Deuxième composition de mathématiques
ENS 2009 – MP

Notations

Soit $N \geq 2$. On considère $X = \mathbf{R}^N$ muni du produit scalaire euclidien usuel

$$\langle u \,|\, v \rangle = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i \ .$$

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Si $u \in X$, on note u_i, $1 \leq i \leq N$, les composantes de u. On note $e = (1, \ldots, 1)$ l'élément de X tel que $e_i = 1$ pour tout i.
Dans tout le problème, on considère une matrice A de $\mathscr{M}_N(\mathbf{R})$, de coefficients $A_{i,j}$. On note A^* la matrice transposée de A. On suppose que A n'est pas la matrice nulle.
On rappelle qu'on dit qu'une fonction $F : X \to \mathbf{R}$ est convexe sur X si et seulement si pour tous u et v dans X et t dans $[0; 1]$, on a

$$F((1-t)u + tv) \leq (1-t)F(u) + tF(v) \ .$$

On dit qu'elle est strictement convexe si et seulement si pour tous u et v distincts dans X et t dans $]0; 1[$, on a

$$F((1-t)u + tv) < (1-t)F(u) + tF(v) \ .$$

Si F est différentiable en u, on rappelle que le gradient de F en u est donné par

$$\nabla F(u) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1}(u) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_N}(u) \end{pmatrix} \ .$$

Si F est de classe C^2, on note $\nabla^2 F(u)$ la matrice hessienne de F en u. Il s'agit d'une matrice de $\mathscr{M}_N(\mathbf{R})$ dont le coefficient en position i, j est donné par $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(u)$.

Les différentes fonctions étudiées dans ce problème sont utilisées en traitement d'images pour obtenir une image de bonne qualité u à partir d'une image bruitée f. La régularisation quadratique présente l'avantage d'être très simple et très rapide, mais aussi le défaut de détruire les bords de l'image en donnant une impression de flou. La régularisation à croissance linéaire permet d'obtenir de bien meilleurs résultats de restauration. Malheureusement elle implique aussi de savoir minimiser efficacement des fonctions non différentiables, ce qui augmente considérablement la difficulté du problème.

Partie I - Convexité

On pourra admettre les résultats de cette première partie pour traiter les questions des parties suivantes.

1) Soit $F : X \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $F(u)$ tende vers $+\infty$ lorsque $\|u\|$ tend vers $+\infty$.
   a. Montrer qu'il existe au moins un élément u de X où F atteint son minimum : $F(u) = \min_{v \in X} F(v)$.
   b. L'élément précédent u est-il en général unique ?
2) Soit F une fonction strictement convexe sur X admettant un minimum. Le point où F atteint son minimum est-il unique ?
3) Soit F une fonction différentiable sur X.
   a. Montrer que si F est convexe alors, pour tous u, v dans X,

$$F(v) \geq F(u) + \langle \nabla F(u) \,|\, v - u \rangle \ . \tag{1}$$

b. Réciproquement, montrer que si pour tous u, v dans X, l'inégalité (1) est vérifiée, alors F est convexe. *Indication : on pourra introduire le point $w = u + t(v - u)$ pour t dans $[0; 1]$ et appliquer l'inégalité aux couples (w, u) et (w, v).*

4) Soit F une fonction différentiable sur X. Montrer que F est strictement convexe si et seulement si, pour tous u et v distincts dans X, $F(v) > F(u) + \langle \nabla F(u) \,|\, v - u \rangle$.

5) On suppose F différentiable sur X. On rappelle qu'une condition nécessaire pour que u puisse être un point d'extremum de F est $\nabla F(u) = 0$.

a. La condition nécessaire $\nabla F(u) = 0$ est-elle en général suffisante pour que u soit un point d'extremum de F ?

b. On suppose de plus F convexe sur X. Que dire si $\nabla F(u) = 0$?

6) Soit F une fonction différentiable sur X.

a. Montrer que si F est convexe, alors pour tous u, v dans X, on a

$$\langle \nabla F(u) - \nabla F(v) \,|\, u - v \rangle \geq 0\,. \tag{2}$$

b. Réciproquement, montrer que si pour tous u, v dans X l'inégalité (2) est vérifiée, alors F est convexe. Que dire si pour tous u, v distincts dans X on a $\langle \nabla F(u) - \nabla F(v) \,|\, u - v \rangle > 0$?

7) Soit F une fonction de classe C^2 sur X. Montrer que F est convexe si et seulement si, pour tous u, v dans X, $\left\langle \nabla^2 F(u) v \;\middle|\; v \right\rangle \geq 0$.
Que dire si pour tous u, v dans X avec $v \neq 0$, on a $\left\langle \nabla^2 F(u) v \;\middle|\; v \right\rangle > 0$?

Partie II - Régularisation quadratique

Soit $\lambda \geq 0$ et f dans X. On considère l'application $F_\lambda : X \to \mathbf{R}$ définie par

$$F_\lambda(u) = \|f - u\|^2 + \lambda \|Au\|^2 \,.$$

1) Montrer que F_λ est de classe C^2 sur X. Soit u dans X. Calculer $\nabla F_\lambda(u)$, puis $\nabla^2 F_\lambda(u)$.

2) Montrer que F_λ est convexe sur X. Est-elle strictement convexe ?

3) Montrer qu'il existe exactement un élément u_λ de X où F_λ atteint son minimum. Montrer que u_λ est caractérisé par la relation

$$u_\lambda - f + \lambda A^* A u_\lambda = 0\,.$$

4) a. Que dire de la solution u_λ lorsque λ tend vers 0 ?

b. Que dire de Au_λ lorsque λ tend vers $+\infty$?

