

Diffusion sur des ensembles finis

Préambule

Ce problème est constitué de trois parties.

Le but du problème est d'étudier des processus similaires à la diffusion sur des ensembles finis. La vitesse de convergence vers la configuration uniforme est mesurée à l'aide de deux constantes : la constante de Poincaré permet de mesurer la vitesse de décroissance de l'énergie (partie 1), tandis que la constante de Sobolev permet de mesurer la vitesse de décroissance de l'entropie, qui est dans ce contexte l'opposée de l'entropie physique (partie 2). Un exemple est traité dans la partie 3 : la diffusion classique sur l'hypercube $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d$ avec le calcul de la constante de Poincaré.

Définitions, notations et rappels

On note \mathbf{R} le corps des nombres réels, \mathbf{R}_+ le sous-ensemble des nombres réels positifs, et \mathbf{R}_+^* le sous-ensemble des nombres réels strictement positifs. On fixe N un entier naturel supérieur à 2 et on note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire renormalisé sur \mathbf{R}^N et $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne associée, i.e.

$$\forall (u, v) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N, \quad \langle u | v \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i v_i \quad \text{et} \quad \|u\|_2^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i^2.$$

On note π le vecteur de \mathbf{R}^N donné par $\pi = (1, \dots, 1)$ et si $u \in \mathbf{R}^N$, on note $u = (u_i)_{1 \leq i \leq N}$.

Matrices stochastiques

Soit P une matrice de $\mathcal{M}_N(\mathbf{R})$. On dit que P est symétrique et bistochastique si

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2 \quad \left(p_{i,j} = p_{j,i}, \quad p_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^N p_{k,j} = \sum_{k=1}^N p_{i,k} = 1 \right).$$

Si $p_{i,j} > 0$ on dit que l'état j est connecté à l'état i . On dit que la matrice P est irréductible si pour tous i et j dans $\llbracket 1, N \rrbracket$, il existe des j_1, j_2, \dots, j_k dans $\llbracket 1, N \rrbracket$ permettant de connecter les états j et i , i.e. $p_{j_1, j} > 0$, $p_{j_2, j_1} > 0, \dots, p_{j_k, j_{k-1}} > 0$ et $p_{i, j_k} > 0$.

Dans ce problème P est une matrice de $\mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ **symétrique, bistochastique et irréductible**.

Inégalité de Jensen

Soit φ dans $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ strictement convexe. Soit β et f dans $(\mathbf{R}_+)^N$ avec $\sum_{i=1}^N \beta_i = 1$, on a :

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^N \beta_i f_i \right) \leq \sum_{i=1}^N \beta_i \varphi(f_i)$$

et, si $\beta \in (\mathbf{R}_+^*)^N$, il y a égalité si et seulement si $f \in \mathbf{R}_+ \pi$.

PARTIE I - Énergie et inégalité de trou spectral

On identifie les vecteurs de \mathbf{R}^N à des vecteurs colonnes.

1(a) Montrer que π est un vecteur propre de P .

(b) On suppose de plus que les coefficients de P sont tous strictement positifs. Montrer que 1 est une valeur propre simple de P .

Indication. On s'intéressera à la valeur maximale des coordonnées d'un vecteur propre.

(c) Montrer que l'on peut aboutir à la même conclusion sans l'hypothèse supplémentaire que tous les coefficients de P sont strictement positifs.

2) On définit la **forme de Dirichlet** associée à la matrice P par :

$$\forall (u, v) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N, \quad \mathcal{E}(u, v) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (u_i - u_j)(v_i - v_j) p_{i,j} .$$

(a) Montrer, pour u et v dans \mathbf{R}^N , $\mathcal{E}(u, v) = \langle u | (I_N - P)v \rangle = \langle (I_N - P)u | v \rangle$.

(b) On définit la **constante de Poincaré** par

$$\mu = \inf \left\{ \frac{\mathcal{E}(v, v)}{\|v\|_2^2} \mid v \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}, \langle \pi | v \rangle = 0 \right\} .$$

Montrer que l'infimum est atteint et en déduire que μ est strictement positif. Interpréter μ en fonction des valeurs propres de $I_N - P$.

3) Soit $u^0 \in \mathbf{R}^N$ tel que $\langle \pi | u^0 \rangle = 1$. On admet que $t \mapsto \exp(t(P - I_N))u^0$ est l'unique solution définie sur \mathbf{R} du **système différentiel linéaire** suivant

$$u'(t) = (P - I_N)u(t) \quad \text{et} \quad u(0) = u^0 \quad \text{avec} \quad \langle \pi | u^0 \rangle = 1, \quad (1)$$

(a) Montrer : $\forall t \in \mathbf{R}, \langle \pi | u(t) \rangle = 1$.

(b) Montrer que $u(t)$ tend vers π à vitesse exponentielle lorsque t tend vers $+\infty$:

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad \|u(t) - \pi\|_2^2 \leq \|u^0 - \pi\|_2^2 \exp(-2\mu t) .$$

Indication. Si $e(t) = \|u(t) - \pi\|_2^2$, chercher une inégalité qui relie $e'(t)$ et $e(t)$ puis multiplier par une fonction exponentielle bien choisie.

