ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2014 — FILIÈRE MP

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES C – (ULCR)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Si le candidat ne parvient pas à établir le résultat annoncé dans une question, il peut néanmoins l'admettre et l'utiliser dans les questions suivantes, en l'indiquant clairement.(On prêtera en particulier attention au dernier résultat de chaque sous section.)

⋆ ⋆ ⋆

Minima de Minkowski

Introduction et notations

L'objet du problème est l'étude des minima de Minkowski $\lambda_1(M)$, $\lambda_2(M)$, associés à une matrice symétrique définie positive M de taille 2×2. Les trois premières parties de ce problème établissent un encadrement respectivement de ces minima, de leur produit, et de leur valeur moyenne lorsque l'on conjugue M par une rotation d'angle $\theta \in [0, 2\pi]$. On étudie les minimiseurs associés dans la dernière partie.

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels, $\mathbb{Z}$ celui des entiers relatifs. On note $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 2×2 à coefficients réels, et $S_2^{++} \subset M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives. On note ${}^tA$ la transposée d'une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, et $\det(A)$ son déterminant. Le déterminant de deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$, est noté $\mathrm{Det}(u, v) := u_1 v_2 - u_2 v_1$. On note $\mathrm{Id} \in M_2(\mathbb{R})$ la matrice identité de taille 2×2. On désigne par $\mathrm{Aire}(B)$ l'aire d'une partie géométrique B du plan $\mathbb{R}^2$.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$ le produit scalaire et la norme canoniques sur $\mathbb{R}^2$: pour tous $u, v \in \mathbb{R}^2$

$$\langle u, v \rangle := \sum_{1 \le i \le 2} u_i v_i, \quad \text{et} \quad \|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Etant donnée une matrice $M \in S_2^{++}$, on pose pour tous $u, v \in \mathbb{R}^2$

$$\langle u, v \rangle_M := \langle u, Mv \rangle, \quad \text{et} \quad \|u\|_M := \sqrt{\langle u, u \rangle_M}.$$

On note également, pour tout $r \ge 0$,

$$\overline{B}(r) := \{u \in \mathbb{R}^2;\ \|u\| \le r\}, \quad \text{et} \quad \overline{B}_M(r) := \{u \in \mathbb{R}^2;\ \|u\|_M \le r\}.$$

On note $\mu_1(M), \mu_2(M) \in \mathbb{R}_+^*$ les racines carrées des valeurs propres de M, ordonnées de sorte que $0 < \mu_1(M) \le \mu_2(M)$.

Les minima de Minkowski associés à M sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \lambda_1(M) &:= \inf\{\|u\|_M;\ u \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}\} \\ \lambda_2(M) &:= \inf\{\|v\|_M;\ u, v \in \mathbb{Z}^2,\ \mathrm{Det}(u, v) \neq 0,\ \|u\|_M \le \|v\|_M\} \end{aligned}$$

A Préliminaires.

On considère une matrice $M \in S_2^{++}$, arbitraire mais fixée dans ce sujet.

I. Etude de la norme et du produit scalaire associés à M.

1. Montrer qu'il existe une matrice inversible $A \in M_2(\mathbb{R})$, telle que ${}^tAA = M$.
   On considère dans les questions suivantes une telle matrice A, fixée.
2. Montrer que $\langle u, v\rangle_M = \langle Au, Av\rangle$ et que $\|u\|_M = \|Au\|$, pour tous $u, v \in \mathbb{R}^2$.
3. Montrer que l'application $(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle_M$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$, et que $u \mapsto \|u\|_M$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.
4. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$,
$$\mu_1(M)\|u\| \leq \|u\|_M \leq \mu_2(M)\|u\|.$$
5. Montrer que $\overline{B}(r)$ est l'image de $\overline{B}_M(r)$ par l'application linéaire associée à la matrice A. En déduire que
$$\text{Aire}(\overline{B}_M(r)) = \frac{\pi r^2}{\sqrt{\det M}}.$$

II. Encadrement des minima de Minkowski.

1. Montrer que $\mu_1(M) \leq \lambda_1(M)$.
2. En choisissant judicieusement la paire (u, v), montrer que $\lambda_2(M) \leq \mu_2(M)$.
3. En déduire que
$$\mu_1(M) \leq \lambda_1(M) \leq \lambda_2(M) \leq \mu_2(M).$$
4. Montrer que, si M est diagonale, alors $\mu_1(M) = \lambda_1(M)$, et $\lambda_2(M) = \mu_2(M)$.
5. Montrer que les infimums définissant $\lambda_1(M)$ et $\lambda_2(M)$ sont atteints.

1 h 40

B Produit des minima de Minkowski.

