Paris-Lyon-Cachan
ENS 2005 – PC
Notations

Les ensembles des entiers naturels et des nombres réels sont notés respectivement $\mathbf{N}$ et $\mathbf{R}$. La norme et le produit scalaire de l'espace euclidien usuel $\mathbf{R}^n$ sont notés respectivement $\|\cdot\|$ et $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. Un vecteur $x \in \mathbf{R}^n$ est *unitaire* si $\|x\| = 1$. La sphère unité de $\mathbf{R}^n$ est notée S^{n-1}.
Soit E un espace vectoriel réel. Une fonction $f : E \to \mathbf{R}$ est *positivement homogène* s'il existe un nombre $\alpha \in \mathbf{R}$ (le *degré* d'homogénéité de f) tel que, pour tout x de E et tout nombre $\rho \geq 0$ on a $f(\rho x) = \rho^\alpha f(x)$. Par exemple, une norme quelconque est positivement homogène de degré 1.
Dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices $n \times n$ à coefficients réels, la matrice nulle et la matrice identité sont notées 0_n et I_n. Un vecteur x de $\mathbf{R}^n$ est identifié à la matrice colonne $n \times 1$ de ses coordonnées. La transposée d'une matrice M est ${}^{\mathrm{t}}M$. En particulier le transposé d'un vecteur colonne est un vecteur ligne $1 \times n$. On note $\mathcal{S}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ formé des matrices *symétriques*, c'est-à-dire telles que $M = {}^{\mathrm{t}}M$. On rappelle que si $M \in \mathcal{S}_n$, alors les valeurs propres de M sont réelles et M est diagonalisable dans une base orthonormée. Dans ce cas, on note $\lambda_1(M), \ldots, \lambda_n(M)$ ses valeurs propres, comptées avec leurs ordres de multiplicité, et rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1(M) \leq \lambda_2(M) \leq \cdots \leq \lambda_n(M) .$$

PARTIE I - Préliminaires

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on définit :

$$|M| = \sup \left\{ \|Mx\| \mid x \in S^{n-1} \right\} .$$

I.1. Montrer que $M \mapsto |M|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

I.2. Soit λ une valeur propre réelle d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer $|\lambda| \leq |M|$.

PARTIE II - Cas des matrices symétriques

On démontre ici certaines des inégalités de Weyl pour les matrices symétriques réelles.

II.1. Montrer que les fonctions λ_j sont positivement homogènes sur $\mathcal{S}_n$. Sont-elles impaires ? Sinon, que peut-on dire de $\lambda_j(-M)$?

II.2. Soit $A \in \mathcal{S}_n$ et j un entier entre 1 et n.

a. Montrer qu'il existe un sous-espace vetoriel X_j de $\mathbf{R}^n$ de dimension j tel que ${}^{\mathrm{t}}xAx \leq \lambda_j(A) \|x\|^2$ pour tout x dans X_j.

b. En déduire qu'il existe un sous-espace vetoriel Z_j de $\mathbf{R}^n$ de dimension j tel que ${}^{\mathrm{t}}zAz \geq \lambda_{n-j+1}(A) \|z\|^2$ pour tout z dans Z_j.

c. Soit X un sous-espace vetoriel de dimension j. En considérant l'intersection de X et de Z_{n+1-j}, montrer le complément suivant à la question (a) : il existe un vecteur non nul $x \in X$ tel que $\lambda_j(A) \|x\|^2 \leq {}^{\mathrm{t}}xAx$. Quel énoncé obtient-on pour $j = 1$?

II.3. On se donne A, B dans $\mathcal{S}_n$.

a. Montrer que pour $1 \leq j \leq n$,

$$\lambda_j(A + B) \geq \lambda_j(A) + \lambda_1(B) .$$

b. En déduire pour $1 \leq k \leq n$,

$$\lambda_k(A+B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(B) .$$

c. Plus généralement, montrer que si $j+1 \geq i+k$, on a :

$$\lambda_j(A+B) \geq \lambda_i(A) + \lambda_k(B) .$$

PARTIE III - Cas général : continuité des valeurs propres

On considère un sous-espace vetoriel E de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ avec la propriété (D) suivante : *toute matrice M de E non nulle est à valeurs propres réelles et simples.* À nouveau, ses valeurs propres $\lambda_1(M)$, ..., $\lambda_n(M)$ sont rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1(M) \leq \lambda_2(M) \leq \cdots \leq \lambda_n(M) .$$

les inégalités étant strictes si $M \neq 0_n$.
Jusqu'à la question 6, on se donne une suite $(A_m)_{m\geq 0}$ dans E qui converge vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On note $(x^{m,1}, \ldots, x^{m,n})$ une base de vecteurs propres unitaires de A_m, le vecteur $x^{m,j}$ étant associé à $\lambda_j(A_m)$.