PARTIE II - Entropie et inégalité de Sobolev

Soit φ dans $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ donnée par $\varphi(x) = x \ln(x)$ si $x \in \mathbf{R}_+^*$. Pour u dans $(\mathbf{R}_+)^N$ tel que $\langle \pi | u \rangle = 1$, on

définit l'**entropie** par $\mathbf{H}(u) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(u_i)$.

Pour f non nul dans \mathbf{R}^N , on pose

$$\mathbf{L}(f) = \frac{\|f\|_2^2}{N} \sum_{i=1}^N \varphi \left(\frac{f_i^2}{\|f\|_2^2} \right)$$

et on définit la **constante de Sobolev** par :

$$\alpha = \inf \left\{ \frac{\mathcal{E}(f, f)}{\mathbf{L}(f)} \mid f \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}, \mathbf{L}(f) \neq 0 \right\}$$

Pour u dans $(\mathbf{R}_+^*)^N$, on définit les vecteurs auxiliaires $\ln(u) = (\ln(u_i))_{1 \leq i \leq N}$ et $\sqrt{u} = (\sqrt{u_i})_{1 \leq i \leq N}$.

1) Montrer, à l'aide de l'inégalité de Jensen, que l'entropie est une quantité positive. À quelle condition a-t-on $\mathbf{H}(u) = 0$?

2(a) Soit v dans $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ tel que $\langle \pi | v \rangle = 0$. Établir le développement limité en 0 :

$$\mathbf{L}(\pi + \varepsilon v) = 2\varepsilon^2 \|v\|_2^2 + O_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon^3) .$$

(b) En déduire $\alpha \leq \frac{\mu}{2}$.

On admettra que α est strictement positif.

3(a) Montrer, pour a et b réels strictement positifs et distincts,

$$\left(\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} \right)^2 \leq \frac{1}{4} \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a}.$$

Indication. On écrira la différence $\sqrt{b} - \sqrt{a}$ comme une intégrale sur $[a, b]$.

(b) En déduire, pour u dans $(\mathbf{R}_+^*)^N$,

$$\mathcal{E}(u, \ln(u)) \geq 4\mathcal{E}(\sqrt{u}, \sqrt{u}).$$

4) On considère à nouveau le système (1), avec la condition supplémentaire $u^0 \in (\mathbf{R}_+^*)^N$.

(a) Soit t dans \mathbf{R}_+ . Montrer que $\exp(t(P - I_N))$ est une matrice à termes positifs. En déduire $u(t) \in (\mathbf{R}_+^*)^N$.

(b) Montrer que la dérivée de $t \mapsto \mathbf{H}(u(t))$ est donnée par la formule $\langle u'(t) | \ln(u(t)) + \pi \rangle$, pour t dans \mathbf{R}_+ .

(c) Montrer que l'entropie converge vers 0 à vitesse exponentielle lorsque t tend vers $+\infty$:

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad \mathbf{H}(u(t)) \leq \mathbf{H}(u^0) \exp(-4\alpha t).$$

(d) Montrer que l'on peut étendre l'inégalité précédente au cas où u^0 vérifie $u^0 \in (\mathbf{R}_+)^N$.

Indication. On pourra considérer la condition initiale $u^\varepsilon = (1 - \varepsilon)u^0 + \varepsilon\pi$.

5) On définit la norme de la variation totale entre deux vecteurs (u, v) de $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$:

$$\|u - v\|_{VT} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |u_i - v_i|.$$

(a) Montrer, pour tous u et v dans \mathbf{R}^N , $\|u - v\|_{VT} \leq \|u - v\|_2$.

(b) **On admettra** l'inégalité suivante, pour a dans \mathbf{R}_+ ,

$$\frac{3(a-1)^2}{4+2a} \leq \varphi(a) - a + 1.$$

En déduire, pour u dans $(\mathbf{R}_+)^N$ tel que $\langle \pi | u \rangle = 1$:

$$\|u - \pi\|_{VT}^2 \leq 2\mathbf{H}(u).$$

Indication. On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

PARTIE III - Exemple de l'hypercube $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d$

Soit d un entier supérieur à 2. On considère $E = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d$ et $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ sa base canonique (en tant qu'espace vectoriel sur le corps $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$). On note \cdot l'application de $E \times E$ dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ définie par $x \cdot y = \sum_{i=1}^d x_i y_i$ et, pour

γ dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, on écrit $(-1)^\gamma = 1$ si γ est nul et $(-1)^\gamma = -1$ sinon.

On note $N = |E| = 2^d$. On identifie E avec $\llbracket 1, N \rrbracket$ ainsi que l'espace vectoriel \mathbf{R}^E , des fonctions de E dans \mathbf{R} , avec \mathbf{R}^N . On munit \mathbf{R}^E du produit scalaire défini précédemment sur \mathbf{R}^N .

Si x est dans E , on note δ_x la fonction dans \mathbf{R}^E telle que $\delta_x(x) = 1$ et $\delta_x(y) = 0$ si $y \neq x$.

1) À toute fonction u dans \mathbf{R}^E , on associe la fonction transformée \hat{u} , dans \mathbf{R}^E , donnée par

$$\forall \xi \in E, \quad \hat{u}(\xi) = \sum_{x \in E} (-1)^{\xi \cdot x} u(x).$$

(a) Montrer qu'on a, pour tout z dans E non nul, $\sum_{\xi \in E} (-1)^{\xi \cdot z} = 0$.

