Composition C
ENS 2015 - MP

On définit, pour tout le problème, la fonction gaussienne $G : \mathbf{R} \longmapsto \mathbf{R}$ donnée par $G(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.
Pour une fonction f bornée sur $\mathbf{R}$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbf{R}} |f|$.

PARTIE I

1) a. Pour t dans $\mathbf{R}_+^*$ on pose

$$A(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2} \, \mathrm{d}x \right)^2 \quad \text{et} \quad B(t) = -\int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \; .$$

À l'aide du changement de variables $x = ty$ montrer que les fonctions A et B ont la même dérivée.

b. En déduire

$$\int_{\mathbf{R}} G(x) \, \mathrm{d}x = 1 \; .$$

2) Étant donné une fonction g bornée continue sur $\mathbf{R}$, résoudre l'équation différentielle $y' - xy = g(x)$.

3) Étant donné une fonction f bornée continue sur $\mathbf{R}$ et en posant $\langle f \rangle = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x) G(x) \, \mathrm{d}x$, montrer que la fonction donnée par

$$\varphi(x) = e^{x^2/2} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} \left(f(t) - \langle f \rangle \right) \mathrm{d}t$$

est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et est solution de l'équation différentielle $y' - xy = f(x) - \langle f \rangle$.

Montrer également, pour x réel, $\varphi(x) = -e^{x^2/2} \displaystyle\int_{x}^{+\infty} e^{-t^2/2} \left(f(t) - \langle f \rangle \right) \mathrm{d}t$.

4) Montrer, pour tous nombres réels x et t, $e^{-t^2/2} \leq e^{-x^2/2} e^{-x(t-x)}$ et

$$|\varphi(x)| \leq \frac{C_0 \, \|f\|_\infty}{1 + |x|} \; ,$$

avec $C_0 \leq \max(4, 2\sqrt{2\pi e})$. Pour ce faire on distinguera les cas $x \geq 1$, $x \leq -1$ et $-1 < x < 1$. En déduire que φ' est borné sur $\mathbf{R}$.

5) On suppose dans tout le reste de cette partie en outre que f est de classe C^1 avec f' borné sur $\mathbf{R}$. Montrer, pour x réel,

$$\varphi(x) = -\int_{\mathbf{R}_+} e^{-u^2/2} e^{-ux} \left(f(x+u) - \langle f \rangle \right) \mathrm{d}u$$

et en déduire

$$(1 + |x|) \, |\varphi'(x)| \leq C \left(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \right) \; ,$$

où C est une constante indépendante de f. En définissant C_1 comme la meilleure constante possible dans cette inégalité, en proposer une majoration explicite.

6) Justifier que φ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ et qu'on a $\|\varphi''\|_\infty \leq C \left(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \right)$, pour une constante C indépendante de f. En définissant C_2 comme la meilleure constante possible dans cette inégalité, en proposer une majoration explicite.

PARTIE II

Soit $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions réelles positives et continues par morceaux.

1) En utilisant une intégration par parties, que l'on justifiera, montrer que, pour toute fonction φ de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ avec φ et φ' bornés sur $\mathbf{R}$, on a

$$\int_{\mathbf{R}} G(x)\left(\varphi'(x) - x\varphi(x)\right) \mathrm{d}x = 0 \ .$$

2) On suppose pour cette question que tout élément de la suite (g_n) vérifie $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g_n = 1$ et qu'on a, pour toute fonction h de classe C^1 avec h et h' bornés,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{R}} g_n(x)\left(h'(x) - xh(x)\right) \mathrm{d}x = 0 \ .$$

Montrer, en utilisant les résultats de la partie I, que pour toute fonction f continue et bornée sur $\mathbf{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{R}} g_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} G(x)f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

3) On suppose pour cette question que la suite $\displaystyle\left(\int_{\mathbf{R}} x^2 g_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$ est bien définie et majorée par un réel M, et que pour toute fonction f bornée de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{R}} g_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} G(x)f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

On se donne une fonction h de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ avec h et h' bornés sur $\mathbf{R}$. On fixe également une famille $(\chi_R)_{R\in\mathbf{R}_+^*}$ de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $[0;1]$ et telles que χ_R soit identiquement égale à 1 sur le segment $[-R;R]$ et nulle en dehors du segment $[-R-1;R+1]$. (On ne demande pas de justifier l'existence d'une telle famille.)

a. Justifier que si h est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et nulle en dehors d'un segment, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{R}} g_n(x)\left(h'(x) - xh(x)\right) \mathrm{d}x = 0 \ .$$

b. Montrer qu'il existe un réel strictement positif K tel que, pour tout entier naturel n, on ait

$$\forall R \in [1;+\infty[\qquad \left|\int_{\mathbf{R}} (1-\chi_R(x))g_n(x)\left(h'(x) - xh(x)\right) \mathrm{d}x\right| \leq \frac{K}{R} \ .$$

c. Si h est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, montrer

$$\lim_{R\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{R}} \chi_R(x)g_n(x)\left(h'(x) - xh(x)\right) \mathrm{d}x\right) = 0 \ .$$

d. Montrer le résultat précédent sans supposer h de classe C^∞.

e. Déduire des questions précédentes qu'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{R}} g_n(x)\left(h'(x) - xh(x)\right) \mathrm{d}x = 0 \ .$$

PARTIE III

Dans toute cette partie et la suivante $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs réelles, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, **indépendantes, centrées, réduites et uniformément bornées en valeur absolue par une constante** M.

On pose, pour n dans $\mathbf{N}^*$, $Z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n)$.

Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ avec f et f' bornés sur $\mathbf{R}$ et φ défini comme en question I.3.

1) Vérifier $\mathbf{E}\left(\varphi'(Z_n) - Z_n\varphi(Z_n)\right) = \mathbf{E}\left(f(Z_n) - \langle f\rangle\right)$.

2) Pour i dans $[\![1;n]\!]$, on pose $Z_{n,i} = Z_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}}X_i = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{\substack{1\le k\le n\\ k\neq i}} X_k$. En utilisant la partie I, montrer

$$\left|X_i\varphi(Z_n) - X_i\varphi(Z_{n,i}) - \frac{X_i^2}{\sqrt{n}}\varphi'(Z_{n,i})\right| \le \frac{C_2}{2}\frac{|X_i|^3}{n}\left(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\right) .$$

3) En déduire $\left|\mathbf{E}\left(Z_n\varphi(Z_n)\right) - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left(\varphi'(Z_{n,i})\right)\right| \le \dfrac{C_2 M}{2\sqrt{n}}\left(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\right)$.

