| \\ &\leq 2\|f-f_n\|+\|f_n(\cdot+a)-f_n\| \ . \end{aligned}$$

Soit ε dans $\mathbf{R}_+^*$. On dispose de n dans $\mathbf{N}$ tel que $\|f-f_n\| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$. Soit alors r une $\dfrac{\varepsilon}{3}$-quasi période de f_n. D'après ce qui précède c'est une ε-quasi période de f et, de plus, $E(f,\varepsilon)$ contient $E(f_n,\varepsilon/3)$ et est donc bien réparti, par le raisonnement conduit à la question 2-a. Il en résulte $\boxed{f \in \mathscr{B}.}$

4 Soit t dans $\mathbf{R}$. Par inégalité triangulaire il vient

$$|f(t+h)-f(t)| \leq |f(t+h)-f(t-a+h)|+|f(t-a+h)-f(t-a)|+|f(t-a)-f(t)|$$

et donc, puisque a est une ε-quasi période de f,

$$\boxed{|f(t+h)-f(t)| \leq 2\varepsilon+|f(t-a+h)-f(t-a)|.}$$

Puisque $E(f,\varepsilon)$ est bien réparti, on dispose de ℓ dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que tout intervalle de longueur ℓ contienne une ε-quasi période de f. Dans ce qui précède on peut donc choisir a dans l'intervalle $[t-\ell,t]$, de sorte que $t-a$ appartient alors à $[0,\ell]$. Comme f est continue, elle est uniformément continue sur $[-\ell,2\ell]$ d'après le théorème de Heine et donc on dispose de η dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que, pour x et y dans $[-\ell,2\ell]$ avec $|x-y| \leq \eta$, on ait $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$. Il en résulte que, pour h vérifiant $|h| \leq \min(\eta,\ell)$, on a $|f(t-a+h)-f(t-a)| \leq \varepsilon$ et donc $|f(t+h)-f(t)| \leq 3\varepsilon$. Comme ℓ ne dépend que de ε et η ne dépend que de ℓ, ce qui précède montre que $\boxed{f \text{ est uniformément continue.}}$

5

5-a Soit n dans $\mathbf{N}^*$. Puisque $[a_n-\ell,a_n]$ est de longueur ℓ, on dispose d'une $\dfrac{\varepsilon}{3}$-quasi période r de f dans cet intervalle. En posant $b_n=a_n-r$, on a $0 \leq b_n \leq \ell$ et $\boxed{a_n-b_n \in E(f,\varepsilon/3).}$ De plus, pour m et n dans $\mathbf{N}^*$, puisqu'on a affaire à des fonctions dans $\mathscr{B}$, donc dans $C_n(\mathbf{R},\mathbf{C})$, on a par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \|f(\cdot+a_n)-f(\cdot+a_m)\| &\leq \|f(\cdot+a_n)-f(\cdot+b_n)\|+\|f(\cdot+b_n)-f(\cdot+b_m)\| \\ &\quad +\|f(\cdot+b_m)-f(\cdot+a_m)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3}+\|f(\cdot+b_n-b_m)-f\|+\frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

puisque $f(\cdot+b_n+a_n-b_n)=f(\cdot+a_n)$, $f(\cdot+b_m+a_m-b_m)=f(\cdot+a_m)$ et que la translation par $-b_m$ est une isométrie. Il en résulte

$$\boxed{\|f(\cdot+a_n)-f(\cdot+a_m)\| \leq \frac{2\varepsilon}{3}+\|f(\cdot+b_n-b_m)-f\|.}$$

5-b Soit ε dans $\mathbf{R}_+^*$. Comme f est uniformément continue, d'après I.4 et puisqu'elle appartient à $\mathscr{B}$, on dispose de η dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que

$$\forall h \in [-\eta,\eta]\,, \quad \|f(\cdot+h)-f\| \leq \frac{\varepsilon}{3}\ .$$