(b) Montrer la formule d'inversion, pour y dans E et u dans \mathbf{R}^E , $u(y) = \frac{1}{N} \sum_{\xi \in E} (-1)^{\xi \cdot y} \hat{u}(\xi)$.

Indication. On cherchera à démontrer cette identité sur des fonctions particulières.

(c) En déduire, pour u et v dans \mathbf{R}^E , $\langle u | v \rangle = \frac{1}{N} \langle \hat{u} | \hat{v} \rangle$.

2) Montrer qu'on définit une matrice P symétrique, bistochastique et irréductible en posant $P = (p_{x,y})_{(x,y) \in E^2}$ avec $p_{x,y} = \frac{1}{d}$ s'il existe i dans $\llbracket 1, d \rrbracket$ tel que $y - x = e_i$ et $p_{x,y} = 0$ sinon.

3) On définit \mathcal{E} la forme de Dirichlet associée à P ainsi que les constantes de Poincaré et Sobolev comme en parties I et II.

Pour tout ξ dans E on définit $c(\xi) = 1 - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d (-1)^{\xi_i}$.

(a) Montrer, pour ξ dans E non nul, $c(\xi) \geq \frac{2}{d}$.

(b) Soit v dans \mathbf{R}^E . On définit $w = (I_N - P)v$. Montrer, pour ξ dans E , $\hat{w}(\xi) = c(\xi)\hat{v}(\xi)$.

(c) En déduire que la constante de Poincaré est égale à $\frac{2}{d}$.

4) **On admettra** que la constante de Sobolev vaut $\frac{1}{d}$ dans ce cas. On considère à nouveau le système différentiel (1), avec $u^0 = N\delta_x$.

Déterminer un temps T suffisant pour atteindre la configuration uniforme π avec la précision $\varepsilon > 0$ en variation totale, i.e. :

$$\forall t \geq T \quad \|u(t) - \pi\|_{VT} \leq \varepsilon \quad \dots$$

(a) ... en utilisant la constante de Poincaré,

(b) ... en utilisant la constante de Sobolev.

Que pouvez-vous en conclure ?

COMPOSITION C – ENS ULM-LYON-CACHAN 2011 – MP

PARTIE I - Énergie et inégalité de trou spectral

1)(a) Pour i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, le coefficient d'indice i de $P\pi$ est $\sum_{j=1}^N p_{i,j}$, i.e. 1 et donc $P\pi = \pi$. Comme π est

non nul, π est vecteur propre de P , associé à la valeur propre 1.

(b) Soit u , avec $u = (u_i)_{1 \leq i \leq N}$, un vecteur propre de P pour la valeur propre 1 et soit i_0 dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ tel $u_{i_0} = \max(u_1, u_2, \dots, u_N)$. Comme $Pu = u$, en identifiant les coordonnées d'indice i_0 de ces deux vecteurs, il vient

$$\sum_{j=1}^N p_{i_0,j}(u_{i_0} - u_j) = \left(\sum_{j=1}^N p_{i_0,j} \right) u_{i_0} - \sum_{j=1}^N p_{i_0,j} u_j = u_{i_0} - u_{i_0} = 0$$

et donc, puisqu'on a affaire à une somme de termes positifs, pour tout j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $p_{i_0,j}(u_{i_0} - u_j) = 0$. Comme P est à coefficients strictement positifs, il vient $u = u_{i_0}\pi$ et donc $\text{Ker}(P - I_n) = \mathbf{R}\pi$. Comme P est symétrique réelle, elle est diagonalisable et donc 1 est valeur propre simple de P .

(c) Si P est symétrique et bistochastique, il en est de même de P^2 et plus généralement des puissances entières positives de P : la symétrie et la positivité résultent de ces propriétés pour P . Quant à la somme des coefficients, on a

$$\sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=1}^N p_{i,k} p_{k,j} \right) = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{i=1}^N p_{i,k} \right) p_{k,j} = \sum_{k=1}^N p_{k,j} = 1$$

et, par symétrie, il en résulte que P^2 est bistochastique. Une récurrence immédiate permet de conclure qu'il en est de même pour toutes les puissances P^k avec $k \in \mathbf{N}$.

Soit u et i_0 définis comme précédemment ; alors u est également vecteur propre pour P^k pour tout k dans \mathbf{N} , pour la valeur propre 1. De la démonstration précédente, on déduit que si le coefficient d'indice (i_0, j) de P^k est non nul, alors $u_j = u_{i_0}$. Or, par irréductibilité de P , pour tout j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on dispose de k dans \mathbf{N}^* et de (j_1, \dots, j_k) dans $\llbracket 1, n \rrbracket^k$ tels que j soit connecté à j_1 , j_1 à j_2 , \dots , j_k à i_0 . En particulier le coefficient de P^k d'indice (i_0, j) est la somme de termes positifs dont l'un est égal à $p_{i_0,j_k} p_{j_k,j_{k-1}} \cdots p_{j_1,j}$ et est donc strictement positif. On conclut $u = u_{i_0}\pi$ et donc, comme précédemment, 1 est valeur propre simple de P .

Remarque : on peut raisonner aussi de la façon suivante. Soit $M = \max(u_1, \dots, u_N)$ et $X = \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid u_j = M\}$. D'après la preuve de 1(b), si $i \in X$ et j est connecté à i , alors $j \in X$. Comme P irréductible, il vient $X = \llbracket 1, n \rrbracket$.