4) Montrer de même $\left|\mathbf{E}\left(\varphi'(Z_n)\right) - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left(\varphi'(Z_{n,i})\right)\right| \le \dfrac{C_2}{\sqrt{n}}\left(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\right)$.

5) En déduire $\left|\mathbf{E}\left(f(Z_n)\right) - \displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x)G(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \dfrac{C_2(2+M)}{2\sqrt{n}}\left(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\right)$.

6) Montrer qu'il existe une constante C_3 telle que, pour tout réel a on ait

$$\left|\mathbf{P}\left(Z_n < a\right) - \int_{-\infty}^{a} G(x)\,\mathrm{d}x\right| \le C_3 n^{-1/4} .$$

   On pourra par exemple encadrer la fonction indicatrice de $]-\infty; a[$ par des fonctions bien choisies.

PARTIE IV

Soit t dans $\mathbf{R}_+$, i et n dans $\mathbf{N}^*$ et δ dans $\mathbf{R}_+^*$.

1) a. En utilisant une propriété de convexité montrer $\mathbf{E}\left(e^{tX_i}\right) \le \dfrac{1}{2}\left(e^{tM} + e^{-tM}\right)$.

   b. Montrer $\dfrac{1}{2}\left(e^{tM} + e^{-tM}\right) \le e^{t^2M^2/2}$.

2) En déduire $\mathbf{P}\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \ge \delta\right) \le e^{-n\delta^2/2M^2}$.

3) Comparer ce résultat à celui de la question III.6 : quelle est la meilleure estimation quand n tend vers l'infini ? (discuter selon les cas)

4) Soit f et Φ donnés par $f(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$, pour x non nul, et $\Phi(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$ pour x positif. On prolonge f par continuité en 0.

   a. Montrer $f(tX_i) \le f(tM)$.

   b. En déduire $\mathbf{E}\left(e^{tX_i}\right) \le e^{t^2 f(tM)}$ puis l'amélioration suivante du résultat précédent

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ge \delta\right) \le e^{-n\Phi(M\delta)/M^2} .$$

COMPOSITION C – ENS 2015 - MP

PARTIE I

1) a. L'exponentielle et les fonctions polynomiales étant de classe C^∞, il en va de même pour les intégrandes définissant A et B, ce qui montre que A et B sont bien définis. En notant F la primitive de $x \longmapsto e^{-x^2}$ sur $\mathbf{R}$ s'annulant en 0, on a $A = F^2$ et donc $A' = 2FF'$, soit pour t dans $\mathbf{R}_+^*$, $A'(t) = 2e^{-t^2} \int_0^t e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. En utilisant le changement de variable $x = ty$ linéaire bijectif (car $t \neq 0$), on a également

$$A'(t) = 2te^{-t^2} \int_0^1 e^{-t^2y^2}\,\mathrm{d}y = 2t \int_0^t e^{-t^2(1+y^2)}\,\mathrm{d}y\ .$$

Soit f l'intégrande définissant B. Comme f est de classe C^∞ en les deux variables, f et $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ sont en particulier continus comme fonction de x dans $[0;1]$, et bornés sur tout compact, d'après le théorème de WEIERSTRASS. Soit alors r dans $\mathbf{R}_+$ et M un majorant de $|f(x,t)|$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right|$ pour (x,t) dans $[0;1] \times [0;r]$. Comme la fonction constante égale à M est continue, positive et intégrable sur $[0;1]$, on peut appliquer le théorème de LEIBNIZ, dit de dérivation sous le signe intégral, et en déduire que B est de classe C^1 sur $]0;r]$, de dérivée donnée par

$$B'(t) = -\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2te^{-t^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\,,$$

et donc B est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\boxed{A' = B'.}$

b. Il en résulte que $A - B$ est une fonction constante et les arguments précédents montrent qu'elle est définie et continue sur $\mathbf{R}_+$. Comme en 0 elle vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$, i.e. $\dfrac{\pi}{4}$, sa limite pour t tendant vers $+\infty$ également. Comme la fonction f posée précédemment, i.e. l'intégrande définissant B, est majorée en valeur absolue sur $\mathbf{R}^2$ par 1, qui est une fonction continue, positive et intégrable sur le compact $[0;1]$, et, à x fixé, tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, il résulte du théorème de convergence dominée qu'on a $\lim\limits_{+\infty} B = 0$, et donc $\lim\limits_{+\infty} A = \dfrac{\pi}{4}$. Comme l'intégrande définissant A est positif, il est intégrable sur $\mathbf{R}_+$ si et seulement si l'intégrale sur $[0;t]$ admet une limite lorsque t tend vers $+\infty$. Toujours par positivité et par continuité de la racine carrée et du carré sur $\mathbf{R}_+$, cette dernière propriété est équivalente à l'existence de $\lim\limits_{+\infty} A$. On en déduit

$$\int_{\mathbf{R}_+} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\lim_{+\infty} A} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et donc, par changement de variable linéaire bijectif $x = t/\sqrt{2}$

$$\int_{\mathbf{R}_+} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{R}} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}\,,$$

par parité de l'intégrande. On en déduit $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbf{R}} G = 1.}$

2) Puisque G est nulle part nulle et telle que $1/G$ est solution de l'équation homogène $y' - xy = 0$, l'équation proposée se récrit $(yG)' = gG$. Puisque g est continu sur $\mathbf{R}$, il en va de même pour gG, qui admet donc des primitives et donc les solutions de l'équation différentielle proposée sont données par un réel a et la formule, pour x réel, $\boxed{\displaystyle y(x) = ae^{x^2/2} + \int_0^x \frac{g(t)G(t)}{G(x)}\,\mathrm{d}t = ae^{x^2/2} + \int_0^x g(t)e^{(x^2-t^2)/2}\,\mathrm{d}t.}$