5) Pour i dans $\{1, 2\}$, on note pour f_1 et f_2 dans X,

$$F_\lambda^i(u) = \|f_i - u\|^2 + \lambda \|Au\|^2 \,.$$

On note u_λ^i un point où F_λ^i atteint son minimum sur X. Donner une majoration de $\left\|u_\lambda^1 - u_\lambda^2\right\|$ dépendant de $\|f_1 - f_2\|$.

Partie III - Régularisation à croissance linéaire

Soit $\varepsilon > 0$ et f dans X. Pour u dans X on définit $A_\varepsilon(u)$ et $B_\varepsilon(u)$ dans X par

$$\left(A_\varepsilon(u)\right)_i = \sqrt{\varepsilon^2 + (Au)_i^2} \quad \text{et} \quad \left(B_\varepsilon(u)\right)_i = \frac{(Au)_i}{\left(A_\varepsilon(u)\right)_i}\,.$$

Soit $\lambda > 0$. On considère les applications $G : X \to \mathbf{R}$ et $\mathcal{G}_\lambda : X^2 \to \mathbf{R}$ définies par

$$G(u) = \frac{1}{2} \|f - u\|^2 + \langle e \,|\, A_\varepsilon(u) \rangle \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_\lambda(u, v) = G(u) + \frac{\lambda}{2} \|v - u\|^2 \,.$$

1) Montrer que G est différentiable. Soit u dans X. Calculer $\nabla G(u)$.

2) Montrer que G atteint un minimum en un unique point u_ε de X caractérisé par la relation

$$u_\varepsilon - f + A^* B_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0 \ .$$

3) Soit v dans X. Montrer qu'il existe une unique élément u dans X tel que

$$\mathcal{G}_\lambda(u, v) = \min_{w \in X} \mathcal{G}_\lambda(w, v) \,,$$

et qu'on a

$$\lambda(u - v) = -u + f - A^* B_\varepsilon(u) \ .$$

4) On fixe u_0 dans X et on considère la suite (u_n) définie par récurrence par la relation

$$\mathcal{G}_\lambda(u_{n+1}, u_n) = \min_{u \in X} \mathcal{G}_\lambda(u, u_n) \ .$$

Montrer que la série $\sum \|u_n - u_{n+1}\|^2$ est convergente.

5) Montrer que la suite (u_n) est bornée.

6) En déduire que la suite (u_n) converge vers u_ε.

7) Dans le cas $\varepsilon = 0$, G est-elle différentiable sur X ?

Partie IV - Méthode de type quasi-Newton

On rappelle et on complète les notations de la partie précédente. On a $\varepsilon > 0$, f dans X. Pour u dans X, on définit $A_\varepsilon(u)$, $B_\varepsilon(u)$ dans X et $C_\varepsilon(u)$ et $\mathcal{A}_\varepsilon(u)$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ par

$$(A_\varepsilon(u))_i = \sqrt{\varepsilon^2 + (Au)_i^2} \,, \quad (B_\varepsilon(u))_i = \frac{(Au)_i}{(A_\varepsilon(u))_i} \,, \quad (C_\varepsilon(u))_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{(A_\varepsilon(u))_i}$$

et $\mathcal{A}_\varepsilon(u) = I_N + A^* C_\varepsilon(u)$. On considère les applications $G : X \to \mathbf{R}$ et $\mathcal{G} : X^2 \to \mathbf{R}$ définies par

$$G(u) = \frac{1}{2} \|f - u\|^2 + \langle e \,|\, A_\varepsilon(u) \rangle \quad \text{et} \quad \mathcal{G}(u, v) = G(v) + \langle \nabla G(v) \,|\, u - v \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathcal{A}_\varepsilon(v)(u - v) \,|\, u - v \rangle \ .$$

Enfin on note $D_\varepsilon(u)$ la matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont les coefficients diagonaux sont donnés par $(D_\varepsilon(u))_{i,i} = \dfrac{1}{(A_\varepsilon(u))_i}$, de sorte qu'on a $C_\varepsilon(u) = D_\varepsilon(u) A$ et $B_\varepsilon(u) = D_\varepsilon(u) A u = C_\varepsilon(u) u$.

1) Montrer que pour tous u et v dans X on a

$$\langle Av \,|\, C_\varepsilon(u) v \rangle \geq 0 \ .$$

2) Soit u_0 dans X. Montrer que la relation de récurrence suivante définit une unique suite (u_n)

$$\mathcal{G}(u_{n+1}, u_n) = \min_{u \in X} \mathcal{G}(u, u_n) \ .$$

En déduire que la suite (u_n) ainsi définie vérifie

$$u_{n+1} - f + A^* C_\varepsilon(u_n) u_{n+1} = 0 \ .$$

3) Soit u et v dans X. Montrer

$$G(u) \leq \mathcal{G}(u, v) \ .$$

4) Montrer que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge.

5) Montrer que la suite (u_n) converge vers l'unique point u_ε de X où G atteint son minimum.

Partie V - Régularisation non différentiable

Dans cette dernière partie on suppose de plus que la matrice A est symétrique. Si $u \in X$, on définit

$$\|u\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |u_i| \quad \text{et} \quad \|u\|_\infty = \max_{1 \le i \le N} |u_i| \ .$$

On considère les applications $H : X \to \mathbf{R}$ et $L : X^2 \to \mathbf{R}$ définies par

$$H(u) = \frac{1}{2}\|f-u\|^2 + \|Au\|_1 \quad \text{et} \quad L(u,v) = \frac{1}{2}\|f-u\|^2 + \langle v \mid Au \rangle \ .$$

et l'ensemble K défini par

$$K = \{Av \mid v \in X \text{ et } \|v\|_\infty \le 1\} \ .$$

On admet qu'il existe un unique élément w dans K tel que

$$\|f-w\| = d(f,K) = \min\{\|f-z\| \mid z \in K\} \ .$$

On admet aussi qu'alors on a

$$\forall z \in K \qquad \langle f-w \mid z-w \rangle \le 0 \ .$$

1) a. Soit u un élément de X. Exprimer $\sup_{\|v\|_\infty \le 1} L(u,v)$ en fonction de H.