2)(a) Soit u et v dans \mathbf{R}^N avec $u = (u_i)_{1 \leq i \leq N}$ et $v = (v_i)_{1 \leq i \leq N}$. On a, puisque P est bistochastique (pour

les deux premières égalités) et symétrique (pour la quatrième),

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_i v_i p_{i,j} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i v_i \left(\sum_{j=1}^N p_{i,j} \right) = \langle u | v \rangle \\ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_j v_j p_{i,j} &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u_j v_j \left(\sum_{i=1}^N p_{i,j} \right) = \langle u | v \rangle \\ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_i v_j p_{i,j} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \left(\sum_{j=1}^N p_{i,j} v_j \right) = \langle u | Pv \rangle \\ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_j v_i p_{i,j} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i \left(\sum_{j=1}^N p_{i,j} u_j \right) = \langle v | Pu \rangle = \langle Pu | v \rangle = \langle u | Pv \rangle \\ \mathcal{E}(u, v) &= \frac{1}{2} (2 \langle u | v \rangle - 2 \langle u | Pv \rangle) = \langle u | (I_N - P)v \rangle \end{aligned}$$

Et donc, par symétrie du produit scalaire, il vient

$$\mathcal{E}(u, v) = \langle u | (I_N - P)v \rangle = \langle (I_N - P)u | v \rangle .$$

- (b) Puisque $I_N - P$ est symétrique réelle, elle est diagonalisable. Comme π est vecteur propre de P , il l'est de $I_N - P$ et son orthogonal est donc stable par $I_N - P$. Puisque $N \geq 2$, cet orthogonal n'est pas réduit à $\{0\}$. De plus pour v non nul on a $\frac{\mathcal{E}(v, v)}{\|v\|_2^2} = \mathcal{E}\left(\frac{v}{\|v\|_2}, \frac{v}{\|v\|_2}\right)$. Il en résulte que μ est l'infimum de $\mathcal{E}(v, v)$ pour v unitaire dans π^\perp . Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq N-1}$ une base orthonormée de diagonalisation de la restriction de $I_N - P$ à π^\perp , $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq N-1}$ les valeurs propres associées et v unitaire dans π^\perp ; on a

$$\mathcal{E}(v, v) = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \langle e_i | v \rangle^2 \geq \left(\inf_{1 \leq i \leq N-1} \lambda_i \right) \sum_{i=1}^{N-1} \langle e_i | v \rangle^2 \geq \lambda_{i_0}$$

où i_0 dans $\llbracket 1, N-1 \rrbracket$ est tel que $\lambda_{i_0} = \inf_{1 \leq i \leq N-1} \lambda_i$. De plus l'infimum est atteint en e_{i_0} et donc l'infimum est atteint.

Comme $\mathcal{E}(e_{i_0}, e_{i_0})$ est une somme de carrés multipliés par des coefficients de P , c'est une quantité positive. Comme 1 est valeur propre simple de P , 0 est valeur propre simple de $I_N - P$ et donc n'est pas valeur propre de la restriction de $I_N - P$ à π^\perp . Il en résulte

$$\mu > 0 \text{ et } \mu \text{ est la plus petite des valeurs propres non nulle de } I_N - P.$$

- 3)(a) On note f l'application définie sur \mathbf{R} par $f(t) = \langle \pi | u(t) \rangle$. Chacune des composantes de u étant de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R} , il en est de même pour f . De plus, pour t réel, on a

$$f'(t) = \langle \pi | u'(t) \rangle = \langle \pi | (I_N - P)u(t) \rangle = \langle (I_N - P)\pi | u(t) \rangle = \langle 0 | u(t) \rangle = 0,$$

puisque $I_N - P$ est symétrique. Il en résulte que f est constante, égale à sa valeur en 0, i.e.

$$\forall t \in \mathbf{R}, \langle \pi | u(t) \rangle = 1.$$

- (b) Soit e la fonction définie sur \mathbf{R} par $e(t) = \|u(t) - \pi\|_2^2$. C'est une somme de carrés de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R} et elle est donc aussi de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R} . Pour t réel il vient

$$\begin{aligned} e'(t) &= 2 \langle u(t) - \pi | u'(t) \rangle \\ &= 2 \langle u(t) - \pi | (P - I_N)u(t) \rangle . \end{aligned}$$

Comme $(P - I_n)\pi = 0$, on a

$$\begin{aligned} e'(t) &= 2 \langle u(t) - \pi \mid (P - I_N)(u(t) - \pi) \rangle \\ &= -2\mathcal{E}(u(t) - \pi, u(t) - \pi) \\ &\leq -2\mu \|u(t) - \pi\|_2^2 = -2\mu e(t) \end{aligned}$$

puisque $\langle u(t) - \pi \mid \pi \rangle = \langle u(t) \mid \pi \rangle - \|\pi\|_2^2 = 1 - 1 = 0$ et en appliquant la définition de μ .