III.1. Montrer $A \in E$. Par la suite, on note $(x^1, \cdots, x^n)$ une base de vecteurs propres unitaires de A avec $Ax^j = \lambda_j(A)x^j$.

III.2. Montrer qu'il existe une fonction $\Phi : \mathbf{N} \mapsto \mathbf{N}$ strictement croissante pour laquelle les suites $\left(\lambda_j(A_{\Phi(k)})\right)_{k\geq 0}$ et les suites $\left(x^{\Phi(k),j}\right)_{k\geq 0}$ sont convergentes. On note $\alpha_j \in \mathbf{R}$ et $w^j \in \mathbf{R}^n$ les limites correspondantes. Montrer en outre que les vecteurs w_j sont unitaires.

III.3. (suite) Montrer que pour tout j, $Aw^j = \alpha_j w^j$.

III.4. (suite) On suppose $A \neq 0_n$ et $\alpha_j = \alpha_{j+1}$. Soit $(x^{m,j}, y^{m,j})$ une base orthonormée du plan engendré par $x^{m,j}$ et $x^{m,j+1}$.

a. Montrer $w^{j+1} = \pm w^j$.

b. Montrer que, quitte à extraire de nouveau une sous-suite, on peut supposer qu'en outre la suite $\left(y^{\Phi(k),j}\right)_{k\geq 0}$ converge. On note y sa limite. Que peut-on dire de la famille (w^j, y) ?

c. Montrer que $Ay - \alpha_j y$ est colinéaire à w^j.

d. Soit P un plan vectoriel invariant par A contenant w^j. Montrer que la restriction de A à P est diagonalisable.

e. Établir une contradiction avec la construction de (a) et (b). Qu'en concluez-vous ?

III.5. Montrer alors $\alpha_j = \lambda_j(A)$.

III.6. Montrer qu'en fait, c'est toute la suite $(\lambda_j(A_m))_{m\geq 0}$ qui converge vers $\lambda_j(A)$.

III.7. En déduire que les fonctions $A \to \lambda_j(A)$ sont continues sur E.

PARTIE IV - Cas général : deux inégalités de Weyl

Soit E un sous-espace vetoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ avec la propriété (D) ci-dessus. On choisit deux matrices A, B dans E, linéairement indépendantes, et on pose

$$\rho_j(t) = \lambda_j(A + tB) .$$

IV.1. Trouver les limites de $t^{-1}\rho_j(t)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

IV.2. On suppose $\lambda_1(B) > 0$.

a. Soit ρ un nombre réel. Quel est le degré du polynôme $P(x) = \det(\rho I_n - A - XB)$?

b. Montrer que l'équation $\rho_j(t) = \rho$ possède au moins une solution.

c. En déduire que chaque équation $\rho_j(t) = \rho$ possède *exactement une* solution, notée t_j et qu'en particulier chaque ρ_j est une fonction strictement croissante
Indication : compter soigneusement les racines de P.

IV.3. On ne suppose plus rien sur le signe de $\lambda_1(B)$.

a. Montrer que l'application $t \mapsto \lambda_j(A + tB) - t\lambda_1(B)$ est croissante. *Indication :* appliquer ce qui précède à B' et E' bien choisis.

b. En déduire que pour $1 \leq j \leq n$

$$\lambda_j(A + B) \geq \lambda_j(A) + \lambda_1(B)$$

puis pour $1 \leq k \leq n$

$$\lambda_k(A + B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(B);.$$

Paris-Lyon-Cachan – ENS 2005 – PC

PARTIE I - Préliminaires

I.1. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Puisque $\mathbf{R}^n$ est de dimension finie, la norme ainsi que l'application linéaire $x \mapsto Mx$ sont continues. En particulier S^{n-1} est compacte car bornée par définition et fermée en tant qu'image réciproque du fermé $\{1\}$ par la norme, et en vertu du théorème de Heine-Borel. Par conséquent, d'après le théorème de Weierstrass, l'ensemble $\{\,\|Mx\| \mid x \in S^{n-1}\}$ est image continue de compact, donc compact. En particulier il est borné et donc $|M|$ est bien défini.

