Composition C
ENS 2017 – MP

Pour y réel, on note $[y]$ la **partie entière** de y, c'est l'unique entier relatif vérifiant $[y] \leq y < [y]+1$.
Pour tout sous-ensemble A de $\mathbf{R}$, on note $\mathbb{1}_A$ sa **fonction caractéristique**.
Pour tout complexe z, on note $|z|$ le module de z. On note $\ell^1(\mathbf{Z})$ l'ensemble des suites de nombres complexes $(z_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ telles que $\displaystyle\sum_{k\in\mathbf{Z}} |z_k| < +\infty$.
On note $\mathcal{C}_{per}$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ continues et vérifiant, pour tout réel x, $f(x+1) = f(x)$ et on le munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)| \ .$$

On note $\mathcal{C}^\infty_{per}$ l'ensemble des fonctions dans $\mathcal{C}_{per}$ qui sont de plus de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Pour f dans $\mathcal{C}^\infty_{per}$ et m entier, $f^{(m)}$ appartient encore à l'espace $\mathcal{C}_{per}$. On rappelle qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}_{per}$ **converge uniformément** vers f dans $\mathcal{C}_{per}$ lorsque $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
Pour tout entier relatif k, on note e_k la fonction dans $\mathcal{C}_{per}$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad e_k(x) = \exp(2\pi i k x) \ .$$

Soit f une fonction dans $\mathcal{C}_{per}$. Pour tout entier relatif k, on définit $c_k(f)$, le k-ième **coefficient de Fourier** de f, par

$$c_k(f) = \int_0^1 f(y) e_{-k}(y)\,\mathrm{d}y \ .$$

Pour tous entiers naturel n, N, on définit les fonctions $S_n(f)$ et $\sigma_N(f)$ dans $\mathcal{C}_{per}$ par

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k \quad \text{et} \quad \sigma_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n(f) \ .$$

Le sujet est composé de cinq parties. Les résultats de la partie I seront utilisés dans la partie II. Les résultats de la partie II seront utilisés dans les parties III et V. Les résultats de la partie III seront utilisés dans la partie IV.

I - Préliminaires

Le but de cette partie est d'étabir des résultats préliminaires qui seront utiles dans la partie II.

1. Soit $f : [0;1] \to \mathbf{C}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Soit $\tilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ la fonction définie par $\tilde{f}(x) = f(x - [x])$ pour tout réel x. Montrer $\tilde{f} \in \mathcal{C}_{per}$.
2. Montrer que toute fonction f dans $\mathcal{C}_{per}$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}$
3. Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes qui converge vers z dans $\mathbf{C}$. Montrer que la suite de nombres complexes $(Z_N)_{N\in\mathbf{N}}$ définie par $Z_N = \dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{n=0}^{N} z_n$ converge aussi vers z.

II - Théorème de Fejér et applications

Le but de cette partie est de démontrer le Théorème de Fejér qui affirme que toute fonction f dans $\mathcal{C}_{per}$ est la limite uniforme de la suite de polynômes trigonométriques $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$.
Pour tout entier naturel N, on définit la fonction K_N dans $\mathcal{C}_{per}$ par

$$K_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=-n}^{n} e_k \ .$$

1. Soit N dans $\mathbf{N}$. Montrer
$$\int_0^1 K_N(y)\,\mathrm{d}y = 1 \ .$$

2. Soit N dans $\mathbf{N}$ et x dans $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$. Montrer
$$K_N(x) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin((N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\right)^2 \ .$$

3. Soit f dans $\mathcal{C}_{per}$, N dans $\mathbf{N}$ et x dans $\mathbf{R}$.
   (i) Montrer
$$\sigma_N(f)(x) = \int_0^1 f(y)K_N(x-y)\,\mathrm{d}y \ .$$
   (ii) En déduire
$$\sigma_N(f)(x) - f(x) = \int_0^1 (f(x-y)-f(x))K_N(y)\,\mathrm{d}y \ .$$