Soit alors f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(t) = e^{2\mu t} e(t)$. Elle est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R} en tant que produit de deux telles fonctions et, d'après l'inégalité précédente et la positivité de l'exponentielle, la dérivée de f est négative. En particulier, pour t positif, $f(t) \leq f(0)$, i.e.

$$\|u(t) - \pi\|_2^2 \leq \|u^0 - \pi\|_2^2 \exp(-2\mu t).$$

PARTIE II - Entropie et inégalité de Sobolev

- 1) La fonction φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}_+^* en tant que produit de telles fonctions et continue en 0, par définition, avec $\varphi(0) = 0$ par domination de x sur $\ln(x)$ en 0. Elle est de plus strictement convexe puisque, par exemple, sa dérivée seconde est la fonction inverse donc strictement positive là où elle est définie, i.e. \mathbf{R}_+^* . Il en résulte

$$\mathbf{H}(u) \geq \varphi \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \right) = \varphi(\langle u \mid \pi \rangle) = \varphi(1) = 0$$

avec égalité si et seulement si $u \in \mathbf{R}_+ \pi$ puisque $(\pi \in \mathbf{R}_+^*)^N$, d'après l'inégalité de Jensen et son cas d'égalité, i.e.

$$\text{l'entropie est une quantité positive et } \mathbf{H}(u) = 0 \text{ si et seulement si } u = \pi.$$

- 2)(a) Soit ε dans \mathbf{R} , on a, par polarisation,

$$\|\pi + \varepsilon v\|_2^2 = 1 + 2\varepsilon \langle \pi \mid v \rangle + \varepsilon^2 \|v\|_2^2 = 1 + \varepsilon^2 \|v\|_2^2$$

et donc, en particulier, $\pi + \varepsilon v \neq 0$ et, en effectuant un développement au voisinage de 0,

$$-\ln \left(\|\pi + \varepsilon v\|_2^2 \right) = -\varepsilon^2 \|v\|_2^2 + O(\varepsilon^4).$$

De plus si ε est assez petit, $\pi + \varepsilon v$ n'a aucune coordonnée nulle, puisqu'elles sont de la forme $1 + \varepsilon v_i$. Soit alors i dans $\llbracket 1, N \rrbracket$; on a, au voisinage de 0,

$$\ln((1 + \varepsilon v_i)^2) = 2 \ln(1 + \varepsilon v_i) = 2\varepsilon v_i - \varepsilon^2 v_i^2 + O(\varepsilon^3) \quad \text{et} \quad (1 + \varepsilon v_i)^2 = 1 + 2\varepsilon v_i + O(\varepsilon^2).$$

Il vient, toujours au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\pi + \varepsilon v) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 + \varepsilon v_i)^2 \ln \left(\frac{(1 + \varepsilon v_i)^2}{\|\pi + \varepsilon v\|_2^2} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 + 2\varepsilon v_i + O(\varepsilon^2)) \left(2\varepsilon v_i - \varepsilon^2 (v_i^2 + \|v\|_2^2) + O(\varepsilon^3) \right) \\ &= 2\varepsilon \langle \pi \mid v \rangle + \varepsilon^2 (4 \|v\|_2^2 - \|v\|_2^2 - \|v\|_2^2 \|\pi\|_2^2) + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \mathbf{L}(\pi + \varepsilon v) = 2\varepsilon^2 \|v\|_2^2 + O_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon^3).$$

- (b) D'après I.2(b), on dispose de v dans \mathbf{R}^N unitaire vérifiant $\langle \pi | v \rangle = 0$ et $\mu = \mathcal{E}(v, v)$. La question précédente montre, de plus, qu'on a alors $L(\pi + \varepsilon v) \sim 2\varepsilon^2$ au voisinage de 0 et, en particulier, cette quantité est non nulle pour ε assez petit mais non nul. Par définition il vient, pour tout ε assez petit non nul, $\alpha \leq \frac{\mathcal{E}(\pi + \varepsilon v, \pi + \varepsilon v)}{L(\pi + \varepsilon v)}$.

Or, par polarisation, $\mathcal{E}(\pi + \varepsilon v, \pi + \varepsilon v) = \mathcal{E}(\pi, \pi) + 2\varepsilon\mathcal{E}(\pi, v) + \varepsilon^2\mathcal{E}(v, v) = \varepsilon^2\mu$ puisque $(I_n - P)\pi = 0$, en utilisant I.2(a). On a donc, au voisinage de 0, $\frac{\mathcal{E}(\pi + \varepsilon v, \pi + \varepsilon v)}{L(\pi + \varepsilon v)} \sim \frac{\mu}{2}$ et donc, par passage à la

limite, $\boxed{\alpha \leq \frac{\mu}{2}}$.

- 3(a) Soit a et b dans \mathbf{R}_+^* , distincts. On munit l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ (ou $[b, a]$) du produit scalaire donné par $\langle f | g \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)g(t) dt$. On a alors

$$\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b-a} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \langle \gamma_{-1/2} | \mathbf{1} \rangle$$

où $\gamma_{-1/2}$ est $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ et $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors

$$\left(\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b-a} \right)^2 \leq \frac{1}{4} \|\gamma_{-1/2}\|^2 \cdot \|\mathbf{1}\|^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{dx}{x}$$

i.e. $\boxed{\left(\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b-a} \right)^2 \leq \frac{1}{4} \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a}}$.