b. Montrer pour tous u, v dans X,

$$L(u,v) = \frac{1}{2}\|f-u-Av\|^2 - \frac{1}{2}\|f-Av\|^2 + \frac{1}{2}\|f\|^2 \ .$$

c. Dans cette question on admet l'égalité

$$\text{(3)} \qquad \sup_{\|v\|_\infty \le 1} \inf_{u \in X} L(u,v) = \inf_{u \in X} \sup_{\|v\|_\infty \le 1} L(u,v) \ .$$

Montrer que H atteint son minimum en u si et seulement si $u = f - w$.

2) Démontrer l'égalité (3)

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – ENS 2009 – MP

Partie I - Convexité

1) a. Puisque $F(v)$ tend vers l'infini quand $\|v\|$ tend vers l'infini, on dispose de R strictement positif tel que, lorsque $\|v\| > R$, on a $F(v) > F(0)$. Puisque F est continue, par compacité des boules fermées en dimension finie (théorème de HEINE-BOREL) et d'après le théorème de WEIERSTRASS, on dispose de u dans $B(0, R)$ tel que $F(u) = \inf_{\|v\|\leq R} F(v)$ et donc

$$F(u) = \inf_{\|v\|\leq R} F(v) \leq F(0) \leq \inf_{\|v\|>R} F(v)$$

et on en déduit $\boxed{F(u) = \min_{v\in X} F(v).}$

b. Soit x dans X non nul. La fonction $v \mapsto \|v\| \|v - x\|$ est continue en tant que produit de telles fonctions, positive, et tend vers l'infini en l'infini puisque, par positivité et inégalité triangulaire on a

$$\left| \|v\| \|v - x\| - \|v\|^2 \right| \leq \|x\| \|v\| = O(\|v\|) \ .$$

Comme cette fonction s'annule en 0 et x, elle atteint son minimum en deux points distincts, i.e. $\boxed{u \text{ n'est pas unique en général.}}$

2) Soit u dans X un point où F atteint son minimum. On a pour v dans X distinct de u et par inégalité de convexité (avec $t = \dfrac{1}{2}$)

$$\frac{1}{2}(F(v) - F(u)) > F\left(\frac{u+v}{2}\right) - F(u) \geq 0$$

et donc $F(v) > F(u)$. Il en résulte qu'alors $\boxed{u \text{ est unique.}}$

3) a. Soit u et v dans X et t dans $[0; 1]$. Par inégalité de convexité on a

$$F(v) \geq F(u) + \frac{F(u + t(v-u)) - F(u)}{t}$$

et donc, par passage à la limite quand t tend vers 0 (à droite) et différentiabilité de F en u (donc en particulier dans la direction $v - u$), il vient $F(v) \geq F(u) + \mathrm{d}F(u) \cdot (v - u)$ ou encore, par définition du gradient, $\boxed{F(v) \geq F(u) + \langle \nabla F(u) \,|\, v - u\rangle.}$

b. Soit u et v dans X, t dans $[0; 1]$ et $w = (1 - t)u + tv$, de sorte qu'on a $w - u = t(v - u)$ et $w - v = -(1 - t)(v - u)$ et donc, par hypothèse sur F appliquée aux couples (w, u) et (w, v), on a

$$F(u) \geq F(w) + t \langle \nabla F(w) \,|\, v - u\rangle \quad \text{et} \quad F(v) \geq F(w) - (1 - t) \langle \nabla F(w) \,|\, v - u\rangle$$

et donc en multipliant ces deux inégalités respectivement par les quantités positives $1 - t$ et t, et en sommant il vient $(1 - t)F(u) + tF(v) \geq F(w)$, i.e. $\boxed{F \text{ est convexe.}}$

4) On suppose que pour tous u et v distincts dans X, on a $F(v) > F(u) + \langle \nabla F(u) \,|\, v - u\rangle$. Soit alors u et v distincts dans X, t dans $]0; 1[$ et $w = (1 - t)u + tv$. Les inégalités obtenues à la question précédente sont alors strictes car w est distinct de u et de v. Comme $1 - t$ et t sont strictement positifs, il vient, avec le calcul précédent, $(1 - t)F(u) + tF(v) > F(w)$, et donc F est strictement convexe.

Réciproquement on suppose que F est strictement convexe. Soit alors u et v distincts dans X et G la fonction donnée par $G(x) = F(x) - F(u) - \langle \nabla F(u) \,|\, x - u\rangle$. Alors G est différentiable et strictement convexe car somme de F avec une fonction affine, donc différentiable et convexe. Par construction on a $G(u) = 0$ et $\nabla G = \nabla F - \nabla F(u)$, et donc $\nabla G(u) = 0$. La question I3a donne alors $G(v) \geq 0$, de sorte que G atteint son minimum en u. Comme G est strictement convexe, elle atteint ce minimum en un unique point, d'après la question I1b, et donc on a en fait $G(v) > 0$, i.e. $F(v) > F(u) + \langle \nabla F(u) \,|\, v - u\rangle$. Autrement dit

$$\boxed{F \text{ est strictement convexe si et seulement si } \forall (u, v) \in X^2,\ u \neq v \Longrightarrow F(v) > F(u) + \langle \nabla F(u) \,|\, v - u\rangle.}$$