3) Si f est continu sur $\mathbf{R}$, il en va de même pour fG et si f est borné sur $\mathbf{R}$, on a $fG = O(G)$ et donc fG est intégrable sur $\mathbf{R}$ puisque G l'est et $\langle f\rangle$ est bien défini. La fonction constante égale à $\langle f\rangle$ étant continue et bornée sur $\mathbf{R}$, la question précédente montre que la fonction $x \mapsto e^{-x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}\langle f\rangle\,\mathrm{d}t$ est solution de $y' - xy = \langle f\rangle$. Par principe de superposition la fonction $x \mapsto e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}(f-\langle f\rangle)\,\mathrm{d}t$ est solution de $y' - xy = f(x) - \langle f\rangle$. Comme f est borné sur $\mathbf{R}$, on a $(f-\langle f\rangle)G = O(G)$ et donc $(f-\langle f\rangle)G$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ et on peut définir $a = \int_{\mathbf{R}_-} e^{-t^2/2}(f(t)-\langle f\rangle)\,\mathrm{d}t$. Comme a/G est solution de l'équation homogène $y' - xy = 0$, encore par superposition, on en déduit que

$$x \mapsto e^{x^2/2}\int_{-\infty}^0 e^{-t^2/2}(f(t)-\langle f\rangle)\,\mathrm{d}t + e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}(f-\langle f\rangle)\,\mathrm{d}t = e^{x^2/2}\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}(f(t)-\langle f\rangle)\,\mathrm{d}t$$

est solution de $y' - xy = f - \langle f\rangle$, i.e. φ est solution de cette équation différentielle. On en déduit que φ' est combinaison algébrique de fonctions continues et est donc continu. Il en résulte que $\boxed{\varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbf{R} \text{ et est solution de } y' - xy = f - \langle f\rangle.}$

Par définition et en utilisant la question 1b on a

$$\langle f\rangle \int_{\mathbf{R}} G = \langle f\rangle = \int_{\mathbf{R}} fG \quad \text{i.e.} \quad \int_{\mathbf{R}} G(f-\langle f\rangle) = 0$$

et donc, en multipliant par $\sqrt{2\pi}$ et en utilisant la relation de Chasles, il vient, pour x réel,

$$\boxed{\varphi(x) = -e^{x^2/2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}(f(t)-\langle f\rangle)\,\mathrm{d}t.}$$

4) Par concavité de $t \mapsto -\dfrac{t^2}{2}$, pour x et t réels et en utilisant la tangente en x, on a $-\frac{t^2}{2} \leq -\frac{x^2}{2} - x(t-x)$.

Par croissance et propriété de morphisme de l'exponentielle, il vient $\boxed{e^{-t^2/2} \leq e^{-x^2/2}e^{-x(t-x)}.}$

On remarque tout d'abord qu'on a $|fG| \leq \|f\|_\infty G$ par positivité de G et donc, par intégrabilité de G, inégalité de la moyenne et la question 1b, on a $|\langle f\rangle| \leq \|f\|_\infty$ et donc $\|f-\langle f\rangle\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$, par inégalité triangulaire. Par inégalité de la moyenne on en déduit

$$|\varphi(x)| \leq 2\|f\|_\infty \int_{-\infty}^x e^{x^2/2}e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = 2\|f\|_\infty \int_{-x}^{+\infty} e^{x^2/2}e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$

en effectuant le changement variable affine bijectif $t \mapsto -t$, et

$$|\varphi(x)| \leq 2\|f\|_\infty \int_x^{+\infty} e^{x^2/2}e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\,,$$

en utilisant la seconde formule pour φ. Il vient

$$|\varphi(x)| \leq 2\|f\|_\infty \int_{|x|}^{+\infty} e^{|x|^2/2}e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\ .$$

Pour $x \leq -1$ ou $x \geq 1$, en utilisant l'inégalité du début de question et l'inégalité de la moyenne, on a par changement de variable affine bijectif $t = |x| + u$

$$\int_{|x|}^{+\infty} e^{|x|^2/2}e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \leq \int_{\mathbf{R}_+} e^{-|x|u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{|x|} \leq \frac{2}{1+|x|}\,,$$

puisqu'on a $|x| \geq 1$ et donc $1+|x| \leq 2|x|$. Si au contraire $|x| < 1$ on a, puisque l'intégrande est positif et par croissance de l'intégrale,

$$\int_{|x|}^{+\infty} e^{|x|^2/2}e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{e}\int_{\mathbf{R}_+} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi e} \leq \frac{\sqrt{2\pi e}}{1+|x|}$$

et, finalement, on dispose de C_0 inférieur à $2\sqrt{2\pi e}$, i.e. à $\max(4, 2\sqrt{2\pi e})$, vérfiant $\boxed{\varphi(x) \leq \dfrac{C_0\,\|f\|_\infty}{1+|x|}.}$

Puisque φ est solution de l'équation différentielle $y' - xy = f(x) - \langle f\rangle$, par inégalité triangulaire, pour x réel, on a $|\varphi'(x)| \leq |x\varphi(x)| + 2\,\|f\|_\infty \leq (C_0+2)\,\|f\|_\infty$ et donc $\boxed{\varphi' \text{ est borné sur } \mathbf{R}.}$

5) Pour x réel, par changement de variable affine bijectif $t = x+u$ on a, en utilisant la seconde formule de la question 3 et l'identité $\dfrac{x^2-(x+u)^2}{2} = -ux - \dfrac{u^2}{2}$, $\boxed{\varphi(x) = -\displaystyle\int_{\mathbf{R}_+} e^{-u^2/2}e^{-ux}(f(x+u)-\langle f\rangle)\,\mathrm{d}u.}$

En utilisant la définition de φ, il vient, avec le changement de variable affine bijectif $t = x-u$, $\varphi(x) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}_+} e^{-u^2/2}e^{ux}(f(x-u)-\langle f\rangle)\,\mathrm{d}u.$

Soit h une fonction de classe C^1, bornée sur $\mathbf{R}$ ainsi que sa dérivée, et $g_\pm$ définies sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+$ par $g_\pm(x,u) = e^{-u^2/2}e^{\mp ux}h(x\pm u)$. Alors $g_\pm$ est de classe C^1 en les deux variables x et u, et $\dfrac{\partial g_\pm}{\partial x}$ est donné par $e^{-u^2/2}e^{\mp ux}(h'(x\pm u) \mp uh(x\pm u))$. Puisque h et h' sont bornés sur $\mathbf{R}$, disons par M, pour $|x| \leq a$ avec a dans $\mathbf{R}_+^*$ et u réel, $\left|\dfrac{\partial g_\pm}{\partial x}(x,u)\right| \leq Me^{-u^2/2}e^{a|u|}(|u|+1)$ et cette dernière expression est indépendante de x, continue en u sur $\mathbf{R}$, positive et dans $O\left(e^{-u^2/4}\right)$, donc intégrable sur $\mathbf{R}$. Il résulte du théorème de LEIBNIZ qu'on peut dériver sous le signe intégral et obtenir, pour x réel quelconque (puisque a l'était) et en prenant $h = f - \langle f\rangle$,