- (b) Soit u dans $(\mathbf{R}_+^*)^N$. Soit i et j dans $\llbracket 1, N \rrbracket$ tels que $u_i \neq u_j$. L'inégalité précédente donne :

$$(u_i - u_j)(\ln(u_i) - \ln(u_j)) = (u_i - u_j)^2 \frac{\ln(u_i) - \ln(u_j)}{u_i - u_j} \geq 4(\sqrt{u_i} - \sqrt{u_j})^2$$

et donc, puisque les termes tels que $u_i = u_j$ ne contribue pas à la somme, il vient en sommant

$$\boxed{\mathcal{E}(u, \ln(u)) \geq 4\mathcal{E}(\sqrt{u}, \sqrt{u})}$$

- 4(a) Puisque les matrices P et I_N commutent, il en va de même pour tP et $-tI_n$ et donc $\exp(t(P - I_N)) = \exp(tP)\exp(-tI_N) = e^{-t}\exp(tP)$, puisque $\exp(-tI_N) = e^{-t}I_N$. Comme P est à coefficients positifs, il en va de même de toutes ses puissances et donc, par somme et limite, de son exponentielle. Par conséquent

$$\boxed{\exp(t(P - I_N)) \text{ est à coefficients positifs.}}$$

Comme $u(t) = \exp(t(P - I_N))u^0$, les composantes de $u(t)$ sont toutes positives et, puisque u^0 est dans $(\mathbf{R}_+^*)^N$, $u(t)$ a une composante nulle si et seulement si $\exp(t(P - I_n))$ admet une ligne nulle. Or $\exp(t(P - I_N))\exp(-t(P - I_N)) = \exp(0I_N) = I_N$ et donc $\exp(t(P - I_N))$ est inversible et ne peut donc pas avoir de ligne nulle et $\boxed{u(t) \in (\mathbf{R}_+^*)^N}$.

- (b) La dérivée de φ existant sur \mathbf{R}_+^* et étant donnée par $\varphi'(t) = 1 + \ln(t)$, la fonction $t \mapsto \mathbf{H}(u(t))$ est dérivable en tant que somme de telles fonctions (obtenues par composition) et la formule de dérivation d'une composée donne, pour t dans \mathbf{R}_+ ,

$$(\mathbf{H} \circ u)'(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i'(t) \varphi'(u_i(t)) = \langle u'(t) | \ln(u(t)) + \pi \rangle,$$

i.e. $\boxed{\text{la dérivée de } t \mapsto \mathbf{H}(u(t)) \text{ est } t \mapsto \langle u'(t) | \ln(u(t)) + \pi \rangle.}$

(c) Soit t dans \mathbf{R}_+ . Puisque $u'(t) = (P - I_N)u(t)$, il vient

$$(\mathbf{H} \circ u)'(t) = \langle (P - I_N)u(t) | \ln(u(t)) + \pi \rangle = -\mathcal{E}(u(t), \ln(u(t)))$$

d'après I.2(a) et puisque $(P - I_N)\pi = 0$. On en déduit, via II.3(b) et par définition de α ,

$$(\mathbf{H} \circ u)'(t) \leq -4\mathcal{E}\left(\sqrt{u(t)}, \sqrt{u(t)}\right) \leq -4\alpha\mathbf{L}\left(\sqrt{u(t)}\right).$$

Or

$$\left\| \sqrt{u(t)} \right\|_2^2 = \langle u(t) | \pi \rangle = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{L}\left(\sqrt{u(t)}\right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i(t) \ln(u_i(t)) = \mathbf{H}(u(t))$$

et donc $(\mathbf{H} \circ u)'(t) + 4\alpha\mathbf{H}(u(t)) \leq 0$. Il en résulte que $t \mapsto e^{4\alpha t}\mathbf{H}(u(t))$ est décroissante et

$$\boxed{\mathbf{H}(u(t)) \leq \mathbf{H}(u^0) \exp(-4\alpha t).}$$

(d) Soit u^0 dans $(\mathbf{R}_+)^N$ tel que $\langle \pi | u^0 \rangle = 1$, ε dans \mathbf{R}_+^* et $u^\varepsilon = (1 - \varepsilon)u^0 + \varepsilon\pi$. Alors $u^\varepsilon \in (\mathbf{R}_+^*)^N$ et $\langle u^\varepsilon | \pi \rangle = (1 - \varepsilon)\langle u^0 | \pi \rangle + \varepsilon\|\pi\|_2^2 = 1$. D'après la question précédente, il vient, pour t dans \mathbf{R}_+ ,

$$\mathbf{H}\left(e^{t(P-I_N)}u^\varepsilon\right) \leq \mathbf{H}(u^\varepsilon) \exp(-4\alpha t).$$

Lorsque ε tend vers 0, u^ε tend vers u^0 . L'application $u \mapsto e^{t(P-I_N)}u$ étant linéaire en dimension finie, elle est continue. Enfin $u \mapsto \mathbf{H}(u)$ est continue en tant que combinaison linéaire de telles fonctions, obtenues par composition d'une projection linéaire (donc continue car en dimension finie) et de φ . Il en résulte, pour u^0 dans $(\mathbf{R}_+)^N$ tel que $\langle \pi | u^0 \rangle = 1$, u la solution de (1) associée et t dans \mathbf{R}_+ ,

$$\boxed{\mathbf{H}(u(t)) \leq \mathbf{H}(u^0) \exp(-4\alpha t).}$$

5(a) Soit u et v dans \mathbf{R}^N . En notant $|u - v|$ le vecteur de \mathbf{R}^N tel que $|u - v|_i = |u_i - v_i|$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\|u - v\|_{VT} = \langle |u - v| | \pi \rangle \leq \|u - v\|_2$ puisque $\|\pi\|_2 = 1$, et donc