5) a. Soit v non nul dans X. La fonction donnée par $u \mapsto \langle u \,|\, v\rangle^3$ est différentiable en tant que composée d'une application linéaire (sur X) et d'une fonction puissance (sur $\mathbf{R}$) et son gradient est donné par $u \mapsto 3\langle u \,|\, v\rangle^2 v$. Il s'annule par exemple en 0. Mais pour t réel on a $\langle tv \,|\, v\rangle^3 = t^3 \|v\|^6$ et donc 0 n'est pas un extremum (local). Donc $\boxed{\text{la condition n'est en général pas suffisante.}}$

b. Par contre si F est convexe sur X, la question I3a montre qu'alors $\boxed{F \text{ atteint son minimum en } u.}$

6) a. Soit F convexe sur X et u, v dans X. D'après I3a appliqué à (u, v) et (v, u) on a

$$-\langle \nabla F(u) \,|\, u - v\rangle = \langle \nabla F(u) \,|\, v - u\rangle \leq F(v) - F(u) \leq -\langle \nabla F(v) \,|\, u - v\rangle$$

et donc, par linéarité du produit scalaire, en retranchant le membre de gauche à l'inégalité, il vient $\boxed{\langle \nabla F(u) - \nabla F(v) \,|\, u - v\rangle \geq 0.}$

b. Soit u et v dans X et g la fonction sur $\mathbf{R}$ donnée par $g(t) = F((1-t)u + tv)$, de sorte que g est dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée donnée par $g'(t) = \langle \nabla F((1-t)u + tv) \,|\, v - u\rangle$ et donc, pour t dans $]0; 1[$, on a, en posant $w = u + t(v - u)$,

$$tg'(t) = \langle \nabla F((1-t)u + tv) \,|\, t(v - u)\rangle = \langle \nabla F(w) \,|\, w - u\rangle \geq \langle \nabla F(u) \,|\, w - u\rangle$$

d'après l'inégalité (2), et donc par positivité stricte de t,

$$g'(t) \geq \frac{1}{t}\langle \nabla F(u) \,|\, w - u\rangle = \langle \nabla F(u) \,|\, v - u\rangle$$

sur $]0; 1[$. Il résulte donc du théorème de LAGRANGE, dit inégalité des accroissements finis, qu'il existe t dans $]0; 1[$ tel qu'on ait

$$F(v) - F(u) = g(1) - g(0) = g'(t) \geq \langle \nabla F(u) \,|\, v - u\rangle$$

et donc, d'après la question I3a, $\boxed{F \text{ est convexe.}}$
Si pour u et v distincts, l'inégalité (2) est stricte alors dans les mêmes conditions le raisonnement précédent donne $g'(t) > \langle \nabla F(u) \,|\, v - u\rangle$ puis $F(v) > F(u) + \langle \nabla F(u) \,|\, v - u\rangle$ et donc, d'après la question I4, $\boxed{F \text{ est strictement convexe.}}$

7) On suppose que F est convexe. Soit alors u et v dans X, t dans $\mathbf{R}^*$ et $w = u + tv$. D'après la question I6a on a $\langle \nabla F(w) - \nabla F(u) \,|\, w - u\rangle \geq 0$ et donc

$$\left\langle \frac{\nabla F(u + tv) - \nabla F(u)}{t} \,\middle|\, v \right\rangle \geq 0\,.$$

En faisant tendre t vers 0, il vient, par différentiabilité de ∇F et continuité de l'application linéaire sur X donnée par le produit scalaire avec v, $\boxed{\langle \nabla^2 F(u)v \mid v\rangle \geq 0.}$
Réciproquement soit u et v dans X et g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$g(t) = \langle \nabla F(u + t(v - u)) - \nabla F(u) \,|\, v - u\rangle\ .$$

Puisque F est de classe C^2 sur X, ∇F est de classe C^1 sur X et donc, par composition avec une application linéaire, g est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$. Il résulte du théorème de LAGRANGE qu'il existe t dans $]0; 1[$ tel qu'on ait, en posant $w = u + t(v - u)$,

$$\langle \nabla F(u) - \nabla F(v) \,|\, u - v\rangle = g(1) - g(0) = g'(t) = \langle \nabla^2 F(w)(v - u) \mid v - u\rangle \geq 0$$

et donc, d'après la question I6b, F est convexe, voire strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte lorsque $v - u \neq 0$. Autrement dit

$$\boxed{\begin{array}{l}F \text{ est convexe si et seulement si, pour tous } u,\ v \text{ dans } X,\ \langle \nabla^2 F(u)v \mid v\rangle \geq 0.\\ \text{Si cette inégalité est stricte pour } v \text{ non nul alors } F \text{ est strictement convexe.}\end{array}}$$

Partie II - Régularisation quadratique

1) Les applications linéaires étant de classe C^∞ (en dimension finie), il en va de même pour la norme au carré (composée de $u \mapsto (u,u)$ et $(u,v) \mapsto \langle u \,|\, v\rangle$) et donc de F_λ par somme et composition. En particulier $\boxed{F_\lambda \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } X.}$
On remarque que pour u et v dans X on a $\langle u \,|\, Av\rangle = u^*Av = (A^*u)^*v = \langle A^*u \,|\, v\rangle$. Par dérivation des fonctions composées, on a, pour u et v dans X,

$$\langle \nabla F_\lambda(u) \,|\, v\rangle = 2\,\langle u - \lambda \,|\, v\rangle + 2\lambda\,\langle Au \,|\, Av\rangle = 2\,\langle u - f + \lambda A^*Au \,|\, v\rangle \ ,$$

soit $\boxed{\nabla F_\lambda(u) = 2(u - f + \lambda A^*Au)}$ et donc $\boxed{\nabla^2 F_\lambda(u) = 2(I_n + \lambda A^*A).}$