Puisque l'ensemble $\{\,\|Mx\| \mid x \in S^{n-1}\}$ est inclus dans $\mathbf{R}_+$ son supremum est positif et il n'est nul que si cet ensemble est réduit à $\{0\}$, autrement dit, par axiome de séparation, si $\forall x \in S^{n-1}$, $Mx = 0$. Or si y est dans $\mathbf{R}^n$, on dispose de x unitaire tel que $y = \|y\|\,x$ et il vient $My = \|y\|\,Mx$ et donc, si $|M| = 0$, alors M est l'application nulle, i.e. $M = 0$.

Si λ est un réel et x dans S^{n-1}, on a $\|\lambda Mx\| = |\lambda| \cdot \|Mx\|$ et donc, par positivité de $|\lambda|$ et passage au supremum, il vient $|\lambda M| = |\lambda| \cdot |M|$.

Par ailleurs, pour N dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et x dans S^{n-1}, on a, par inégalité triangulaire,

$$\|(M+N)x\| = \|Mx + Nx\| \leq \|Mx\| + \|Nx\| \leq |M| + |N|$$

et donc, par passage au supremum $|M+N| \leq |M| + |N|$. On en conclut que $\boxed{M \mapsto |M| \text{ est une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).}$

I.2. Sot λ une valeur propre réelle de M et x un vecteur propre unitaire associé. On a $\|Mx\| \leq |M|$ et $Mx = \lambda x$ donc $\|Mx\| = |\lambda| \cdot \|x\| = |\lambda|$ et il vient $\boxed{|\lambda| \leq |M|.}$

PARTIE II - Cas des matrices symétriques

II.1. Soit M dans $\mathcal{S}_n$ et ρ dans $\mathbf{R}$, on a $\mathrm{Sp}(\rho M) = \{\,\rho\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\}$ et donc, si ρ est positif, il vient

$$\lambda_1(\rho M) = \rho\lambda_1(M) \leq \lambda_2(\rho M) = \rho\lambda_2(M) \leq \cdots \leq \lambda_n(\rho M) = \rho\lambda_n(M)$$

et donc $\boxed{\text{les fonctions } \lambda_j \text{ sont positivement homogènes sur } \mathcal{S}_n.}$

Si ρ est négatif, il vient

$$\lambda_1(\rho M) = \rho\lambda_n(M) \leq \lambda_2(\rho M) = \rho\lambda_{n-1}(M) \leq \cdots \leq \lambda_n(\rho M) = \rho\lambda_1(M)$$

et donc $\boxed{\text{les fonctions } \lambda_j \text{ ne sont pas impaires sur } \mathcal{S}_n.}$

Par contre, on a $\boxed{\lambda_j(-M) = -\lambda_{n-j+1}(M).}$

II.2.

a. Puisque A est dans $\mathcal{S}_n$, on dispose d'une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ orthonormée de vecteurs propres de A associée à $\lambda_i(A)$ et $X_j = \mathrm{V}ect\left((e_i)_{1 \leq i \leq j}\right)$. Pour x dans X_j, on dispose de $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq j}$ tel que $x = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i e_i$. On a, puisqu'on a affaire à une base orthonormée, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i^2$.

En notant $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker, par bilinéarité et puisque les valeurs propres sont ordonnées et que les α_i^2 sont positifs, il vient

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{t}}xAx &= \sum_{i=1}^{j}\sum_{k=1}^{j}\alpha_i\alpha_k{}^{\mathrm{t}}e_iAe_k = \sum_{i=1}^{j}\sum_{k=1}^{j}\alpha_i\alpha_k\lambda_k(A)^{\mathrm{t}}e_ie_k = \sum_{i=1}^{j}\sum_{k=1}^{j}\alpha_i\alpha_k\lambda_k(A)\delta_{i,k} \\ &= \sum_{i=1}^{j}\alpha_i^2\lambda_i(A) \leq \lambda_j(A)\sum_{i=1}^{j}\alpha_i^2 \end{aligned}$$

et donc $\boxed{{}^{\mathrm{t}}xAx \leq \lambda_j(A)\,\|x\|^2.}$

b. Soit Z_j le sous-espace associé à la matrice $-A$, qui est également dans $\mathcal{S}_n$, par la question précédente. Pour x dans Z_j, on a