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbf{R}_+}\frac{\partial g_+}{\partial x}(x,u)\,\mathrm{d}u &= \int_{\mathbf{R}_+} ue^{-u^2/2}e^{-ux}(f(x+u)-\langle f\rangle)\,\mathrm{d}u - \int_{\mathbf{R}_+} e^{-u^2/2}e^{-ux}f'(x+u)\,\mathrm{d}u\\
\int_{\mathbf{R}_+}\frac{\partial g_-}{\partial x}(x,u)\,\mathrm{d}u &= \int_{\mathbf{R}_+} ue^{-u^2/2}e^{ux}(f(x-u)-\langle f\rangle)\,\mathrm{d}u + \int_{\mathbf{R}_+} e^{-u^2/2}e^{ux}f'(x-u)\,\mathrm{d}u\,,\\
\text{d'où}\quad |\varphi'(x)| &\leq 2\,\|f\|_\infty\int_{\mathbf{R}_+} ue^{-u^2/2}e^{-u|x|}\,\mathrm{d}u + \|f'\|_\infty\int_{\mathbf{R}_+} e^{-u^2/2}e^{-u|x|}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

par inégalité de la moyenne. Par changement de variable affine bijectif on a

$$0 \leq \int_{\mathbf{R}_+} e^{-u^2/2}e^{-u|x|}\,\mathrm{d}u \leq e^{-x^2/2}\int_{|x|}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \leq \frac{C_0}{1+|x|}$$

d'après la question précédente. Par ailleurs, pour x non nul, il vient par intégration par parties

$$\int_{\mathbf{R}_+} ue^{-u^2/2}e^{-u|x|}\,\mathrm{d}u \quad\leq\quad 1 - x\int_{\mathbf{R}_+} e^{-u^2/2}e^{-u|x|}\,\mathrm{d}u = \int_{\mathbf{R}_+}\left(1-e^{-t^2/2x^2}\right)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

car $\int ue^{-u^2/2}e^{-ux}\,\mathrm{d}u = -e^{-u^2/2}e^{-ux} - x\int e^{-u^2/2}e^{-ux}\,\mathrm{d}u$ et par changement de variable bijectif $t = ux$ et puisqu'on a $\int_{\mathbf{R}_+} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$. Par positivité et convéxité de l'exponentielle et croissance de l'intégrale, on a

$$0 \leq \int_{\mathbf{R}_+}\left(1-e^{-t^2/2x^2}\right)e^{-t}\,\mathrm{d}t \leq \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbf{R}_+} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 \leq \frac{2}{1+|x|} & \text{si } 0<|x|<1\\ \displaystyle\frac{1}{2x^2}\int_{\mathbf{R}_+} t^2e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2} \leq \frac{2}{1+|x|} & \text{si } |x|\geq 1\end{cases}$$

puisque $1+|x| \leq 1+1 = 2$ dans le premier cas et $1+|x| \leq x^2+x^2 = 2x^2$ dans le second. On en déduit, puisque ces dernières majorations sont également vraies si $x=0$, qu'on a

$$|\varphi'(x)| \leq \frac{4\,\|f\|_\infty}{1+|x|} + \frac{C_0\,\|f'\|_\infty}{1+|x|}$$

et donc, par inégalité triangulaire et en posant $C = \max(4, C_0)$, $\boxed{(1+|x|)\,|\varphi'(x)| \leq C(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).}$

Au vu de la définition de C_0, on a $\boxed{C_1 \leq \max(4, 2\sqrt{2\pi e}) = 2\sqrt{2\pi e}.}$

6) Puisque φ satisfait l'équation différentielle $y' - xy = f(x) - \langle f \rangle$, φ' est combinaison algébrique de fonctions de classe C^1, et est donc de classe C^1, i.e. $\boxed{\varphi \text{ est de classe } C^2.}$
Comme, pour x réel, on a $\varphi''(x) = \varphi(x) + x\varphi'(x) + f'(x)$, il vient par inégalité triangulaire

$$|\varphi''(x)| \leq |\varphi(x)| + (1+|x|)\,|\varphi'(x)| + \|f'\|_\infty$$

et donc, en utilisant les questions précédentes et en posant $C = \max(C_0 + C_1, C_1 + 1)$,
$\boxed{|\varphi''| \leq C(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).}$
Vu le choix de C, on a $\boxed{C_2 \leq 4\sqrt{2\pi e}.}$

PARTIE II

1) Puisque φ est de classe C^1, $G'\varphi$ et $G\varphi'$ sont continus et donc localement intégrables sur $\mathbf{R}$. Puisque φ et sa dérivée sont bornées, ces deux fonctions sont dans $O\left(|x|\,G(x)\right)$ au voisinage de l'infini et donc, par comparaison avec une fonction positive intégrable, $G'\varphi$ et $G\varphi'$ sont intégrables sur $\mathbf{R}$. Comme on a $(G\varphi)' = G\varphi' - \mathrm{Id}G\varphi = G(\varphi' - \mathrm{Id}\varphi)$, il en va de même pour $(G\varphi)'$ et comme $G\varphi = O\left(G\right) = o\left(1\right)$, on a $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbf{R}} G(x)(\varphi'(x) - x\varphi(x))\,\mathrm{d}x = 0.}$

2) Soit f continu et borné sur $\mathbf{R}$ et φ la fonction associée à f par la question I.3. Alors, en utilisant la question I.4, φ est de classe C^1 et borné ainsi que sa dérivée. Comme φ est solution de $y' - xy = f(x) - \langle f \rangle$, il vient en utilisant l'hypothèse sur la suite (g_n), $\lim \displaystyle\int_{\mathbf{R}} g_n(f - \langle f \rangle) = 0$. Or, par linéarité de l'intégrale et hypothèse sur les fonctions (g_n), on a $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g_n(f - \langle f \rangle) = \int_{\mathbf{R}} g_n f - \langle f \rangle = \int_{\mathbf{R}} g_n f - \int_{\mathbf{R}} Gf$ et on en déduit $\boxed{\lim \displaystyle\int_{\mathbf{R}} g_n(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} G(x) f(x)\,\mathrm{d}x.}$