On dit que $(u, v) \in (\mathbb{Z}^2)^2$ est une base du réseau $\mathbb{Z}^2$, si et seulement si
$$|\operatorname{Det}(u, v)| = 1.$$

Etant donnés deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^2$, on note $[u, v] \in M_2(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont u et v : en coordonnées
$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad [u, v] = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}.$$

I. Caractérisation des bases de $\mathbb{Z}^2$.

1. Supposons que (u, v) est une base de $\mathbb{Z}^2$.
   (a) Montrer que la matrice $[u, v]$ est inversible, et que les coefficients de son inverse sont entiers.
   (b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{Z}^2$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que $z = \alpha u + \beta v$.
2. Soient $u, v \in \mathbb{Z}^2$, tels que pour tout $z \in \mathbb{Z}^2$ il existe des entiers $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que $z = \alpha u + \beta v$. Montrer que (u, v) est une base du réseau $\mathbb{Z}^2$.

II. Définition et existence d'une base M-réduite.

1. Montrer qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}^2$, tels que $\mathrm{Det}(u,v) \neq 0$, $\|u\|_M = \lambda_1(M)$, et $\|v\|_M = \lambda_2(M)$.
2. Soient $u, v \in \mathbb{Z}^2$ des vecteurs satisfaisant les conditions de la question II.1. ci dessus. Nous souhaitons montrer que (u,v) est une base du réseau $\mathbb{Z}^2$. Pour cela, nous supposons par l'absurde qu'il existe $z \in \mathbb{Z}^2$ dont la décomposition $z = \alpha u + \beta v$ sur la base (u,v) de $\mathbb{R}^2$, fait intervenir au moins un coefficient non entier, α ou β.
   (a) Montrer qu'il existe $z' \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$, et $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$, tels que
   $$z' = \alpha' u + \beta' v, \quad |\alpha'| \leq 1/2, \quad |\beta'| \leq 1/2.$$
   (b) Si $\beta' = 0$, montrer qu'alors $\|z'\|_M < \lambda_1(M)$. Si $\beta' \neq 0$, montrer qu'alors $\|z'\|_M < \lambda_2(M)$.
   (c) Conclure à une contradiction. En déduire que (u,v) est une base de $\mathbb{Z}^2$.

On dit que $(u,v) \in (\mathbb{Z}^2)^2$ est une base M-réduite du réseau $\mathbb{Z}^2$, si et seulement si $|\mathrm{Det}(u,v)| = 1$, $\|u\|_M = \lambda_1(M)$, et $\|v\|_M = \lambda_2(M)$. Les questions ci-dessus ont établi l'existence d'au moins une base M-réduite.

III. Propriétés géométriques.

On considère dans les questions qui suivent une base M-réduite fixée (u,v) de $\mathbb{Z}^2$. On note
$$u' := \frac{u}{\|u\|_M}, \quad v' := \frac{v}{\|v\|_M},$$
et l'on introduit le parallélogramme Q de sommets $u', v', -u', -v'$, qui s'écrit aussi
$$Q := \{\alpha u' + \beta v';\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ |\alpha| + |\beta| \leq 1\}.$$

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}^2$, formant une famille libre, et soit T le triangle de sommets a, b et 0 (l'origine). Exprimer $\mathrm{Aire}(T)$ en fonction de $\mathrm{Det}(a,b)$.
2. Montrer que
   $$\mathrm{Aire}(Q) = \frac{2}{\lambda_1(M)\lambda_2(M)}.$$
3. Montrer que $Q \subset \overline{B}_M(1)$. En déduire que
   $$\lambda_1(M)\lambda_2(M) \geq \frac{2}{\pi}\sqrt{\det M}.$$
4. (a) Montrer que $\|v - u\|_M \geq \|v\|_M$ et $\|v + u\|_M \geq \|v\|_M$.
   (b) Montrer que $|\langle u', v' \rangle_M| \leq 1/2$.
   (c) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $|\alpha| + |\beta| \geq 1$. Montrer que $\alpha^2 + \beta^2 - |\alpha\beta| \geq 1/4$. En déduire que
   $$\|\alpha u' + \beta v'\|_M \geq 1/2.$$
   (d) Montrer que $\overline{B}_M(1/2) \subset Q$. Conclure que
   $$\frac{2}{\pi}\sqrt{\det M} \leq \lambda_1(M)\lambda_2(M) \leq \frac{8}{\pi}\sqrt{\det M}. \tag{1}$$

C Valeur moyenne des minima de Minkowski.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note R_θ la matrice de rotation d'angle θ :

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On note par une intégrale barrée la valeur moyenne d'une fonction f continue par morceaux sur le segment $[a, b]$:

$$⨍_a^b f(x)\,dx := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

La norme d'une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, est définie par $\|A\| := \max\{\|Ax\|;\ x \in \mathbb{R}^2,\ \|x\| \leq 1\}$.