$${}^{\mathrm{t}}x(-A)x \leq \lambda_j(-A)\,\|x\|^2 = -\lambda_{n-j+1}(A)\,\|x\|^2$$

et donc $\boxed{{}^{\mathrm{t}}xAx \geq \lambda_{n-j+1}(A)\,\|x\|^2.}$

c. D'après la formule de Grassmann et puisque $\dim(X + Z_{n-j+1}) \leq n$, on a

$$\dim(X\cap Z_{n-j+1}) = \dim(X) + \dim(Z_{n-j+1}) - \dim(X + Z_{n-j+1}) \geq j + (n-j+1) - n = 1$$

et donc on dispose de x non nul dans $X \cap Z_{n-j+1}$, ce qui assure $\boxed{{}^{\mathrm{t}}xAx \geq \lambda_j(A)\,\|x\|^2.}$

Soit u dans $\mathbf{R}^n$ et X une droite contenant u. D'après ce qui précède, on dispose de x dans X, non nul, vérifiant ${}^{\mathrm{t}}xAx \geq \lambda_j(A)\,\|x\|^2$. Comme X est une droite, x en est une base et on dispose de ρ dans $\mathbf{R}$ tel que $u = \rho x$. Puisque les deux membres de l'inégalité sont pairs et positivement homogènes de degré 2, on en déduit ${}^{\mathrm{t}}uAu \geq \lambda_j(A)\,\|u\|^2$. Autrement dit $\boxed{\forall u \in \mathbf{R}^n,\ {}^{\mathrm{t}}uAu \geq \lambda_j(A)\,\|u\|^2.}$

II.3.

a. Puisque $A + B$ est dans $\mathcal{S}_n$, on dispose d'une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ orthonormée de vecteurs propres de $A+B$ associée à $\lambda_i(A+B)$ et, pour j dans $[\![1,j]\!]$, $X = \mathrm{V}ect\left((e_i)_{1\leq i\leq j}\right)$. D'après la question précédente et puisque A est dans $\mathcal{S}_n$, on dispose de x dans X, non nul, tel que ${}^{\mathrm{t}}xAx \geq \lambda_j(A)\,\|x\|^2$. De plus, puisque B est dans $\mathcal{S}_n$, ${}^{\mathrm{t}}xBx \geq \lambda_1(B)\,\|x\|^2$. Par sommation il vient ${}^{\mathrm{t}}x(A+B)x \geq (\lambda_j(A) + \lambda_1(B))\,\|x\|^2$. Par ailleurs II.2.a permet d'écrire

$$(\lambda_j(A) + \lambda_1(B))\,\|x\|^2 \leq {}^{\mathrm{t}}x(A+B)x \leq \lambda_j(A+B)\,\|x\|^2$$

puisque $A+B$ est dans $\mathcal{S}_n$. Comme x est non nul, sa norme ne l'est pas non plus. Puisqu'elle est strictement positive, par simplification, on obtient $\boxed{\lambda_j(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_j(A+B).}$

b. Puisque $-A$ et $-B$ sont dans $\mathcal{S}_n$, l'inégalité précédente donne, pour j dans $[\![1,n]\!]$ et puisqu'alors $n-j+1$ est aussi dans $[\![1,n]\!]$, $\lambda_{n-j+1}(-A) + \lambda_1(-B) \leq \lambda_{n-j+1}(-A-B)$, soit $-\lambda_j(A) - \lambda_n(B) \leq -\lambda_j(A+B)$ ou encore $\boxed{\lambda_j(A+B) \leq \lambda_j(A) + \lambda_n(B).}$

c. Soit i, j et k dans $[\![1,n]\!]$ tels que $j+1 \geq i+k$. Puisque $A+B$ et B sont dans $\mathcal{S}_n$, d'après II.2.a et II.2.b on dispose de sous-espaces vectoriels X et Z de $\mathbf{R}^n$ de dimensions respectives j et $n-k+1$ tels que pour x dans X et z dans Z, on ait ${}^{\mathrm{t}}x(A+B)x \leq \lambda_j(A+B)\,\|x\|^2$ et ${}^{\mathrm{t}}zBz \geq \lambda_k(B)\,\|z\|^2$.