3) a. On suppose h de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et à support compact. Alors il en va de même pour h' et donc aussi pour la fonction f donnée par $f(x) = h'(x) - xh(x)$. Étant continue sur son support et ce dernier étant compact, on déduit du théorème de WEIERSTRASS que f est bornée sur son support et donc sur $\mathbf{R}$ puisqu'elle est nulle en dehors de son support. Comme f est bornée et de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, il résulte de l'hypothèse faite sur (g_n) qu'on a

$$\lim \int_{\mathbf{R}} g_n(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} G(x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

et donc d'après la question 1, puisque h est en particulier de classe C^1 et que h et h' sont bornées $\boxed{\lim \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)(h'(x) - xh(x))\,\mathrm{d}x = 0.}$

b. Soit ε strictement positif, n entier et R dans $\mathbf{R}_+^*$. Puisque les fonctions χ_R, h et h' sont bornées sur $\mathbf{R}$, on a au voisinage de l'infini

$$(1 - \chi_R(x))\, g_n(x)(h'(x) - xh(x)) = O\left(xg_n(x)\right) = O\left(x^2 g_n(x)\right)$$

et donc le membre de droite est localement intégrable au voisinage de $\pm\infty$. Comme on a affaire à des fonctions continues, donc localement intégrables sur $\mathbf{R}$, le membre de droite est donc intégrable sur $\mathbf{R}$. Comme il est de plus nul sur $[-R;R]$ par définition de χ_R et que, pour $|x| \geq R$, on a

$$|(1-\chi_R(x))\, g_n(x)(h'(x)-xh(x))| \leq \frac{\|h'\|_\infty + R\,\|h\|_\infty}{R^2} x^2 g_n(x)$$

en notant $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur $\mathbf{R}$, il vient, par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale, pour $R \geq 1$

$$\left|\int_{\mathbf{R}} (1-\chi_R(x))\, g_n(x)(h'(x)-xh(x))\,\mathrm{d}x\right| \leq (\|h'\|_\infty + \|h\|_\infty)\frac{M}{R}\ .$$

Donc pour $K = M(\|h'\|_\infty + \|h\|_\infty)$, on a $\boxed{\left|\int_{\mathbf{R}} (1-\chi_R(x))\, g_n(x)(h'(x)-xh(x))\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{K}{R}.}$

c. On suppose h de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et telle que h et h' sont bornés sur $\mathbf{R}$. Soit R strictement positif et f la fonction donnée par $f(x) = \chi_R(x)(h'(x)-xh(x))$. En tant que composé algébrique de telles fonctions, f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. Comme χ_R est à support compact, il en va de même pour f et, d'après le théorème de Weierstrass f est bornée sur son support donc sur $\mathbf{R}$. Il résulte de l'hypothèse faite sur la suite (g_n) qu'on a

$$\lim \int_{\mathbf{R}} \chi_R(x) g_n(x)(h'(x)-xh(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \chi_R(x) G(x)(h'(x)-xh(x))\,\mathrm{d}x\ .$$

Grâce à la question 1, puisque h est en particulier de classe C^1 et que h et h' sont bornées, on en déduit

$$\lim \int_{\mathbf{R}} \chi_R(x) g_n(x)(h'(x)-xh(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} (\chi_R(x)-1) G(x)(h'(x)-xh(x))\,\mathrm{d}x$$

et donc, par inégalité triangulaire,

$$\left|\lim \int_{\mathbf{R}} \chi_R(x) g_n(x)(h'(x)-xh(x))\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{\mathbf{R}} |1-\chi_R(x)|\, G(x)\,|h'(x)-xh(x)|\,\mathrm{d}x\ .$$

Par relation de Chasles et puisque $(Gh)'$, i.e. $G(h'-\mathrm{Id}h)$, est intégrable, comme vu à la question 1, il vient

$$\left|\lim \int_{\mathbf{R}} \chi_R(x) g_n(x)(h'(x)-xh(x))\,\mathrm{d}x\right| \leq \left(\int_{-\infty}^{-R} (Gh)'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{R}^{+\infty} (Gh)'(x)\,\mathrm{d}x\right) = o\,(1)\ .$$

D'où $\boxed{\lim_{R\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbf{R}} \chi_R(x) g_n(x)(h'(x)-xh(x))\,\mathrm{d}x\right) = 0.}$

d. Soit R dans $\mathbf{R}_+^*$. Puisque h' est continue sur le segment $[-R-1;R+1]$, le théorème d'approximation de Weierstrass permet de disposer d'une suite (Q_k) dans $\mathbf{R}[X]$ tel que (Q_k) converge uniformément vers h' sur $[-R-1;R+1]$. Soit alors (P_k) la suite de polynôme telle que P_k soit la primitive de Q_k prenant la même valeur que h en 0. Par convergence simple de (P_k) en 0 et convergence uniforme de (P_k'), on en déduit que (P_k) converge uniformément vers h sur $[-R-1;R+1]$. On note $h_k = h - P_k$ de sorte qu'on a $\|h_k' - \mathrm{Id}h_k\|_\infty \leq \|h_k'\|_\infty + (R+1)\,\|h_k\|_\infty$ et donc $(h_k' - \mathrm{Id}h_k)$ converge uniformément vers 0 sur $[-R-1;R+1]$. Enfin comme 1 est une fonction bornée et de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, $\lim \int_{\mathbf{R}} g_n = \int_{\mathbf{R}} G = 1$ de sorte qu'on dispose de A dans $\mathbf{R}_+$ majorant la suite positive $\left(\int_{\mathbf{R}} g_n\right)$. Pour k et n entiers on a par inégalité de la moyenne et positivité de g_n et G

$$\left|\int_{\mathbf{R}} \chi_R(x)(g_n - G)(x)(h_k'(x) - xh_k(x))\,\mathrm{d}x\right| \leq \|h_k' - \mathrm{Id}h_k\|_\infty \int_{-R-1}^{R+1} (g_n + G) \leq (1+A)\,\|h_k' - \mathrm{Id}h_k\|_\infty$$

et, pour k entier, puisque P_k est de classe C^∞ et donc $\chi_R(P_k' - \mathrm{Id}P_k)$ est de classe C^∞ et bornée sur $\mathbf{R}$,

$$\lim \int_{\mathbf{R}} \chi_R(x)(g_n - G)(x)(P_k'(x) - xP_k(x))\,\mathrm{d}x = 0\ .$$

Pour ε dans $\mathbf{R}_+^*$, on dispose de k entier tel que $\|h_k' - \mathrm{Id}h_k\|_\infty \leq \varepsilon$ et de n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on ait

$$\left|\int_{\mathbf{R}} \chi_R(x)(g_n - G)(x)(P_k'(x) - xP_k(x))\,\mathrm{d}x\right| \leq \varepsilon$$

et donc, par inégalité triangulaire,

$$\left|\int_{\mathbf{R}} \chi_R(x)(g_n - G)(x)(h'(x) - xh(x))\,\mathrm{d}x\right| \leq (2 + A)\varepsilon\,,$$

i.e. par linéarité de la limite et de l'intégrale

$$\lim \int_{\mathbf{R}} \chi_R(x) g_n(x)(h'(x) - xh(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \chi_R(x) G(x)(h'(x) - xh(x))\,\mathrm{d}x\ .$$