4. **Théorème de Fejér**. Soit f dans $\mathcal{C}_{per}$.
   (i) Montrer que pour tout ε dans $\mathbf{R}_+^*$, il existe δ dans $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ tel que pour tout entier naturel N et tout réel x, on ait
$$\int_0^\delta |f(x-y)-f(x)|\,K_N(y)\,\mathrm{d}y \le \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{1-\delta}^1 |f(x-y)-f(x)|\,K_N(y)\,\mathrm{d}y \le \varepsilon \ .$$
   (ii) Montrer que pour tout δ dans $\mathbf{R}_+^*$, il existe une constante $\kappa_{\delta,f}$ dans $\mathbf{R}_+^*$ et dépendant de δ et f, telle que pour tous N dans $\mathbf{N}$ et x dans $\mathbf{R}$, on ait
$$\int_\delta^{1-\delta} |f(x-y)-f(x)|\,K_N(y)\,\mathrm{d}y \le \frac{\kappa_{\delta,f}}{N+1} \ .$$
   (iii) En déduire que la suite de fonctions $(\sigma_N(f))_{N\ge1}$ converge uniformément vers f.

5. Soit f dans $\mathcal{C}_{per}^\infty$.
   (i) Soit k dans $\mathbf{Z}$ et n dans $\mathbf{N}$. Établir une relation entre les coefficients de Fourier $c_k(f)$ et $c_k(f^{(n)})$.
   (ii) En déduire $(c_k(f))_{k\in\mathbf{Z}} \in \ell^1(\mathbf{Z})$.
   (iii) Montrer que la suite de fonctions $(S_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f.

III - Équirépartition

Le but de cette partie est d'étudier l'équirépartition modulo 1 des suites de nombres réels.
Pour tout sous-ensemble fini X de $\mathbf{N}$, on note $\sharp X$ le **cardinal** de l'ensemble X. Pour tout entier $N\ge1$, on note $[\![1;N]\!] = \{k\in\mathbf{N}\,|\,1\le k\le N\}$. Pour tout entier $N\ge1$, toute suite de nombres réels $(x_n)_{n\ge1}$ et tout sous-ensemble non vide Y dans $[0;1]$, on note
$$\gamma(N,(x_n),Y) = \frac{1}{N}\sharp\left\{n\in[\![1;N]\!]\,|\,x_n-[x_n]\in Y\right\} \ .$$

On dira qu'une suite de nombres réels $(x_n)_{n\ge1}$ est **équirépartie** si pour tous réels a et b vérifiant $0\le a< b\le 1$, on a
$$\lim_{N\to+\infty}\gamma(N,(x_n),[a;b]) = b-a \ .$$

1. Montrer qu'une suite de nombres réels $(x_n)_{n\ge1}$ est équirépartie si et seulement pour tous réels a et b vérifiant $0\le a<b\le1$, on a
$$\lim_{N\to+\infty}\gamma(N,(x_n),[a;b[) = b-a \ .$$

2. Soit f dans $\mathcal{C}_{per}$. Pour tout entier $M \geq 1$, on note

$$\Phi_M(f) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \sum_{j=0}^{M-1} f\left(k + \frac{j}{M}\right) \mathbb{1}_{[k+\frac{j}{M};k+\frac{j+1}{M}[} \, .$$

(i) Montrer que pour tout ε dans $\mathbf{R}_+^*$, il existe un entier $M \geq 1$ tel que $\|f - \Phi_M(f)\|_\infty \leq \varepsilon$.

(ii) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels équirépartie. En déduire

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y \, . \qquad (\star)$$

3. On se propose de montrer la réciproque de la question III.2. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels vérifiant $(\star)$ pour toute fonction f dans $\mathcal{C}_{per}$. Soit $0 \leq a < b \leq 1$.

(i) Étant donné ε dans $\mathbf{R}_+^*$, en s'aidant d'un dessin, construire des fonctions f_ε^- et f_ε^+ dans $\mathcal{C}_{per}$ telles que pour tout x dans $[0;1]$, on ait

$$f_\varepsilon^-(x) \leq \mathbb{1}_{[a;b]}(x) \leq f_\varepsilon^+(x)$$

et

$$\int_0^1 \left(f_\varepsilon^+(y) - f_\varepsilon^-(y)\right) \mathrm{d}y \leq \varepsilon \, .$$

(ii) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie.

4. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que pour tout entier relatif non nul k, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e_k(x_n) = 0 \, .$$

Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie.

5. Soit α dans $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ et x dans $\mathbf{R}$. Montrer que la suite $(\alpha n + x)_{n\geq 1}$ est équirépartie.