Or, d'après la formule de Grassmann, on a $\dim(X\cap Z) \geq j+(n-k+1)-n \geq i$ et on dispose donc d'un sous-espace Y de dimension i dans $X\cap Z$. D'après II.2.c et puisque A est dans $\mathcal{S}_n$, on dispose alors de x dans Y tel que ${}^{\mathrm{t}}xAx \geq \lambda_i(A)\,\|x\|^2$.

En sommant, il vient puisque x appartient à Y donc aussi à X et Z,

$$(\lambda_i(A)+\lambda_k(B))\,\|x\|^2 \leq {}^{\mathrm{t}}x(A+B)x \leq \lambda_j(A+B)\,\|x\|^2$$

et donc, puisque $\|x\|$ est strictement positif, $\boxed{\lambda_i(A)+\lambda_k(B) \leq \lambda_j(A+B).}$

PARTIE III - Continuité des valeurs propres

III.1. Puisque E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, il est de dimension finie. Par conséquent il est fermé et donc $\boxed{A \in E.}$

III.2. Puisque (A_n) est convergente, elle est bornée pour la norme $|\cdot|$. On note M un de ses majorants. Il résulte de I.1 que les suites $(\lambda_j(A_m))_{m\in\mathbf{N}}$ sont bornées par M et donc la suite

$$\Big(\Big(\lambda_1(A_m),\ldots,\lambda_n(A_m),x^{m,1},\ldots,x^{m,n}\Big)\Big)_{m\in\mathbf{N}}$$

est à valeurs dans $[-M;M]^n \times (S^{n-1})^n$. Puisque qu'un segment est compact et que S^{n-1} l'est aussi, ainsi qu'on l'a démontré en I.1, la suite précédente prend ses valeurs dans un produit de compacts, donc en fait dans un compact. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass elle admet donc une valeur d'adhérence, i.e. on dispose de Φ strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans lui-même et tel que, pour tout j dans $[\![1,n]\!]$, les suites

$\boxed{(\lambda_j(A_{\Phi(k)}))_{m\in\mathbf{N}} \text{ et } (x^{\Phi(k),j})_{m\in\mathbf{N}} \text{ sont convergentes.}}$

Par compacité, les suites $(x^{\Phi(k),j})_{m\in\mathbf{N}}$ convergent dans S^{n-1} et donc

$\boxed{\text{les vecteurs } w_j \text{ sont unitaires.}}$

III.3. Pour j dans $[\![1,n]\!]$ et k dans $\mathbf{N}$, on a $A_{\Phi(k)}x^{\Phi(k),j} = \lambda_j(A_{\Phi(k)})x^{\Phi(k),j}$. Or l'application $(x,M)\mapsto Mx$ de $\mathbf{R}^n\times\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}^n$ est continue car linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie, de même que l'application $(\lambda,x)\mapsto\lambda x$ de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$. Il en résulte, par passage à la limite en k dans l'égalité précédente, $\boxed{Aw^j = \alpha_j w^j.}$

III.4.

a. Comme A appartient à E, ses sous-espaces propres sont de dimension 1. Par conséquent deux vecteurs unitaires propres pour A sont égaux ou opposés, i.e. $\boxed{w^{j+1} = \pm w^j.}$

b. La suite $(y^{m,j})_{m\in\mathbf{N}}$ étant à valeurs dans la sphère unité, compacte, elle admet une valeur d'adhérence d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. Autrement dit, quitte à extraire de nouveau une sous-suite, on peut supposer qu'elle converge dans S^{n-1}. Les suites correspondantes, extraites des autres suites, sont alors également convergentes. De plus, pour tout

k dans $\mathbf{N}$, on a alors $\langle x^{\Phi(k),j} \mid y^{\Phi(k),j}\rangle = 0$ et, par continuité des applications bilinéaires, il vient par passage à la limite en k, $\langle w^j \mid y\rangle = 0$.

On peut donc supposer que

$\boxed{(y^{\Phi(k),j})_{k\in\mathbf{N}} \text{ converge vers } y \text{ tel que } (w_j, y) \text{ est une famille orthonormée.}}$

c. Soit m dans $\mathbf{N}$. On note P_m le plan engendré par $x^{m,j}$ et $x^{m,j+1}$. La restriction de A_m à P_m est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_j(A_m)$ et $\lambda_{j+1}(A_m)$. Il en résulte que $(A_m - \lambda_{j+1}(A_m)I_n) \circ (A_m - \lambda_j(A_m)I_n)$ est nul sur P et donc en particulier sur $y^{m,j}$. Par continuité de l'application $(x, M) \mapsto Mx$ déjà invoquée en III.3, il en résulte par passage à la limite en k et en prenant $j = \Phi(k)$, $(A-\alpha_j I_n)(Ay-\alpha_j y) = 0$, i.e. $Ay-\alpha_j y$ appartient au noyau de $A - \alpha_j I_n$, donc à la droite engendrée par w^j : $\boxed{Ay - \alpha_j y \text{ est proportionnel à } w_j.}$