La fin de la démonstration de la question précédente ne supposant pas h de classe C^∞, on conclut

$$\boxed{\lim_{R\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{R}} \chi_R(x) g_n(x)(h'(x) - xh(x))\,\mathrm{d}x\right) = 0.}$$

e. Soit ε dans $\mathbf{R}_+^*$. D'après les questions 3d et 3b, on dispose de R tel que

$$\left|\lim \int_{\mathbf{R}} \chi_R(x) g_n(x)(h'(x) - xh(x))\,\mathrm{d}x\right| \leq \varepsilon \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}\ \left|\int_{\mathbf{R}} (1 - \chi_R(x)) g_n(x)(h'(x) - xh(x))\,\mathrm{d}x\right| \leq \varepsilon$$

et donc on dispose de n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait, par inégalité triangulaire

$$\left|\int_{\mathbf{R}} g_n(x)(h'(x) - xh(x))\,\mathrm{d}x\right| \leq 2\varepsilon\,,$$

i.e. $\boxed{\lim \int_{\mathbf{R}} g_n(x)(h'(x) - xh(x))\,\mathrm{d}x = 0.}$

PARTIE III

1) Puisque Z_n est une variable aléatoire, il en va de même pour $\varphi'(Z_n) - Z_n\varphi(Z_n)$ et $f(Z_n) - \langle f\rangle$. De plus, par construction de φ, elles sont égales. Enfin comme Z_n est bornée, elles le sont aussi et admettent donc un moment d'ordre 1. Il en découle $\boxed{\mathbf{E}\left(\varphi'(Z_n) - Z_n\varphi(Z_n)\right) = \mathbf{E}\left(f(Z_n) - \langle f\rangle\right).}$

2) Soit i dans $[\![1; n]\!]$. D'après I.6, φ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$. On peut donc lui appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 en $Z_{n,i}$:

$$\left|\varphi(Z_n) - \varphi(Z_{n,i}) - \frac{X_i}{\sqrt{n}}\varphi'(Z_{n,i})\right| \leq \frac{X_i^2}{2n^2}\,\|\varphi''\|_\infty$$

et, en utilisant la constante C_2 définie en I.6, il vient après multiplication de l'inégalité par la quantité positive $|X_i|$ $\boxed{\left|X_i\varphi(Z_n) - X_i\varphi(Z_{n,i}) - \frac{X_i^2}{\sqrt{n}}\varphi'(Z_{n,i})\right| \leq \frac{C_2}{2}\frac{|X_i|^3}{n}(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).}$

3) On a, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}\left(Z_n\varphi(Z_n)\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left(X_i\varphi(Z_n)\right)\ .$$

Puisque la famille (X_j) est indépendante, le lemme des coalitions assure que pour tout i dans $[\![1;n]\!]$, X_i et X_i^2 sont indépendants respectivement de $\varphi(Z_{n,i})$ et de $\varphi'(Z_{n,i})$. Puisqu'on a affaire à des variables centrées et réduites on en déduit

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{E}\left(X_i\varphi(Z_{n,i}) + \frac{X_i^2}{\sqrt{n}}\varphi'(Z_{n,i})\right) = \frac{1}{n}\mathbf{E}\left(\varphi'(Z_{n,i})\right)$$

et on en déduit

$$\mathbf{E}\left(Z_n\varphi(Z_n)\right) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left(\varphi'(Z_{n,i})\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left(X_i\varphi(Z_n) - X_i\varphi(Z_{n,i}) - \frac{X_i^2}{\sqrt{n}}\varphi'(Z_{n,i})\right)\ .$$

Par inégalité triangulaire et croissance de l'espérance, la question précédente fournit

$$\left|\mathbf{E}\left(Z_n\varphi(Z_n)\right) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left(\varphi'(Z_{n,i})\right)\right| \leq \frac{C_2}{2n\sqrt{n}}(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left(|X_i|^3\right)$$

et, en remarquant $0 \leq \left|X_i^3\right| \leq MX_i^2$ et en utilisant que les variables sont réduites, il vient

$$\boxed{\left|\mathbf{E}\left(Z_n\varphi(Z_n)\right) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left(\varphi'(Z_{n,i})\right)\right| \leq \frac{C_2M}{2\sqrt{n}}(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).}$$

4) Puisque φ' est de classe C^1, on peut appliquer l'inégalité de Lagrange dite des accroissements finis et il vient

$$|\varphi'(Z_n) - \varphi'(Z_{n,i})| \leq \frac{|X_i|}{\sqrt{n}}\|\varphi''\|_\infty$$

et donc, en faisant la moyenne de ces n inégalités, par inégalité triangulaire,

$$\left|\mathbf{E}\left(\varphi'(Z_n)\right) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left(\varphi'(Z_{n,i})\right)\right| \leq \frac{C_2}{n\sqrt{n}}(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left(|X_i|\right)\ .$$

Or, par inégalité de Cauchy-Schwarz ou positivité de la variance, puisqu'on a affaire à des variables bornées, donc ayant des moments de tous ordres, centrées et réduites :

$$\mathbf{E}\left(|X_i|\right)^2 \leq \mathbf{E}\left(|X_i|^2\right) = \mathbf{E}\left(X_i^2\right) = 1 \quad \text{puis } 0 \leq \mathbf{E}\left(|X_i|\right) \leq 1\ .$$

Il en découle $\boxed{\left|\mathbf{E}\left(\varphi'(Z_n)\right) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left(\varphi'(Z_{n,i})\right)\right| \leq \frac{C_2}{\sqrt{n}}(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).}$

5) On écrit, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}\left(\varphi'(Z_n) - Z_n\varphi(Z_n)\right) = \mathbf{E}\left(\varphi'(Z_n)\right) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left(\varphi'(Z_{n,i})\right) - \mathbf{E}\left(Z_n\varphi(Z_n)\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left(\varphi'(Z_{n,i})\right)$$

et alors, d'après la définition de $\langle f\rangle$ et les résultats des questions 1, 3 et 4, il vient

$$\boxed{\left|\mathbf{E}\left(f(Z_n)\right) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)G(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{C_2\left(1+\frac{1}{2}M\right)}{\sqrt{n}}\left(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\right).}$$