Par compacité de $[0,\ell]$ et le théorème de Bolzano-Weierstrass, on dispose d'une sous-suite de (b_n) qui est convergente dans $[0,\ell]$, disons vers b, et donc aussi d'une sous-suite de (b_n) à valeurs dans $[b-\eta/2, b+\eta/2]$.
Soit $(b_{n_j})_{j\geq 1}$ une telle sous-suite. En particulier, puisque l'intervalle précédent est de diamètre η, pour tous i et j dans $\mathbf{N}^*$, on a $\left|b_{n_i}-b_{n_j}\right| \leq \eta$ et donc, d'après la question précédente, $\boxed{\left\|f(\cdot+a_{n_i})-f(\cdot+a_{n_j})\right\| \leq \varepsilon.}$

5-c On construit une suite $(n_j^{(1)})_{j\geq 1}$ à l'aide de la question précédente appliquée à $\varepsilon = 1$. On suppose alors construites des suites $(n_j^{(k)})_{j\geq 1}$ pour $1 \leq k \leq p$ pour un certain p dans $\mathbf{N}^*$ vérifiant que la suite $(n_j^{(k+1)})_{j\geq 1}$ est extraite de $(n_j^{(k)})_{j\geq 1}$, si $k < p$, et $\left\|f(\cdot+a_{n_i^{(k)}})-f(\cdot+a_{n_j^{(k)}})\right\| \leq \dfrac{1}{k}$ pour tous i et j dans $\mathbf{N}^*$. En appliquant la question précédente à la suite $(a_{n_j^{(p)}})_{j\geq 1}$ pour $\varepsilon = \dfrac{1}{p+1}$, on obtient une suite $(n_j^{(p+1)})_{j\geq 1}$ extraite de $(n_j^{(p)})_{j\geq 1}$ et telle que $\left\|f(\cdot+a_{n_i^{(p+1)}})-f(\cdot+a_{n_j^{(p+1)}})\right\| \leq \dfrac{1}{p+1}$ pour tous i et j dans $\mathbf{N}^*$.
Le principe de récurrence permet donc de conclure à l'existence d'une
$\boxed{\text{famille de suites ayant les propriétés désirées.}}$
Alors, pour p et q dans $\mathbf{N}^*$, $n_p^{(p)}$ et $n_q^{(q)}$ sont deux termes de la suite $(n_i^{(k)})_{i\geq 1}$ pour $k = \min(p,q)$. Il en résulte d'une part que, si $p<q$, alors $n_p^{(p)} < n_q^{(q)}$, i.e. que la suite $(a_{n_p^{(p)}})_{p\geq 1}$ est extraite de (a_n), et d'autre part qu'on a

$$\left\|f(\cdot+a_{n_p^{(p)}})-f(\cdot+a_{n_q^{(q)}})\right\| \leq \frac{1}{\min(p,q)}\ .$$

Par conséquent la suite d'éléments de $C_b(\mathbf{R},\mathbf{C})$ donnée par $(f_{a_{n_p^{(p)}}})_{p\geq 1}$ est de Cauchy et donc, puisque cet espace est complet, est convergente pour la norme uniforme. Il en résulte que f est normale et donc $\boxed{\mathscr{B} \subset \mathscr{N}.}$

6

6-a Puisque f n'est pas presque périodique, on dispose de ε_0 dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que, pour tout ℓ dans $\mathbf{R}_+^*$, il existe un intervalle I de longueur ℓ et ne rencontrant pas $E(f,\varepsilon_0)$.
En particulier, pour $\ell = 1$, on dispose de I_1 de longueur 1 inclus dans le complémentaire de $E(f,\varepsilon_0)$. Supposons maintenant que, pour n dans $\mathbf{N}^*$, on dispose de $(I_k)_{1\leq k\leq n}$ des intervalles ne rencontrant pas $E(f,\varepsilon_0)$ et vérifiant $\ell(I_{k+1}) > 5\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\ell(I_j)\right)$ pour $1 \leq k < n$. Alors, en appliquant la propriété précédente pour $\ell = 5\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\ell(I_j)\right)+1$, on dispose de I_{n+1}, intervalle borné ne rencontrant pas $E(f,\varepsilon_0)$ et de longueur

strictement supérieure à $5\sum_{j=1}^{n}\ell(I_j)$. Le principe de récurrence permet de conclure que $\boxed{\text{de tels } \varepsilon_0 \text{ et } (I_n)_{n\geq 1} \text{ existent.}}$