6. Soit α dans $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ et f dans $\mathcal{C}_{per}$. Pour tout entier naturel n, on note F_n la fonction dans $\mathcal{C}_{per}$ définie par $F_n(x) = f(\alpha n + x)$ pour x réel. Montrer

$$\lim_{N\to+\infty} \left\| \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} F_n \right\|_\infty = 0 \, .$$

IV - Théorème de Weyl

Le but de cette partie est de démontrer le **Théorème de Weyl** qui affirme que pour tout polynôme P dans $\mathbf{R}[X]$ avec $P = \alpha_d X^d + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0$, $d \geq 1$ et $\alpha_d \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, la suite de nombres réels $(P(n))_{n\geq 1}$ est équirépartie.

1. **Inégalité de van der Corput**. Soit $(z_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que $|z_n| \leq 1$ pour $n \geq 1$. Soit $1 \leq H \leq N$.

(i) Montrer

$$\left| \sum_{n=1}^{N} z_n - \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{N} \sum_{h=1}^{H} z_{n+h} \right| \leq H + 1 \, .$$

(ii) Montrer

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} z_n \right| \leq \frac{1}{N^{1/2}} \frac{1}{H} \left(\sum_{n=1}^{N} \left| \sum_{h=1}^{H} z_{n+h} \right|^2 \right)^{1/2} + \frac{H+1}{N} \, .$$

(iii) En écrivant

$$\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right|^2 = \sum_{n=1}^{N}\sum_{h',h=1}^{H} z_{n+h}\overline{z_{n+h'}} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{h=1}^{H}|z_{n+h}|^2 + 2\sum_{n=1}^{N}\sum_{1\le h'<h\le H}\mathrm{Re}(z_{n+h}\overline{z_{n+h'}})$$

et en effectuant un changement de variables approprié, montrer

$$\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right|^2 \le NH + 2H\sum_{h=1}^{H}\left|\sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\overline{z_n}\right| + H^2(H+1)\ .$$

(iv) En déduire

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n\right| \le \sqrt{2}\left(\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\overline{z_n}\right|\right)^{1/2} + \frac{1}{H^{1/2}} + \left(\frac{H+1}{N}\right)^{1/2} + \frac{H+1}{N}\ .$$

2. **Lemme de VAN DER CORPUT**. Soit $(x_n)_{n\ge1}$ une suite de nombres réels telle que pour tout $h\ge1$, la suite de nombres réels $(x_{n+h}-x_n)_{n\ge1}$ soit équirépartie. Montrer que la suite $(x_n)_{n\ge1}$ est équirépartie.
3. Démontrer le **Théorème de WEYL** en raisonnant par récurrence sur le degré $d\ge1$.

V - Approximation rationnelle et équirépartition quantitative

Le but de cette partie est d'étudier l'approximation des nombres réels par les nombres rationnels et les liens avec l'équirépartition.

On dira qu'un nombre réel α est de **LIOUVILLE** si pour tout entier $n\ge1$, il existe un couple (p_n,q_n) dans $\mathbf{Z}\times(\mathbf{N}\setminus\{0;1\})$ tel que

$$0 < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left(\frac{1}{q_n}\right)^n\ .$$

On dira qu'un nombre réel α est algébrique s'il existe un polynôme P dans $\mathbf{Q}[X]$ non constant tel que $P(\alpha)=0$.

1. Montrer qu'un nombre réel de **LIOUVILLE** est irrationnel.
2. **Théorème de LIOUVILLE**.

(i) Soit α dans $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ tel qu'il existe un polynôme P dans $\mathbf{Q}[X]$ irréductible à coefficients entiers de degré $d\ge2$ tel que $P(\alpha)=0$. Montrer qu'il existe une constante c_α dans $\mathbf{R}_+^*$ et dépendant de α telle que

$$\forall (p,q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{N}^* \qquad \left|\alpha-\frac{p}{q}\right| \ge \frac{c_\alpha}{q^d}\ .$$

(ii) En déduire qu'un nombre réel algébrique sur $\mathbf{Q}$ n'est pas de **LIOUVILLE**.

(iii) Montrer que le nombre réel α donné par

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{10^{n!}}$$

n'est pas algébrique.

3. **Équirépartition quantitative**. Dans cette question, on démontre une version quantitative de la convergence de la question III.6. Soit α un nombre irrationnel qui n'est pas de **LIOUVILLE**. Soit f dans $\mathcal{C}^\infty_{per}$. Pour tout entier naturel n, on note F_n la fonction dans $\mathcal{C}_{per}$ définie par $F_n(x)=f(\alpha n+x)$ pour x réel.