6) Soit a un réel, n un entier naturel et b un réel strictement positif. Supposons données g_+ une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, bornée et à dérivée bornée sur $\mathbf{R}$, égale à 1 sur $]-\infty;a]$, nulle sur $[a+b;+\infty[$ et vérifiant $0 \leq g_+ \leq 1$ sur $\mathbf{R}$. On pose, pour x réel, $g_-(x) = g_+(x+b)$. Alors g_- est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et on a $\|g_-\|_\infty = \|g_+\|_\infty = 1$ et $\left\|g_-'\right\|_\infty = \left\|g_+'\right\|_\infty < +\infty$. De plus, par construction

$$0 \leq g_- \leq \mathbb{1}_{]-\infty;a[} \leq g_+ \leq 1$$

et $g_- = g_+$ en dehors d'un intervalle de $]a-b;a+b[$. Par croissance de l'espérance, positivité de G et croissance de l'intégrale, on a alors

$$\mathbf{E}\left(g_-(Z_n)\right) \leq \mathbf{P}\left(Z_n < a\right) \leq \mathbf{E}\left(g_+(Z_n)\right) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{R}} g_-G \leq \int_{-\infty}^{a} G(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbf{R}} g_+G\,,$$

l'intégrabilité de g_-G et g_+G résultant de leur continuité et du fait qu'en l'infini elles sont dans $O\left(G\right)$. Comme, par inégalité de la moyenne,

$$\int_{\mathbf{R}} (g_+ - g_-)G \leq \|G\|_\infty \int_{\mathbf{R}} (g_+ - g_-) \leq 2b\,\|G\|_\infty$$

puisque $0 \leq g_+ - g_- \leq 1$ et puisque le support de $g_+ - g_-$ est de longueur inférieure à $2b$, et comme, d'après la question précédente,

$$\left|\mathbf{E}\left(g_\pm(Z_n)\right) - \int_{\mathbf{R}} g_\pm G\right| \leq \frac{C_2\left(1+\frac{1}{2}M\right)}{\sqrt{n}}\left(1 + \left\|g_+'\right\|_\infty\right)\,,$$

il vient, en utilisant $\|g_\pm\|_\infty \leq 1$ et la convexité de la valeur absolue,

$$\left|\mathbf{P}\left(Z_n < a\right) - \int_{-\infty}^{a} G(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq 2b\,\|G\|_\infty + \frac{C_2\left(1+\frac{1}{2}M\right)}{\sqrt{n}}\left(1 + \left\|g_+'\right\|_\infty\right)\,.$$

L'expression précédente donne au mieux une majoration en $\alpha b + \beta\dfrac{1}{b\sqrt{n}}$ puisqu'on a

$$1 = \int_{a}^{a+b} g_+'(x)\,\mathrm{d}x \leq b\left\|g_+'\right\|_\infty\,.$$

Par inégalité arithmético-géométrique, le minimum sera obtenu pour b de l'ordre de $n^{-1/4}$. On choisit donc $b = n^{-1/4}$. Si de plus on dispose de A tel que $\left\|g_+'\right\|_\infty \leq An^{1/4}$, il viendra

$$\left|\mathbf{P}\left(Z_n < a\right) - \int_{-\infty}^{a} G(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq n^{-1/4}\left(2\,\|G\|_\infty + C_2\left(1+\frac{1}{2}M\right)\left(n^{-1/4} + A\right)\right) \leq C_3 n^{-1/4}$$

en posant $C_3 = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} + C_2\left(1+\frac{1}{2}M\right)(A+1)$. Il ne reste donc plus qu'à construire g_+ pour conclure. Pour cela il suffit, d'après le théorème de la limite de la dérivée de construire une fonction h de classe

C^1 sur $[a; a+b]$ vérifiant $h(a) = 1$ et $h'(a) = h(a+b) = h'(a+b) = 0$, $0 \leq h \leq 1$ et $\|h'\|_\infty \leq \dfrac{A}{b}$, avec $b = n^{-1/4}$. On peut prendre h polynomiale et, par interpolation de Hermite ou par formule explicite, on peut prendre la fonction polynomiale associée à $\dfrac{1}{b^3}(X-a-b)^2(2X-2a+b)$. Comme sa dérivée est un trinôme du second degré nul en a et $a+b$, de coefficient dominant $\dfrac{6}{b^3}$, elle est donnée par $\dfrac{6}{b^3}(X-a)(X-a-b)$ et le maximum de $|h'|$ sur $[a; a+b]$ est atteint en $a + \dfrac{b}{2}$. Il y vaut $\dfrac{3}{2b}$ et donc on peut prendre $A = \dfrac{3}{2}$. Enfin comme sa dérivée s'annule en a et $a+b$, elle n'atteint pas de maximum ni de minimum dans $]a; a+b[$. Ceux-ci sont atteints d'après le théorème de Weierstrass sur $[a; a+b]$ et le sont donc en a et $a+b$ où h vaut respectivement 1 et 0. On en déduit $0 \leq h \leq 1$ et ceci achève la construction de g_+. On peut donc conclure $\boxed{\left|\mathbf{P}\left(Z_n < a\right) - \int_{-\infty}^{a} G(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq C_3 n^{-1/4}.}$

PARTIE IV

1) a. On écrit

$$tX_i = \frac{t(M-X_i)}{2tM}(-tM) + \frac{t(M+X_i)}{2tM}tM$$

ce qui fait apparaître tX_i comme combinaison convexe de $-tM$ et tM puisqu'on a $|X_i| \leq M$, $t \geq 0$ et $t(M-X_i) + t(M+X_i) = 2tM$. Par convexité de l'exponentielle il vient

$$e^{tX_i} \leq \frac{t(M-X_i)}{2tM}e^{-tM} + \frac{t(M+X_i)}{2tM}e^{tM} = \frac{1}{2}\left(e^{tM} + e^{-tM}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{tM} - e^{-tM}\right)X_i$$

et donc par linéarité et croissance de l'espérance, et puisqu'on a affaire à des variables centrées $\boxed{\mathbf{E}\left(e^{tX_i}\right) \leq \frac{1}{2}\left(e^{tM} + e^{-tM}\right).}$

b. La fonction th est concave sur $\mathbf{R}_+$, par exemple parce que sa dérivée (à savoir $1/\operatorname{ch}^2$) est décroissante sur $\mathbf{R}_+$ et donc sous sa tangente en 0 : pour tout x dans $\mathbf{R}_+$, on a $\operatorname{th}(x) \leq x$. Par croissance de l'intégrale il vient

$$\ln(\operatorname{ch}(tM)) = \int_0^{tM} \frac{\operatorname{ch}'(x)}{\operatorname{ch}(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{tM} \operatorname{th}(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{tM} x\,\mathrm{d}x = \frac{t^2M^2}{2}$$

d'où, par croissance de l'exponentielle, $\boxed{\frac{1}{2}\left(e^{tM} + e^{-tM}\right) \leq e^{\frac{1}{2}t^2M^2}.}$