I. Continuité des minima de Minkowski.

1. Soit $M' \in S_2^{++}$, et soit
$$\nu := \|M' - M\|/\mu_1(M)^2.$$
Si $\nu < 1$, montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^2$,
$$\sqrt{1-\nu}\,\|u\|_M \leq \|u\|_{M'} \leq \sqrt{1+\nu}\,\|u\|_M.$$
(Indication : étudier $\langle u, (M' - M)u\rangle$.)
2. Avec les notations de la question précédente, toujours sous l'hypothèse $\nu < 1$, montrer que
$$\begin{array}{ccccc} \sqrt{1-\nu}\,\lambda_1(M) & \leq & \lambda_1(M') & \leq & \sqrt{1+\nu}\,\lambda_1(M), \\ \sqrt{1-\nu}\,\lambda_2(M) & \leq & \lambda_2(M') & \leq & \sqrt{1+\nu}\,\lambda_2(M). \end{array}$$
3. Montrer que les minima de Minkowski λ_1 et λ_2 définissent des fonctions continues sur S_2^{++}.
4. En déduire que les valeurs moyennes suivantes sont bien définies
$$⨍_0^{2\pi} \lambda_1({}^tR_\theta M R_\theta)\,d\theta, \qquad ⨍_0^{2\pi} \lambda_2({}^tR_\theta M R_\theta)\,d\theta, \quad \text{et} \quad ⨍_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\lambda_1({}^tR_\theta M R_\theta)}.$$
5. Montrer que
$$⨍_0^{2\pi} \lambda_1({}^tR_\theta M R_\theta)\,d\theta \geq \left(⨍_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\lambda_1({}^tR_\theta M R_\theta)}\right)^{-1}.$$
6. Montrer que
$$⨍_0^{2\pi} \lambda_2({}^tR_\theta M R_\theta)\,d\theta \leq \frac{8}{\pi}\sqrt{\det M}\,⨍_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\lambda_1({}^tR_\theta M R_\theta)}.$$

II. Estimation d'une intégrale.

Soit $\mu \in [1, \infty[$, fixé. On suppose jusqu'à la fin de cette partie, dernière question exclue, que M est la matrice diagonale

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu^4 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Ainsi $\mu_1(M) = 1$ et $\mu_2(M) = \mu^2$. On introduit également une fonction de "seuil" E, définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par

$$\mathrm{E}(t) := \begin{cases} t & \text{si } t \geq \dfrac{1}{2\mu}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère l'ensemble de points

$$Z := \{z \in \mathbb{Z}^2;\ 1 \leq \|z\| \leq 2\mu\}.$$

Etant donné $z \in Z$, on s'intéresse à la valeur moyenne

$$I(z) := \fint_0^{2\pi} \mathrm{E}\left(\frac{1}{\|R_\theta z\|_M}\right) d\theta$$

1. Soit $z \in Z$, fixé dans cette série de questions. Montrer que

$$I(z) = \fint_0^{\pi/2} \mathrm{E}\left(\frac{1}{\|z\|\sqrt{\cos^2\theta + \mu^4 \sin^2\theta}}\right) d\theta$$

2. Soit $\theta \in [0, \pi/2]$. Montrer que $\sin(\theta) \geq 2\theta/\pi$, puis en déduire que

$$\sqrt{\cos^2\theta + \mu^4 \sin^2\theta} \geq \max(1, 2\mu^2\theta/\pi).$$

(Indication : établir puis utiliser la concavité de la fonction sin, sur le segment $[0, \pi/2]$.)

3. On définit une fonction J sur le segment $r \in [1, 2\mu]$, par

$$J(r) = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2\mu^2}} \frac{d\theta}{r} + \int_{\frac{\pi}{2\mu^2}}^{\frac{\pi}{\mu r}} \frac{\pi d\theta}{2\mu^2\theta r}\right)$$

En combinant les résultats des deux questions précédentes, montrer que $I(z) \leq J(\|z\|)$. (Indication : découper le segment $[0, \pi/2]$ en parties sur lesquelles la fonction $\theta \mapsto \mathrm{E}(1/(\|z\| \max(1, 2\mu^2\theta/\pi))$ a une expression simple.)

4. Montrer que, pour $r \in [1, 2\mu]$,

$$J(r) = \frac{1}{\mu^2 r} \ln\left(\frac{2e\mu}{r}\right).$$

III. Valeur moyenne de l'inverse du premier minimum de Minkowski.

M, E, Z, I et J sont comme dans le paragraphe précédent.

1. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$, fixé. Montrer que $\lambda_1({}^tR_\theta M R_\theta) = \min\{\|R_\theta z\|_M;\ z \in Z\}$. (Indication : utiliser (1).) En déduire que

$$\frac{1}{\lambda_1({}^tR_\theta M R_\theta)} = \max_{z \in Z} \mathrm{E}\left(\frac{1}{\|R_\theta z\|_M}\right)$$

2. Déduire de la question précédente que

$$\fint_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\lambda_1({}^tR_\theta M R_\theta)} \leq \sum_{z \in Z} I(z).$$

3. Pour tout entier $k \geq 1$, on note $Z_k := \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2;\ \max(|x|,|y|) = k\}$.
   (a) Montrer que Z est inclus dans la réunion des $(Z_k)_{1\leq k\leq 2\mu}$.
   Exprimer $\mathrm{Card}(Z_k)$ en fonction de k.
   (b) Montrer que
   $$\sum_{z\in Z} I(z) \leq \sum_{1\leq k\leq 2\mu} \mathrm{Card}(Z_k) J(k).$$
   (Indication : remarquer que J est décroissante sur son intervalle de définition.)
   (c) Montrer qu'il existe une constante C, indépendante de μ, telle que
   $$\sum_{1\leq k\leq 2\mu} kJ(k) \leq C/\mu.$$
   (Indication : établir et utiliser que $\sum_{k=1}^{n} \ln k \geq n\ln n - n$, pour tout entier $n \geq 1$.)
   (d) Etablir que
   $$⨍_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\lambda_1({}^tR_\theta M R_\theta)} \leq 8C/\mu.$$
4. Conclure que, pour des constantes positives c_1, c_2 que l'on précisera,
$$c_1(\det M)^{\frac{1}{4}} \leq ⨍_0^{2\pi} \lambda_1({}^tR_\theta M R_\theta)\, d\theta \leq ⨍_0^{2\pi} \lambda_2({}^tR_\theta M R_\theta)\, d\theta \leq c_2(\det M)^{\frac{1}{4}}.$$
5. Montrer que le résultat précédent est valable pour toute matrice $M \in S_2^{++}$ (pas forcément de la forme (2)).
6. Comparer les estimations des questions A.II.3 et C.III.4, et interpréter la figure 1.

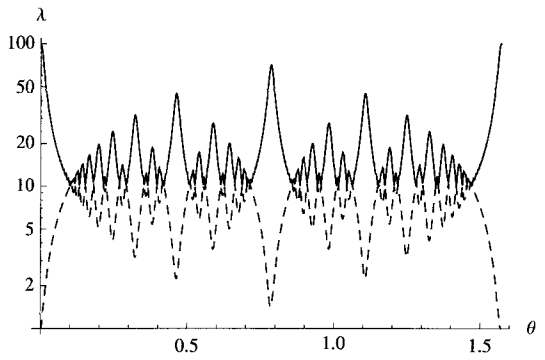

FIGURE 1 – Courbe en tirets : $\lambda_1({}^tR_\theta M R_\theta)$, pleine : $\lambda_2({}^tR_\theta M R_\theta)$. En fonction de $\theta \in [0, \pi/2]$. Ici M est une matrice diagonale, $\mu_1(M) = 1$, $\mu_2(M) = 100$. Echelle logarithmique sur l'axe des ordonnées.

D Norme euclidienne des éléments d'une base réduite

Pour toute matrice $M \in S_2^{++}$, on note

$$\kappa(M) := \mu_2(M)/\mu_1(M).$$

I. Bornes uniformes.

1. Soit $M \in S_2^{++}$ et soit (u, v) une base M-réduite du réseau $\mathbb{Z}^2$. Montrer que

$$1 \leq \min(\|u\|, \|v\|) \leq \max(\|u\|, \|v\|) \leq \kappa(M).$$

2. Dans ces deux questions, on se donne un entier $\mu \geq 1$. On considère

$$M := \begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ -\mu & 2\mu^2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix},$$

   (a) Montrer que u, v est une base M-réduite du réseau $\mathbb{Z}^2$.

   (b) Montrer que $\|v\| \geq \kappa(M)/2$.

II. Borne supérieure en moyenne.

On choisit, pour toute matrice $M \in S_2^{++}$, une base M-réduite $(u(M), v(M))$ du réseau $\mathbb{Z}^2$. On admet que les fonctions suivantes sont constantes par morceaux, quelle que soit $M \in S_2^{++}$:

$$\begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}_+ \\ \theta & \mapsto & \|u({}^tR_\theta M R_\theta)\| \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}_+ \\ \theta & \mapsto & \|v({}^tR_\theta M R_\theta)\| \end{array}$$

Montrer qu'il existe une constante C_2, que l'on précisera, telle que pour toute $M \in S_2^{++}$

$$\fint_0^{2\pi} \max\left(\|u({}^tR_\theta M R_\theta)\|, \|v({}^tR_\theta M R_\theta)\|\right) d\theta \leq C_2\sqrt{\kappa(M)}.$$

Comparer cette estimation avec la borne uniforme obtenue en D.I.1, et interpréter.