2) Pour u et v dans X, on a donc, par positivité de λ,

$$\left\langle \nabla^2 F(u)v \;\middle|\; v\right\rangle = 2\,\|v\|^2 + 2\lambda\,\|Av\|^2 \geq 2\,\|v\|^2$$

et il résulte donc de la question I7 que $\boxed{F_\lambda \text{ est strictement convexe, donc convexe, sur } X.}$

3) D'après ce qui précède, pour u dans X on a $\nabla F_\lambda(u) = 0 \iff u - f + \lambda A^*Au = 0$ et donc, par stricte convexité et d'après les questions I5b et I2,
$\boxed{F_\lambda \text{ atteint son minimum en exactement un point, } u_\lambda, \text{ caractérisé par } u_\lambda - f + \lambda A^*Au_\lambda = 0.}$

4) a. Puisque l'équation $(I_n + \lambda A^*A)u = f$ admet une unique solution, $I_n + \lambda A^*A$ est injective, donc inversible et on a $u_\lambda = (I_n + \lambda A^*A)^{-1}f$. La fonction inverse étant continue en I_n, on a

$$\lim_{\lambda\to 0}(I_n + \lambda A^*A)^{-1} = I_n$$

et donc, par continuité de l'évaluation en f, qui est linéaire, on a $\boxed{\lim_{\lambda\to 0} u_\lambda = f.}$

b. On a $\lambda\,\|Au_\lambda\|^2 \leq F_\lambda(u_\lambda) \leq F_\lambda(0) = \|f\|^2$ et donc $\|Au_\lambda\| = O\left(\lambda^{-1/2}\right)$. D'où $\boxed{\lim_{\lambda\to +\infty} Au_\lambda = 0.}$

5) En appliquant ce qui précède à $f = 0$, il vient $F_\lambda(u) = \langle (I_n + \lambda A^*A)u \,|\, u\rangle$ et donc, par linéarité de $I_n + \lambda A^*A$ et en utilisant la question II3,

$$\left\|u_\lambda^1 - u_\lambda^2\right\|^2 \leq F_\lambda(u_\lambda^1 - u_\lambda^2) = \left\langle f_1 - f_2 \;\middle|\; u_\lambda^1 - u_\lambda^2\right\rangle \leq \|f_1 - f_2\|\,\left\|u_\lambda^1 - u_\lambda^2\right\|$$

par inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. Si $u_\lambda^1 \neq u_\lambda^2$, on peut diviser par $\left\|u_\lambda^1 - u_\lambda^2\right\|$ qui est strictement positif et il vient $\left\|u_\lambda^1 - u_\lambda^2\right\| \leq \|f_1 - f_2\|$. Sinon l'inégalité précédente est directe. Donc dans tous les cas on a $\boxed{\left\|u_\lambda^1 - u_\lambda^2\right\| \leq \|f_1 - f_2\|.}$

Partie III - Régularisation à croissance linéaire

1) Les applications linéaires, dont A et les formes coordonnées, norme au carré, translation par f et $t \mapsto \sqrt{\varepsilon^2 + t^2}$ étant toutes de classe C^∞ sur X ou $\mathbf{R}$ respectivement, G aussi par composition et combinaison linéaire. En particulier $\boxed{G \text{ est différentiable.}}$ et il vient directement, pour u et v dans X,

$$\langle \nabla G(u) \,|\, v\rangle = \langle u - f \,|\, v\rangle + \sum_{i=1}^{N} \frac{(Av)_i(Au)_i}{\sqrt{\varepsilon^2 + (A(u))_i^2}} = \langle u - f \,|\, v\rangle + \langle B_\varepsilon(u) \,|\, Av\rangle = \langle u - f \,|\, v\rangle + \langle A^*B_\varepsilon(u) \,|\, v\rangle$$

et donc $\boxed{\nabla G(u) = u - f + A^*B_\varepsilon(u).}$

2) Si G est strictement convexe, il résulte de la question précédente ainsi que des questions I5b et I2 que G admet un unique minimum caractérisé par $\nabla G(u) = 0$, i.e. $u - f + A^* B_\varepsilon(u) = 0$. Pour $\lambda = 0$, la partie II montre que $u \mapsto \|f - u\|^2$ est strictement convexe sur X. Donc, par stricte positivité de $\frac{1}{2}$, la stricte convexité de G sur X résulte de la convexité de $u \mapsto \langle e \,|\, A_\varepsilon(u)\rangle$. Or l'application de X dans $\mathbf{R}^2$ donnée par $u \mapsto (Au)_i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est linéaire et l'application distance à $\begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$ est convexe sur $\mathbf{R}^2$ par inégalité triangulaire, donc $u \mapsto (A_\varepsilon(u))_i$ est convexe. La somme de fonctions convexes l'étant, on en conclut à la convexité de $u \mapsto \langle e \,|\, A_\varepsilon(u)\rangle$. Par conséquent $\boxed{G \text{ atteint un minimum en un unique point } u_\varepsilon \text{ de } X \text{ caractérisé par } u_\varepsilon - f + A^* B_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0.}$

3) La fonction F_0 définie comme en partie II avec $f = v$ est strictement convexe, tout comme l'est G d'après le raisonnement de la question précédente et la question II2. Il en résulte que $u \mapsto \mathcal{G}_\lambda(u, v)$ est combinaison à coefficients strictement positifs de deux fonctions strictement convexes et est donc elle-même strictement convexe. Il résulte qu'elle atteint son minimum en un point unique caractérisé par l'annulation de son gradient, d'après les questions I5b et I2. Or ce gradient est donné par $\nabla G + \frac{\lambda}{2} \nabla F_0$, i.e. le minimum est atteint en u vérifiant

$$u - f + A^* B_\varepsilon(u) + \lambda(u - v) = 0$$

i.e. il existe une unique élément u dans X tel que $\boxed{\mathcal{G}_\lambda(u, v) = \min_{w \in X} \mathcal{G}_\lambda(w, v) \text{ et } \lambda(u - v) = -u + f - A^* B_\varepsilon(u).}$