Remarque : un autre argument, moins élégant, utilise le développement en série entière des fonctions considérées. On a, pour t réel

$$\operatorname{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

et donc, puisqu'on a affaire à des quantités positives et que le produit des entiers de 1 à $2n$ est supérieur à celui des entiers pairs compris entre les mêmes bornes,

$$\operatorname{ch}(t) \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{2^n n!} = e^{t^2/2}\ .$$

2) La fonction $x \mapsto \exp(tx)$ est croissante et strictement positive sur $\mathbf{R}$. Il découle alors de l'inégalité de Markov

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \delta\right) \leq e^{-t\delta}\mathbf{E}\left(e^{\frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) .$$

Par indépendance des (X_i), le lemme des coalitions et la question précédente donnent

$$\mathbf{E}\left(e^{\frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{\frac{t}{n}X_i}\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left(e^{\frac{t}{n}X_i}\right) \leq \left(e^{t^2M^2/2n^2}\right)^n .$$

Il vient donc

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \delta\right) \leq \exp\left(-\frac{M^2}{2n}t\left(\frac{2n\delta}{M^2} - t\right)\right)$$

et donc par inégalité arithmético-géométrique, ou en minimisant le membre de droite en prenant $t = n\delta/M^2$, $\boxed{\mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \delta\right) \leq e^{-n\delta^2/2M^2}.}$

3) Le résultat précédent peut se récrire $\mathbf{P}\left(Z_n \geq \delta\sqrt{n}\right) \leq e^{-(\delta\sqrt{n})^2/2M^2}$ ou encore $\mathbf{P}\left(Z_n \geq a\right) \leq e^{-a^2/2M^2}$, tandis que celui de la question III.6 donne $\left|\mathbf{P}\left(Z_n < a\right) - \int_{-\infty}^{a} G(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq C_3 n^{-1/4}$ ou encore

$$\left|\mathbf{P}\left(Z_n \geq a\right) - \int_{a}^{+\infty} G(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq C_3 n^{-1/4} .$$

Remarquons qu'on a $G' = -xG$ et donc $(-G/x)' = G(1 + 1/x^2)$. Par intégration entre a et $+\infty$, il vient par inégalité de la moyenne,

$$\left|\frac{G(a)}{a} - \int_{a}^{+\infty} G(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{a^2}\int_{a}^{+\infty} G(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et donc} \quad \int_{a}^{+\infty} G(x)\,\mathrm{d}x \sim \frac{e^{-a^2/2}}{\sqrt{2\pi}a} .$$

Pour $a = \delta\sqrt{n}$ avec δ fixé, on obtient $\mathbf{P}\left(Z_n \geq \delta\sqrt{n}\right) = O\left(n^{-1/4}\right)$, ce qui est nettement moins bon que l'inégalité précédente, mais cette dernière ne permet pas de calculer la limite en loi de Z_n.

Pour $a = \sqrt{\frac{1}{2}\ln(n) - \ln(\ln(n)) - \ln(\pi)}$ et $\delta = a/\sqrt{n}$, on a $a \sim \sqrt{\frac{1}{2}\ln(n)}$ et $\frac{G(a)}{\sqrt{2\pi}a} \sim n^{-1/4}$. On en déduit $\mathbf{P}\left(Z_n \geq \delta\sqrt{n}\right) = O\left(n^{-1/4}\right) = O\left(e^{-a^2/2}/a\right)$ et donc si $M < 1$ alors la majoration de la question précédente est meilleure que celle de la partie précédente et sinon c'est le contraire :

$\boxed{\text{pour } a = \sqrt{\tfrac{1}{2}\ln(n) - \ln(\ln(n)) - \ln(\pi)}, \text{ la majoration de 2 est meilleure que celle déduite de III.6 si et seulement si } M < 1.}$

Remarque : la comparaison entre les deux résultats n'a pas tellement de sens d'une part parce qu'on n'est pas obligé de prendre a dépendant de n, ni proportionnel à $\sqrt{n}\delta$, ce qui complique nettement l'analyse, ensuite parce que dans un cas on obtient un équivalent et dans l'autre une majoration, ce qui ne peut pas donner de renseignement sur la limite, mais juste sur la vitesse de convergence.

4) a. D'après la formule de taylor-Laplace (avec reste normalisé par homotopie), on a donc, pour x réel, $f(x) = \int_0^1 (1-u)e^{ux}\,\mathrm{d}u$. On a, pour u dans $[0;1]$, $0 \leq 1-u$ et, par croissance de l'exponentielle, $e^{utX_i} \leq e^{utM}$. Il en résulte par croissance de l'intégrale $\boxed{f(tX_i) \leq f(tM).}$

b. On en déduit, par positivité de X_i^2, $e^{tX_i} \leq 1 + tX_i + t^2 X_i^2 f(tM)$ (y compris si $tX_i = 0$) et donc par linéarité et croissance de l'espérance et puisqu'on a affaire à des variables centrées réduites, $\mathbf{E}\left(e^{tX_i}\right) \leq 1 + t^2 f(tM)$. Par convexité de l'exponentielle on en déduit $\boxed{\mathbf{E}\left(e^{tX_i}\right) \leq \exp\left(t^2 f(tM)\right).}$

Le calcul déjà effectué en question 2 via l'inégalité de Markov, et en utilisant l'inégalité précédente, donne

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \delta\right) \leq e^{-t\delta} e^{t^2 f(tM/n)/n} .$$

Or on a

$$-t\delta + \frac{t^2 f(tM/n)}{n} = \frac{n}{M^2}\left(e^{tM/n} - 1 - \frac{tM}{n} - \frac{tM^2\delta}{n}\right) = -\frac{n}{M^2}\left(1 + \frac{tM}{n}(1 + M\delta) - e^{tM/n}\right)$$

et le terme dans la dernière parenthèse est maximal pour $e^{tM/n} = 1 + M\delta$. Comme $1 + M\delta \geq 1$ on a $\dfrac{n}{M}\ln(1 + M\delta) \geq 0$ et pour t égal à cette quantité il vient

$$-t\delta + \frac{t^2 f(tM/n)}{n} = -\frac{n}{M^2}\left(\ln(1 + M\delta)(1 + M\delta) - M\delta\right) = -\frac{n}{M^2}\Phi(M\delta)$$

et donc $\boxed{\mathbf{P}\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \delta\right) \leq e^{-n\Phi(M\delta)/M^2}.}$