6-b Soit n dans $\mathbf{N}^*$. Si $n=1$, puisque I_1 est de longueur non nulle, il est non vide et on dispose de $\boxed{\alpha_1 \text{ dans } I_1.}$ Dans le cas général, on a, d'après la propriété des intervalles $(I_n)_{n\geq 1}$ et puisque $d(I)\geq \frac{1}{2}\ell(I)$ pour tout intervalle borné I,

$$\begin{aligned} d(I_{n+1}) \geq \frac{1}{2}\ell(I_{n+1}) \geq \frac{5}{2}\sum_{j=1}^{n} d(I_j) \quad &\geq \quad \sum_{j=1}^{n} d(I_j) + \max_{1\leq j\leq n} d(I_j) + \frac{1}{2}d(I_1) \\ &> \quad \sum_{j=1}^{n} d(I_j) + \sup_{x\in I_1\cup\cdots\cup I_n} |x| \end{aligned}$$

puisque $d(I_1)\geq \frac{1}{2}\ell(I_1)\geq \frac{1}{2}>0$. On note $r=\sum_{j=1}^{n} d(I_j)+\sup_{x\in I_1\cup\cdots\cup I_n}|x|$.

Soit alors x dans I_{n+1} tel que $r<|x|\leq d(I_{n+1})$, ce qui est licite par définition d'un supremum et puisque $r<d(I_{n+1})$ d'après ce qui précède. Notons

$$y = x + 2\sum_{j=1}^{n} d(I_j) \quad \text{et} \quad z = x - 2\sum_{j=1}^{n} d(I_j)\ .$$

Si I_{n+1} ne contient pas y, il ne contient aucun réel t qui lui est supérieur car sinon il contiendrait l'intervalle $[x,t]$ par convexité et donc aussi y. De même I_{n+1} ne peut contenir aucun réel inférieur à z s'il ne contient pas z. Par conséquent s'il n'en contient aucun des deux, il est inclus dans $]z,y[$, mais ceci est impossible car alors sa longueur serait inférieure à $|y-z|$, i.e. $4\sum_{j=1}^{n} d(I_j)$. On dispose donc de u dans I_{n+1} avec $u=y$ ou $u=z$, et on pose alors $\alpha_{n+1}=\dfrac{x+u}{2}$, de sorte que, l'intervalle fermé de longueur $\sum_{j=1}^{n} d(I_j)$ centré en α_{n+1} est l'intervalle d'extrémités x et u et est donc inclus dans I_{n+1} par convexité.

Enfin on a, par inégalité triangulaire

$$|\alpha_{n+1}| \geq \left| |x| - \sum_{j=1}^{n} d(I_j) \right| = |x| - \sum_{j=1}^{n} d(I_j) > \sup_{x\in I_1\cup\cdots\cup I_n} |x|$$

et donc α_{n+1} ne saurait appartenir à $I_1\cup\cdots\cup I_n$, i.e.

$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha_{n+1}\in I_{n+1}\setminus\left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) \text{ et l'intervalle fermé centré en } \alpha_{n+1} \text{ de longueur } 2\sum_{j=1}^{n} d(I_j) \\ \text{est inclus dans } I_{n+1}.\end{array}}$$

6-c Soit i et j deux entiers distincts supérieurs à 1. On note $p=\max(i,j)$ et $q=\min(i,j)$. Alors α_q appartient à I_q et donc aussi à $\cup_{j=1}^{p-1} I_j$, contrairement à α_p, de sorte qu'on a $\alpha_i\neq\alpha_j$. De plus $|\alpha_q|\leq d(I_q)$ et donc aussi $|\alpha_q|\leq\sum_{j=1}^{p-1} d(I_j)$, de sorte que $\alpha_p-\alpha_q$

appartient à l'intervalle fermé centré en α_p de longueur $2\sum_{j=1}^{p-1} d(I_j)$, et donc aussi à I_p. En particulier $\alpha_p - \alpha_q$ n'appartient pas à $E(f,\varepsilon_0)$. Comme ce dernier ensemble est stable par passage à l'opposé, il en va de même pour $\alpha_q - \alpha_p$ et donc $\boxed{\alpha_i - \alpha_j \notin E(f,\varepsilon_0).}$