$$\boxed{\|u - v\|_{VT} \leq \|u - v\|_2.}$$

(b) Soit u dans $(\mathbf{R}_+)^N$ tel que $\langle \pi | u \rangle = 1$. En sommant, pour i entier entre 1 et N , la relation $\varphi(u_i) \geq u_i - 1 + \frac{3(u_i - 1)^2}{4 + 2u_i}$, il vient

$$H(u) \geq \langle \pi | u \rangle - \|\pi\|_2^2 + \frac{3}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(u_i - 1)^2}{4 + 2u_i} = \frac{3}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(u_i - 1)^2}{4 + 2u_i}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne, en notant $|u - \pi|$ le vecteur de coordonnées $|u_i - 1|$,

$$\begin{aligned} \|u - \pi\|_{VT}^2 &= (\langle \pi | |u - \pi| \rangle)^2 \\ &= \left(\left\langle \sqrt{4\pi + 2u} \left| \frac{|u - \pi|}{\sqrt{4\pi + 2u}} \right. \right\rangle \right)^2 \\ &\leq \left\| \sqrt{4\pi + 2u} \right\|_2^2 \cdot \left\| \frac{|u - \pi|}{\sqrt{4\pi + 2u}} \right\|_2^2 \\ &\leq \langle 4\pi + 2u | \pi \rangle \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(u_i - 1)^2}{4 + 2u_i} \\ &\leq \frac{6}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(u_i - 1)^2}{4 + 2u_i} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \boxed{\|u - \pi\|_{VT}^2 \leq 2\mathbf{H}(u).}$$

PARTIE III - Exemple de l'hypercube $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d$

1)(a) Soit z dans E non nul et i dans $\llbracket 1, d \rrbracket$ tel que $z_i \neq 0$. Alors $(-1)^{z \cdot e_i} = -1$. De plus l'application $\xi \mapsto \xi + e_i$ est une bijection de E dans E , puisqu'on a affaire à un groupe additif. Il en résulte

$$\sum_{\xi \in E} (-1)^{\xi \cdot z} = \sum_{\xi \in E} (-1)^{(\xi + e_i) \cdot z} = - \sum_{\xi \in E} (-1)^{\xi \cdot z} = 0$$

$$\text{et donc } \boxed{\sum_{\xi \in E} (-1)^{\xi \cdot z} = 0.}$$

(b) Dans l'identification de \mathbf{R}^E à \mathbf{R}^N , la base canonique de \mathbf{R}^N correspond à la base canonique $(\delta_x)_{x \in E}$ de \mathbf{R}^E . L'évaluation d'une fonction en un point étant linéaire, l'application $u \mapsto \hat{u}$ est linéaire en tant que combinaison linéaire de telles applications.

De plus, pour x et y dans E , il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{\xi \in E} (-1)^{\xi \cdot y} \widehat{\delta_x}(\xi) &= \frac{1}{N} \sum_{\xi \in E} (-1)^{\xi \cdot y} \left(\sum_{z \in E} (-1)^{z \cdot \xi} \delta_x(z) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\xi \in E} (-1)^{\xi \cdot y} (-1)^{x \cdot \xi} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\xi \in E} (-1)^{\xi \cdot (y+x)} \end{aligned}$$

et cette dernière quantité est nulle si $y + x \neq 0$, i.e. $x \neq y$ puisque $-y = y$. Si, au contraire $x = y$, la somme considérée vaut 1 et donc, dans tous les cas, elle vaut $\delta_x(y)$.

Comme l'application qui à u dans \mathbf{R}^E associe la fonction $y \mapsto \frac{1}{N} \sum_{\xi \in E} (-1)^{\xi \cdot y} u(\xi)$ est linéaire, en tant que combinaison linéaire d'évaluations, et est égale à l'inverse de $u \mapsto \hat{u}$ sur la base canonique de \mathbf{R}^E , elle est en fait égale à son inverse, i.e. pour y dans E et u dans \mathbf{R}^E ,
$$\boxed{u(y) = \frac{1}{N} \sum_{\xi \in E} (-1)^{\xi \cdot y} \hat{u}(\xi).}$$

(c) Soit u et v dans \mathbf{R}^E . On a

$$\langle u | \hat{v} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{x \in E} u(x) \hat{v}(x) = \frac{1}{N} \sum_{x \in E} \sum_{y \in E} (-1)^{y \cdot x} u(x) v(y) = \langle \hat{u} | v \rangle$$

par symétrie de $(x, y) \mapsto x \cdot y$. On applique ce résultat à u et $\frac{1}{N} \hat{v}$. La question précédente donne

$$v = \frac{1}{N} \widehat{\hat{v}} = \frac{1}{N} \hat{v} \text{ et il vient } \boxed{\langle u | v \rangle = \frac{1}{N} \langle \hat{u} | \hat{v} \rangle.}$$

2) Par définition P est à coefficients positifs et, puisque pour z dans E , $z = -z$, P est symétrique. De

plus, pour x dans E , on a $\sum_{y \in E} p_{x,y} = \sum_{i=1}^d p_{x, x+e_i} = \sum_{i=1}^d \frac{1}{d} = 1$ et donc $\sum_{x \in E} p_{x,y} = 1$ par symétrie de P .