d. Puisque A est diagonalisable, sa restriction à tout sous-espace A-stable est diagonalisable. En particulier la restriction de A à P est $\boxed{\text{diagonalisable.}}$

e. Puisque (w_j, y) est une famille orthonormée, elle engendre un plan P. Comme w_j est propre pour A et que Ay est combinaison linéaire de $\alpha_j y$ et w_j, d'après III.4.c, le plan P est stable. D'après ce qui précède la restriction de A à P est diagonalisable. Or, dans la base (w_j, y), elle est triangulaire supérieure avec des α_j sur la diagonale. Il en résulte que $A - \alpha_j I_n$ est nul sur P et donc que α_j n'est pas une valeur propre simple de A, $\boxed{\text{ce qui contredit } A \in E.}$

On en conclut que $\boxed{\text{les } \alpha_j, \text{ pour } 1 \leq j \leq n, \text{ sont tous distincts.}}$

III.5. Puisque A admet $(\alpha_j)_{1\leq j\leq n}$ comme valeurs propres, son spectre est constitué de ces n valeurs propres simples. Pour j dans $[\![1, n]\!]$, par passage à la limite dans l'inégalité $\lambda_j(A_{\Phi(k)}) \leq \lambda_{j+1}(A_{\Phi(k)})$, il vient $\alpha_j \leq \alpha_{j+1}$ et donc aussi $\alpha_j < \alpha_{j+1}$ puisque ces réels sont distincts. Par conséquent $\boxed{\alpha_j = \lambda_j(A).}$

III.6. La suite $((\lambda_1(A_m), \ldots, \lambda_n(A_m)))_{m\in\mathbf{N}}$ est à valeurs dans le compact $[-M; M]^n$ et admet comme unique valeur d'adhérence $(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A))$. D'après la réciproque partielle du théorème de Bolzano-Weierstrass, on en déduit qu'elle converge vers cette unique valeur d'adhérence. Autrement dit, pour j dans $[\![1, n]\!]$, $\boxed{\lim \lambda_j(A_m) = \lambda_j(A).}$

III.7. Il résulte donc de la caractérisation séquentielle de la continuité que, pour j dans $[\![1, n]\!]$, $\boxed{\lambda_j \text{ est continu sur } E.}$

PARTIE IV - Deux inégalités de Weyl

IV.1. Soit j dans $[\![1, n]\!]$. D'après II.1, pour t dans $\mathbf{R}_+^*$, on a $t^{-1}\lambda_j(A+tB) = \lambda_j(t^{-1}A+B)$ et donc, par continuité de λ_j, il vient $\boxed{\lim_{+\infty} t^{-1}\rho_j(t) = \lambda_j(B).}$

D'après II.1, t dans $\mathbf{R}_-^*$, on a $t^{-1}\lambda_j(A+tB) = -\lambda_j(-t^{-1}A-B) = \lambda_{n-j+1}(t^{-1}A+B)$ et donc, par continuité de λ_j, il vient $\boxed{\lim_{-\infty} t^{-1}\rho_j(t) = \lambda_{n-j+1}(B).}$

IV.2.

a. Puisque le spectre de B est inclus dans $[\lambda_1(B); +\infty[$ et que $\lambda_1(B)$ est strictement positif, B est inversible et, par multiplicativité du déterminant, $P = (-1)^n \det(B)\chi_{AB^{-1}-\rho B^{-1}}$.