On a donc, pour tous i et j distincts dans $\mathbf{N}^*$, $\|f(\cdot+\alpha_i) - f(\cdot+\alpha_j)\| \geq \varepsilon_0$ et donc on ne peut extraire aucune suite de Cauchy de la suite $(f(\cdot+\alpha_n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ et donc, a fortiori, de sous-suite convergente. Ceci contredit l'appartenance de f à $\mathscr{N}$. On a donc $\mathscr{N} \subset \mathscr{B}$ et, au vu de la question I.5, $\boxed{\mathscr{B} = \mathscr{N}.}$

7

7-a Soit f et g dans $\mathscr{B}$ et donc aussi dans $\mathscr{N}$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite réelle. On dispose d'une sous-suite (b_n) de (a_n) telle que $(f(\cdot+b_n))_{n\geq 1}$ soit convergente puisque $f \in \mathscr{N}$. On dispose également d'une sous-suite (c_n) de (b_n) telle que $(g(\cdot+c_n))_{n\geq 1}$ soit convergente. Comme $(f(\cdot+c_n))_{n\geq 1}$ est extraite de $(f(\cdot+b_n))_{n\geq 1}$, elle est également convergente. On note $f = \lim f(\cdot+c_n)$ et $g = \lim g(\cdot+c_n)$. Alors on a $(f+g)(\cdot+c_n) = f(\cdot+c_n)+g(\cdot+c_n)$ et, par linéarité de la limite, il vient $f+g = \lim(f+g)(\cdot+c_n)$ et on en déduit $f+g \in \mathscr{N}$ et donc $\boxed{f+g \in \mathscr{B}.}$

Puisque $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre, on procède de même pour fg. On a

$$\|(fg) - (fg)(\cdot+c_n)\| \leq \|f - f(\cdot+c_n)\| \times \|g\| + \|g - g(\cdot+c_n)\| \times \|f(\cdot+c_n)\|$$

et donc, puisque les translations sont des isométries de $C_b(\mathbf{R},\mathbf{C})$, le terme de droite est une somme de deux produits d'une suite bornée par une suite convergeant vers 0, donc est une suite tendant vers 0. Il en résulte, par positivité, $fg = \lim(fg)(\cdot+c_n)$ et on en déduit $fg \in \mathscr{N}$ et donc $\boxed{fg \in \mathscr{B}.}$

7-b Puisque les suites constantes sont périodiques, ainsi que les exponentielles e_λ pour λ dans $\mathbf{R}$, leur produit l'est aussi. D'après la question préliminaire 2, on en déduit que ce produit est dans $\mathscr{B}$ et donc, d'après la question précédente, il en va de même pour les éléments de $\mathscr{C}$ par somme : $\boxed{\mathscr{C} \subset \mathscr{B}.}$

8

8-a Pour n dans $\mathbf{N}^*$ on a $\left\|a_n e_{1/n}\right\| = |a_n|$ et donc la série $\sum a_n e_{1/n}$ est normalement convergente, donc uniformément convergente sur $\mathbf{R}$. Il en résulte que sa somme est bien définie et, puisqu'il s'agit d'une limite d'éléments de $\mathscr{C}$, donc de $\mathscr{B}$ d'après ce qui précède, il résulte de I.3 que sa somme appartient à $\mathscr{B}$: $\boxed{g \text{ est bien défini et appartient à } \mathscr{B}.}$

8-b Soit T dans $\mathbf{R}_+^*$ et n dans $\mathbf{N}^*$. Comme la série $\sum_{k\geq 1} a_k e_k \overline{e_{1/n}}$ est normalement convergente, elle est uniformément convergente sur $[-T,T]$. On peut donc échanger le signe somme et le signe intégral et il vient