4) Ce qui précède justifie l'existence de la suite (u_n). Avec les notations précédentes et puisque λ est strictement positif, on a

$$\begin{aligned} \|u_n - u_{n+1}\|^2 &= F_0(u_{n+1}) = F_0(u_{n+1}) - F_0(u_n) \\ &= \frac{2}{\lambda}(\mathcal{G}_\lambda(u_{n+1}, u_n) - \mathcal{G}_\lambda(u_n, u_n) - G(u - n + 1) + G(u_n)) \\ &\leq \frac{2}{\lambda}(G(u_n) - G(u_{n+1})) \end{aligned}$$

par minimalité en u_{n+1}. Le terme général de la série $\sum \|u_n - u_{n+1}\|^2$ est donc majoré par celui de la série télescopique $\frac{2}{\lambda} \sum (G(u_n) - G(u_{n+1}))$. Comme G est positive car les coordonnées de $A_\varepsilon(u)$ le sont, et λ aussi, on en déduit que les sommes partielles de $\sum \|u_n - u_{n+1}\|^2$ sont majorées par $\frac{2}{\lambda} G(u_0)$ et donc, étant à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum \|u_n - u_{n+1}\|^2 \text{ est convergente.}}$

5) Puisque les coordonnées de $B_\varepsilon(u)$ sont de valeur absolue inférieure à 1, la fonction B_ε est bornée, donc à valeurs dans un compact de X d'après le théorème de Heine. Comme A^* est linéaire, donc continue, il résulte du théorème de Weierstrass que $A^* B_\varepsilon$ est bornée. D'après la question précédente, par convergence de la série, $\|u_n - u_{n+1}\|^2 = o(1)$ et donc, par continuité de la racine carré, $\|u_n - u_{n+1}\| = o(1)$. On déduit de la question III3 qu'on a $u_{n+1} = f - A^* B_\varepsilon(u_{n+1}) + \lambda(u_n - u_{n+1}) = f + O(1) + o(1) = O(1)$, i.e. $\boxed{(u_n) \text{ est borné.}}$

6) Les questions III1 à III4 montrent qu'en fait G est de classe C^2, qu'on a $\nabla G(u_{n+1}) = \lambda(u_n - u_{n+1}) = o(1)$ et donc, par continuité de ∇G, si u est une valeur d'adhérence de (u_n), on a $\nabla G(u) = 0$, i.e. u est le point où G atteint son minimum. Comme X est de dimension finie et comme (u_n) est une suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence, la réciproque partielle du théorème de Bolzano-Weierstrass montre que $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } u_\varepsilon.}$

7) Dans ce cas on a $G(u) = \dfrac{1}{2}\|f-u\|^2 + \|Au\|_1$ et donc G est différentiable sur X si et seulement si $u \mapsto \|Au\|_1$ l'est, puisque l'ensemble des fonctions différentiables sur X est un espace vectoriel et que F_0 définie en partie II en fait partie. Or $\|\cdot\|_1$ n'admet de dérivée directionnelle en 0 dans aucune direction, puisque la valeur absolue n'est pas dérivable en 0, et donc $u \mapsto \|Au\|_1$ n'admet de dérivée directionnelle en 0 selon aucun vecteur u vérifiant $Au \neq 0$. Comme A n'est pas nulle un tel vecteur u existe et donc $\boxed{G \text{ n'est pas différentiable sur } X.}$

Partie IV - Méthode de type quasi-Newton

1) Soit u et v dans X. On a

$$\langle Av \,|\, C_\varepsilon(u)v\rangle = \langle Av \,|\, D_\varepsilon(u)Av\rangle = \sum_{i=1}^{N} \frac{(Av)_i^2}{(A_\varepsilon(u))_i} \geq 0$$

puisque les termes de la somme sont positifs, i.e. $\boxed{\langle Av \,|\, C_\varepsilon(u)v\rangle \geq 0.}$

2) Soit v dans X. La fonction $u \mapsto \mathcal{G}(u,v)$ est de classe C^∞ par bilinéarité du produit scalaire et linéarité de $\mathcal{A}_\varepsilon$. On la note f et il vient pour u et w dans X

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(u) \,|\, w\rangle &= \langle \nabla G(v) \,|\, w\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathcal{A}_\varepsilon(v)w \,|\, u-v\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathcal{A}_\varepsilon(v)(u_v) \,|\, w\rangle \\ &= \langle \nabla G(v) \,|\, w\rangle + \frac{1}{2}\langle w \,|\, \mathcal{A}_\varepsilon(v)^*(u-v)\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathcal{A}_\varepsilon(v)(u-v) \,|\, w\rangle\end{aligned}$$

et donc $\nabla f(u) = \nabla G(v) + \dfrac{1}{2}(\mathcal{A}_\varepsilon(v) + \mathcal{A}_\varepsilon(v)^*)(u-v)$. Or on a

$$\mathcal{A}_\varepsilon(v)^* = (I_N + A^*D_\varepsilon(v)A)^* = I_N + A^*D_\varepsilon(v)A = \mathcal{A}_\varepsilon(v)$$

et donc $\nabla f(u) = \nabla G(v) + \mathcal{A}_\varepsilon(v)(u-v)$, puis $\nabla^2 f(u) = \mathcal{A}_\varepsilon(v)$. Ainsi, pour w non nul dans X, on a

$$\left\langle \nabla^2 f(u)w \;\middle|\; w\right\rangle = \|w\|^2 + \langle A^*C_\varepsilon(v)w \,|\, w\rangle = \|w\|^2 + \langle C_\varepsilon(v)w \,|\, Aw\rangle \geq \|w\|^2 > 0$$