Puisque $\det(B)$ est non nul, P est du même degré que le polynôme caractéristique de $AB^{-1} - \rho B^{-1}$, à savoir $\boxed{P \text{ est de degré } n.}$

b. Par stricte positivité, on a, d'après IV.1, $\rho_j(t) \sim \lambda_j(B)t$ en plus l'infini et donc $\lim\limits_{+\infty} \rho_j = +\infty$, et $\rho_j(t) \sim \lambda_{n-j+1}(B)t$ en moins l'infini et donc $\lim\limits_{-\infty} \rho_j = -\infty$. Par continuité de λ_j et donc aussi de ρ_j par composition avec une fonction affine, il résulte du théorème de Bolzano (dit des valeurs intermédiaires) que ρ_j prend toutes les valeurs réelles. En particulier l'équation $\boxed{\rho_j(t) = \rho \text{ admet au moins une solution.}}$

c. Soit j dans $[\![1, n-1]\!]$ et t tel que $\rho_{j+1}(t) = \rho$. On a alors $\rho_j(t) < \rho$ puisque les valeurs propres de $A + tB$ sont ordonnées et toutes simples. Il en résulte, puisque $\lim_{+\infty} \rho_j = +\infty$, que $\rho_j = \rho$ admet une solution strictement supérieure à t. On dispose donc, d'après la question précédente, de $(t_j)_{1\leq j\leq n}$ des réels tels que $t_n < t_{n-1} < \cdots < t_1$ et $\rho_j(t_j) = \rho$ pour $1 \leq j \leq n$ et donc aussi $P(t_j) = \chi_{A+t_jB}(\rho) = 0$.

Puisque P est de degré n, ses seules racines sont $(t_j)_{1\leq j\leq n}$, ce qui entraîne que

$\boxed{\text{chaque équation } \rho_j(t) = \rho \text{ admet une unique solution, à savoir } t_j.}$

En conséquence les fonctions ρ_j sont bijectives de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Puisqu'elles sont continues, le théorème de la bijection permet de conclure qu'elles sont strictement monotones. De par les limites en l'infini, on en conclut qu'elles sont $\boxed{\text{strictement croissantes.}}$

IV.3.

a. Remarquons $n \geq 2$ puisque (A, B) est libre et donc $\mathbf{R}I_n$ est en somme directe avec E puisque $\mathbf{R}I_n$ est formé de matrices dont les valeurs propres ne sont pas simples.

On pose $B' = B + uI_n$, avec u réel non nul et strictement supérieur à $-\lambda_1(B)$, et $E' = \mathrm{V}ect\,(A, B')$. Puisque u est non nul, B' n'appartient pas à E et donc (A, B') est libre puisque formé d'un vecteur non nul de E et d'un vecteur n'appartenant pas à E. Les éléments de E' sont combinaisons linéaires d'un élément de E, diagonalisable à valeurs propres simples, et d'une matrice scalaire, ils sont donc tous diagonalisables (comme somme de deux matrices diagonalisables commutant entre elles) à valeurs propres simples (le spectre d'un élément de E' étant celui d'un élément de E translaté par un réel). Il en résulte que E' vérifie la propriété (D) et que (A, B') est libre dans E'.

Pour t dans $\mathbf{R}$, on a $A+tB' = A+tB+tuI_n$ et donc le spectre de $A+tB'$ est celui de $A+tB$ translaté de tu. En particulier, pour j dans $[\![1, n]\!]$, on a $\lambda_j(A + tB') = \lambda_j(A + tB) + tu$ et $\lambda_1(B') = \lambda_1(B) + u > 0$. D'après la question précédente, $t \mapsto \lambda_j(A + tB')$ est strictement croissante, i.e. $t \mapsto \lambda_j(A + tB) + tu$ est strictement croissante.

Par passage à la limite dans les inégalités lorsque u tend vers $-\lambda_1(B)$ par valeurs supérieures (et en restant non nul), on en déduit que $\boxed{t \mapsto \lambda_j(A + tB) - t\lambda_1(B) \text{ est croissante.}}$

b. En appliquant le résultat de la question précédente en 0 et 1, on obtient, pour $1 \leq j \leq n$, $\lambda_j(A + B) - \lambda_1(B) \geq \lambda_j(A)$, i.e. $\boxed{\lambda_j(A + B) \geq \lambda_1(B) + \lambda_j(A).}$

Si A et B sont dans E, il en va de même pour $-A$ et $-B$ puisqu'on a affaire à un espace vectoriel et donc en appliquant ce qui précède, pour $1 \leq j \leq n$, on a $1 \leq n - j + 1 \leq n$ et $\lambda_{n-j+1}(-A - B) - \lambda_1(-B) \geq \lambda_{n-j+1}(-A)$, i.e. $-\lambda_j(A + B) + \lambda_n(B) \geq -\lambda_j(A)$ $\boxed{\lambda_j(A + B) \leq \lambda_n(B) + \lambda_j(A).}$