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e_{1/k}(t)\overline{e_{1/n}(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a_k e_{1/k-1/n}(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g(t)e_{1/n}(-t)\,\mathrm{d}t - a_n = \sum_{k\neq n} a_k \frac{i\sin\left(\dfrac{T}{k} - \dfrac{T}{n}\right)}{\dfrac{T}{k} - \dfrac{T}{n}}\,.$$

Pour k dans $\mathbf{N}^*$ avec $k \neq n$, on note g_k l'application de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{C}$ donnée par

$$g_k(t) = a_k \frac{i \sin\left(\dfrac{t}{k} - \dfrac{t}{n}\right)}{\dfrac{t}{k} - \dfrac{t}{n}} .$$

Puisque, pour x réel, on a $|\sin(x)| \leq |x|$, pour tout k dans $\mathbf{N}^*$ distinct de n, on a $\sup_{\mathbf{R}_+^*} |a_k g_k| \leq |a_k|$ et donc la série $\sum_{k\neq n} g_k$ est normalement convergente sur $\mathbf{R}_+^*$. Il s'ensuit que sa somme est une fonction bien définie sur $\mathbf{R}_+^*$. De plus pour tout k dans $\mathbf{N}^*$ distinct de n, on a $\lim_{+\infty} g_k = 0$ et donc la somme de la série $\sum_{k\neq n} g_k$ admet une limite en $+\infty$ donnée par la somme de la série des limites, par uniforme convergence, i.e.

$$\lim_{T\to+\infty} \sum_{k\neq n} a_k \frac{i \sin\left(\dfrac{T}{k} - \dfrac{T}{n}\right)}{\dfrac{T}{k} - \dfrac{T}{n}} = 0$$

ou encore $\boxed{\lim_{T\to+\infty} \dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{-T}^{T} g(t) e_{1/n}(-t)\, \mathrm{d}t = a_n.}$

8-c Si la suite (a_n) est presque nulle, on dispose de N dans $\mathbf{N}^*$ tel que, pour $n \geq N$, on a $a_n = 0$ et donc g est somme de fonctions toutes $2\pi N!$-périodiques. Par conséquent elle l'est aussi, i.e. $g \in \mathscr{A}$.

Réciproquement si $g \in \mathscr{A}$, on dispose d'une période T de g que l'on peut supposer strictement positive puisque l'ensemble des périodes est stable par passage à l'opposé. Soit alors k dans $\mathbf{N}$ et n dans $\mathbf{N}$ avec $n > T/\pi$. Par relation de Chasles, changement de variable affine bijectif et périodicité, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2kT} \int_{-kT}^{kT} g(t) e_{1/n}(t)\, \mathrm{d}t &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2kT} \int_{-kT+(2j+1)T-T}^{-kT+(2j+1)T+T} g(t) e_{1/n}(-t)\, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2kT} \int_{-T}^{T} g(t) e_{1/n}(kT - (2j+1)T - t)\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g(t) e_{1/n}((k-1)T - t) \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} e_{1/n}(2jT)\, \mathrm{d}t .
\end{aligned}$$

Puisque $0 < \dfrac{2T}{n} < 2\pi$, on a $e_{1/n}(2T) \neq 1$ et donc

$$\left| \sum_{j=0}^{k-1} e_{1/n}(2jT) \right| = \left| \frac{1 - e_{1/n}(2kT)}{1 - e_{1/n}(2T)} \right| \leq \frac{2}{\left|1 - e_{1/n}(2T)\right|}$$

et il résulte de l'inégalité de la moyenne

$$\left| \frac{1}{2kT} \int_{-kT}^{kT} g(t) e_{1/n}(t)\, \mathrm{d}t \right| \leq \frac{2\,\|g\|}{k\left|1 - e_{1/n}(2T)\right|} .$$

D'où
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2kT}\int_{-kT}^{kT} g(t)e_{1/n}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
et donc, par caractérisation séquentielle de la limite, il résulte de la question précédente qu'on a $a_n = 0$. En particulier la suite (a_k) est presque nulle, i.e.

$\boxed{g \text{ est périodique si et seulement si la suite } (a_n) \text{ est nulle à partir d'un certain rang.}}$