d'après la question précédente. Et donc, d'après la question I7, f est strictement convexe. Il résulte alors des questions I5b et I2 que f atteint son minimum en un unique point de X donné par $\nabla f(u) = 0$. Or, d'après la question III1, on a

$$\begin{aligned}\nabla f(u) &= \nabla G(v) + (I_N + A^*D_\varepsilon(v)A)(u-v) \\ &= v - f + A^*B_\varepsilon(v) + u - v + A^*D_\varepsilon(v)Au - A^*D_\varepsilon(v)Av \\ &= u - f + A^*D_\varepsilon(v)Au\end{aligned}$$

i.e. $\nabla f(u) = u - f + A^*C_\varepsilon(v)u$. Par conséquent u_0 et la relation de récurrence $\mathcal{G}(u_{n+1}, u_n) = \min_{u\in X} \mathcal{G}(u, u_n)$ définit $\boxed{\text{une unique suite } (u_n) \text{ vérifiant } u_{n+1} - f + A^*C_\varepsilon(u_n)u_{n+1} = 0.}$

3) On a, d'après la question III1, $\nabla G(v) = \mathcal{A}_\varepsilon(v)v - f$, et, par polarisation,

$$\|f-v\|^2 - \|f-u\|^2 = 2\langle f \,|\, u-v\rangle + \|v\|^2 - \|u\|^2 = 2\langle f \,|\, u-v\rangle - \langle u+v \,|\, u-v\rangle$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(u,v) - G(u) &= G(v) - G(u) - \langle \nabla G(v) \,|\, u-v\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathcal{A}_\varepsilon(v)(u-v) \,|\, u-v\rangle \\ &= \langle e \,|\, A_\varepsilon(v) - A_\varepsilon(u)\rangle - \frac{1}{2}\langle u+v \,|\, u-v\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathcal{A}_\varepsilon(v)(u+v) \,|\, u-v\rangle \\ &= \langle e \,|\, A_\varepsilon(v) - A_\varepsilon(u)\rangle + \frac{1}{2}\langle A^*D_\varepsilon(v)A(u+v) \,|\, u-v\rangle \\ &= \langle e \,|\, A_\varepsilon(v) - A_\varepsilon(u)\rangle + \frac{1}{2}\langle D_\varepsilon(v)(Au+Av) \,|\, Au-Av\rangle\ .\end{aligned}$$

Comme $D_\varepsilon(v)$ est diagonale, le second produit scalaire est une somme pondérée de termes de la forme $(Au)_i^2 - (Av)_i^2$, ce qui est aussi $(A_\varepsilon(u))_i^2 - (A_\varepsilon(v))_i^2$. Il vient, en remarquant $e = D_\varepsilon(v)A_\varepsilon(v)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(u,v) - G(u) &= \langle e \,|\, A_\varepsilon(v) - A_\varepsilon(u)\rangle + \frac{1}{2}\langle D_\varepsilon(v)(A_\varepsilon(u) + A_\varepsilon(v)) \,|\, A_\varepsilon(u) - A_\varepsilon(v)\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle D_\varepsilon(v)(A_\varepsilon(v) - A_\varepsilon(u)) \,|\, A_\varepsilon(v) - A_\varepsilon(u)\rangle \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

puisque $D_\varepsilon(v)$ est diagonale à coefficients positifs. Par conséquent $\boxed{G(u) \leq \mathcal{G}(u,v).}$

4) Pour n dans $\mathbf{N}$ on a, d'après la question IV2, $\nabla G(u_n) + \mathcal{A}_\varepsilon(u_n)(u_{n+1} - u_n) = 0$ et donc

$$\begin{aligned}
G(u_n) - \mathcal{G}(u_{n+1}, u_n) &= \left\langle -\nabla G(u_n) - \frac{1}{2}\mathcal{A}_\varepsilon(u_n)(u_{n+1} - u_n) \;\middle|\; u_{n+1} - u_n \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2}\mathcal{A}_\varepsilon(u_n)(u_{n+1} - u_n) \;\middle|\; u_{n+1} - u_n \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\|u_{n+1} - u_n\|^2 + \frac{1}{2}\langle A^* C_\varepsilon(u_n)(u_{n+1} - u_n) \,|\, u_{n+1} - u_n\rangle \\
&\geq \frac{1}{2}\|u_{n+1} - u_n\|^2
\end{aligned}$$

d'après la question IV1. Il résulte donc de la question précédente que la série à termes positifs $\sum \|u_{n+1} - u_n\|^2$ a son terme général majoré par celui de la série télescopique $4\sum(G(u_n) - G(u_{n+1}))$, et donc ses sommes partielles sont majorées par $G(u_0)$, d'après la positivité de G déjà remarquée en question III4. Il en résulte que $\sum \|u_{n+1} - u_n\|^2$ converge et donc, en particulier, son terme général tend vers 0, i.e. $\boxed{(u_{n+1} - u_n) \text{ converge vers } 0.}$

5) L'argument précédent montre en particulier que pour tout entier n on a $G(u_n) \leq G(u_0)$ et donc, par positivité des coefficients de $A_\varepsilon(u_n)$, u_n appartient à la boule de centre f et de rayon $2G(u_0)$. En particulier (u_n) est une suite bornée. De plus si u est une valeur d'adhérence de (u_n) et en tenant compte de la relation de récurrence récrite sous la forme

$$u_n - f + A^* C_\varepsilon(u_n)u_n + (u_{n+1} - u_n) + A^* C_\varepsilon(u_n)(u_{n+1} - u_n) = 0$$

il vient puisque $v \mapsto C_\varepsilon(v)$ est continu, ainsi que le produit matriciel, et par convergence de $(u_{n+1} - u_n)$ vers 0

$$0 = u - f + A^* C_\varepsilon(u)u + 0 + A^* C_\varepsilon(u)0 = u - f + A^* C_\varepsilon(u)u$$

et donc, d'après la question III2, $u = u_\varepsilon$. Puisque (u_n) est une suite à valeurs dans un compact de X, qui est dimension finie, car elle est bornée, et qu'elle n'admet qu'une seule valeur d'adhérence, il résulte de la réciproque partielle du théorème de Bolzano-Weierstrass que $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } u_\varepsilon.}$