Enfin si x et y sont dans E , avec $x \neq y$. On peut écrire $y - x = \sum_{i \in I} e_i$ avec $\emptyset \subsetneq I \subset \llbracket 1, d \rrbracket$. On écrit $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ et alors x est connecté à $x + e_{i_1}$, qui est connecté à $x + e_{i_1} + e_{i_2}$ etc. jusqu'à y . Il en résulte que $\boxed{P \text{ est symétrique, bistochastique et irréductible.}}$

3(a) Soit ξ dans E non nul. Dans la somme $\sum_{i=1}^d (-1)^{\xi_i}$ il y a donc au moins un terme égal à -1 et donc au plus $n-1$ termes égaux à 1 , de sorte qu'elle est majorée par $(n-1) \times 1 + 1 \times (-1)$, i.e. $n-2$. Il en découle directement $c(\xi) \geq \frac{2}{d}$.

(b) Soit ξ dans E . On a $w(\xi) = v(\xi) - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d v(\xi + e_i)$. Soit y dans E et $\tau_y(v)$ dans \mathbf{R}^E définie par $\tau_y(v)(x) = v(x+y)$. On a alors

$$\widehat{\tau_y(v)}(\xi) = \sum_{x \in E} (-1)^{\xi \cdot x} v(x+y) = \sum_{x \in E} (-1)^{\xi \cdot (x-y)} v(x) = (-1)^{\xi \cdot y} \hat{v}(\xi)$$

i.e. $\widehat{\tau_y(v)} = \varepsilon_y \hat{v}$ où ε_y est la fonction $\xi \mapsto (-1)^{\xi \cdot y}$.

Il vient $\hat{w} = \hat{v} \left(1 - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \varepsilon_{e_i} \right)$ et donc $\hat{w}(\xi) = c(\xi) \hat{v}(\xi)$.

(c) Comme $d \geq 1$, $N = 2^d \geq 2$ et on peut donc appliquer les parties I et II. Soit alors v dans \mathbf{R}^N non nul tel que $\langle \pi | v \rangle = 0$. Il vient, puisque $w = (I_N - P)v$ et d'après I.2(a),

$$\mathcal{E}(v, v) = \langle w | v \rangle = \frac{1}{N} \langle \hat{w} | \hat{v} \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{x \in E} c(x) \hat{v}(x)^2$$

Or $\hat{v}(0) = N \langle \pi | v \rangle = 0$ de sorte que, pour tout x dans E , $c(x) \hat{v}(x)^2 \geq \frac{2}{d} \hat{v}(x)^2$, d'après la question précédente et la remarque qui vient d'être faite. On en déduit

$$\mathcal{E}(v, v) \geq \frac{2}{d} \frac{1}{N} \langle \hat{v} | \hat{v} \rangle = \frac{2}{d} \langle v | v \rangle$$

et, par conséquent, $\mu \geq \frac{2}{d}$.

Par ailleurs, si $\hat{v} = \delta_{e_1}$, comme $(\delta_{e_1})^2 = \delta_{e_1}$ et $c(e_1) = \frac{2}{d}$, on alors, pour tout x dans E , $c(x) \hat{v}(x)^2 = \frac{2}{d} \hat{v}(x)^2$, chacun des deux termes étant soit nul, si $x \neq e_1$, soit égal à $\frac{2}{d}$ si $x = e_1$. Par conséquent si

$v = N \widehat{\delta_{e_1}}$, on a $\mathcal{E}(v, v) = \frac{2}{d} \langle v | v \rangle$ et il en résulte que la constante de Poincaré est égale à $\frac{2}{d}$.

4(a) Soit t dans \mathbf{R}_+ , grâce à II.5(a) et I.3(b), il vient

$$\|u(t) - \pi\|_{VT}^2 \leq \|u(t) - \pi\|_2^2 \leq \|u^0 - \pi\|_2^2 e^{-4t/d} = (N-1)e^{-4t/d}$$

Par conséquent $\|u(t) - \pi\|_{VT} \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq T_1$ avec $T_1 = \frac{d}{2} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) + \frac{d}{4} \ln(2^d - 1)$.

(b) Soit t dans \mathbf{R}_+ , grâce à II.5(b) et II.4(d), il vient

$$\|u(t) - \pi\|_{VT}^2 \leq 2\mathbf{H}(u(t)) \leq 2\mathbf{H}(u^0) e^{-4t/d} = 2d \ln(2) e^{-4t/d}$$

Par conséquent $\|u(t) - \pi\|_{VT} \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq T_2$ avec $T_2 = \frac{d}{2} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) + \frac{d}{4} \ln(2d \ln(2))$.

Pour $d = 1$, on a $T_1 \leq T_2$. Pour $d = 2$, on a $2d \ln(2) = \ln(16) \leq 3$. Pour $d \geq 3$, on a $d \ln(2) \geq \ln(8) \geq 2$ et donc $\exp(d \ln(2)) - 1 - d \ln(2) \geq \frac{(d \ln(2))^2}{2} \geq d \ln(2)$, d'où $2^d - 1 \geq 2d \ln(2)$ et $T_1 \leq T_2$. En conclusion :

sauf dans le cas de la dimension 1, les inégalités obtenues en partie II sont plus performantes que celles obtenues en partie I.