Partie V - Régularisation non différentiable

1) a. Pour v et w dans X, on a

$$\langle v \,|\, w\rangle = \sum_{i=1}^{N} v_i w_i \leq \sum_{i=1}^{N} |v_i|\,|w_i| \leq \|v\|_\infty \|w\|_1$$

avec égalité si v est un vecteur ayant des coordonnées toutes égales en valeur absolue et tel que, pour tout i dans $[\![1;N]\!]$, $v_i w_i$ soit positif. En particulier $\sup_{\|v\|_\infty \leq 1} \langle v \,|\, w\rangle = \|w\|_1$. Il en résulte $\boxed{\sup_{\|v\|_\infty \leq 1} L(u,v) = H(u).}$

b. Soit u et v dans X. Par identité de polarisation il vient

$$\begin{aligned}\|f-u-Av\|^2-\|f-Av\|^2+\|f\|^2 &= -2\langle f-Av\,|\,u\rangle+\|u\|^2+\|f\|^2\\ &= 2\langle Av\,|\,u\rangle+\|u\|^2+\|f\|^2-2\langle f\,|\,u\rangle\\ &= 2\langle v\,|\,A^*u\rangle+\|f-u\|^2\end{aligned}$$

et donc, puisque A est symétrique, $\boxed{L(u,v)=\frac{1}{2}\|f-u-Av\|^2-\frac{1}{2}\|f-Av\|^2+\frac{1}{2}\|f\|^2.}$

c. L'égalité admise se récrit, en tenant compte de la question V1a,

$$\inf_{u\in X}H(u)=\sup_{\|v\|_\infty\le 1}\inf_{u\in X}L(u,v)\ .$$

Or d'après la question précédente, à v fixé, $L(u,v)$ atteint son minimum en un unique u donné par $u=f-Av$. Il en résulte

$$\inf_{u\in X}H(u)=\sup_{\|v\|_\infty\le 1}\frac{\|f\|^2-\|f-Av\|^2}{2}=\frac{\|f\|^2-d(f,K)^2}{2}$$

et ce minimum est atteint lorsque $Av=w$, i.e. pour v dans X vérifiant $\|v\|_1=1$ et $Av=w$ on a, en tenant compte de la symétrie de A et donc de $\langle v\,|\,Au\rangle=\langle Av\,|\,u\rangle=\langle w\,|\,u\rangle$,

$$\inf_{u\in X}H(u)=L(f-w,v)=\frac{1}{2}\|w\|^2+\langle w\,|\,f-w\rangle=\langle w\,|\,f\rangle-\frac{1}{2}\|w\|^2\ .$$

Or, pour v dans X vérifiant $\|v\|_\infty=1$, on a, d'après l'inégalité admise vérifiée par w,

$$\begin{aligned}H(f-w)-\langle w\,|\,f\rangle+\frac{1}{2}\|w\|^2 &= \langle w\,|\,w-f\rangle+\|A(f-w)\|_1\\ &\le \langle Av\,|\,w-f\rangle+\|A(f-w)\|_1\\ &\le \langle v\,|\,A(w-f)\rangle+\|A(f-w)\|_1\end{aligned}$$

par symétrie de A. Et donc, par passage au supremum en v, d'après la question V1a, $H(f-w)-\inf_{u\in X}H(u)\le 0$, i.e. H atteint son minimum en $f-w$. Comme A est linéaire, il résulte de l'inégalité triangulaire pour la norme $\|\cdot\|_1$ que H est somme d'une fonction strictement convexe et d'une fonction convexe, et est donc strictement convexe. La question I2 entraîne que H son minimum en un point unique, i.e. $\boxed{H \text{ atteint un minimum en un unique point } u \text{ de } X \text{ donné par } u=f-w.}$

2) Pour u dans X, on a $H(u)\ge\frac{1}{2}\|f-u\|^2$ et donc $H(u)$ tend vers $+\infty$ quand $\|u\|$ tend vers l'infini. D'après la question I1a H admet donc un minimum sur X. En particulier, d'après la question V1a, $\inf_{u\in X}\sup_{\|v\|_\infty=1}L(u,v)$ existe et on a d'après le calcul de la question précédente

$$\inf_{u\in X}\sup_{\|v\|_\infty=1}L(u,v)=\inf_{u\in X}H(u)\le H(f-w)\le\langle w\,|\,f\rangle-\frac{1}{2}\|w\|^2=\sup_{\|w\|_\infty=1}\inf_{u\in X}L(u,v)\ .$$

Soit maintenant u et v dans X vérifiant $\|v\|_\infty=1$. On a par définition $L(u,v)\le\sup_{\|w\|_\infty=1}L(u,w)$, ce supremum étant fini puisqu'égal à $H(u)$. Par passage à l'infimum, ce qui est licite d'après la question V1b, on a $\inf_{u\in X}L(u,v)\le\inf_{u\in X}\sup_{\|w\|_\infty=1}L(u,w)$. Puisque le membre de droite est un majorant indépendant de v, le membre de gauche admet un supremum vérifiant

$$\sup_{\|w\|_\infty=1}\inf_{u\in X}L(u,v)\le\inf_{u\in X}\sup_{\|w\|_\infty=1}L(u,w)\ .$$

Par double inégalité, $\boxed{\text{l'égalité (3) est vraie.}}$