Montrer qu'il existe une constante $C_{\alpha,f}$ dans $\mathbf{R}_+^*$ et dépendant de α et de f, telle que

$$\forall N\in\mathbf{N}^* \qquad \left\|\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}F_n\right\|_\infty \le \frac{C_{\alpha,f}}{N}\ .$$

Indication : on pourra utiliser les résultats de la question II.5.

Composition C – ENS 2017 – MP

I - Préliminaires

1. La fonction $x \mapsto x - [x]$ étant affine par morceaux, elle est de classe C^∞ en dehors de ses points de discontinuité, i.e. sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. Par composition $\tilde{f}$ est continue sur ce même ensemble. Par ailleurs, pour n dans $\mathbf{Z}$, x dans $\mathbf{R}$ et h dans $]0;1[$, on a $x+n-[x+n] = x+n-[x]-n = x-[x]$, $\tilde{f}(n+h) = f(h) = f(0) + \mathrm{o}\,(1)$ et $\tilde{f}(n-h) = f(1-h) = f(1) + \mathrm{o}\,(1) = f(0) + \mathrm{o}\,(1)$, par continuité de f et puisque $f(0) = f(1)$. On en déduit la 1-périodicité de $\tilde{f}$ et sa continuité en n, i.e. $\boxed{\tilde{f} \in \mathcal{C}_{per}.}$

2. Soit f dans $\mathcal{C}_{per}$. Par continuité et théorème de Heine, f est uniformément continue sur le segment $[0;2]$. Soit alors ε dans $\mathbf{R}_+^*$. On dispose de η, que l'on peut choisir inférieur à 1, tel que, pour tous x et y dans $[0;2]$ vérifiant $|x-y| < \eta$, on ait $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Soit alors x et y des réels vérifiant $|x-y| < \eta$. En posant $n = \min([x], [y])$, il vient
$$n \leq \min(x,y) \leq \max(x,y) \leq \min(x,y) + \eta \leq n+1+\eta \leq n+2\,,$$
i.e. x et y appartiennent à $[n; n+2]$ et donc on a $|f(x) - f(y)| = |f(x-n) - f(y-n)| < \varepsilon$ par 1-périodicité de f et choix de η. Par conséquent $\boxed{f \text{ est uniformément continue sur } \mathbf{R}.}$

3. On a $|z_n - z| = \mathrm{o}\,(1)$ et donc par sommation des relations de comparaison dans le cas divergent, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} |z_n - z| = \mathrm{o}\,(N+1)$, et donc, par inégalité triangulaire, $|Z_n - z| = \dfrac{1}{N+1}\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(z_n - z)\right| \leq \mathrm{o}\,(1)$, puis par encadrement des limites $|Z_n - z| = \mathrm{o}\,(1)$, i.e. $\boxed{(Z_N)_{N\in\mathbf{N}} \text{ converge aussi vers } z.}$

II - Théorème de Fejér et applications

1. Pour tout k dans $\mathbf{Z}$ on a $\displaystyle\int_0^1 e_k(y)\,\mathrm{d}y = \delta_{k,0}$, en notant $\delta_{k,0}$ le symbôle de Kronecker. Par linéarité de l'intégrale, on en déduit $\boxed{\displaystyle\int_0^1 K_N(y)\,\mathrm{d}y = 1.}$

2. Par somme télescopique on a, pour n entier,
$$(1-e_{\pm 1}) \sum_{k=-n}^{n} e_k = e_{\mp n} - e_{\pm(n+1)} \quad \text{et donc} \quad (1-e_{\pm 1})K_N = 1 - e_{\pm(N+1)} \pm \sum_{n=1}^{N}(e_n - e_{-n})$$
et donc, par demi-somme de ces deux relations pour les deux signes $+$ et $-$, on a
$$\frac{2 - e_1 - e_{-1}}{2} K_N = \frac{2 - e_{N+1} - e_{-(N+1)}}{2}\,.$$
On tire de la relation, pour t réel, $\dfrac{2 - e^{it} - e^{-it}}{2} = 1 - \cos(t) = 2\sin^2(\dfrac{t}{2})$, et du fait que pour x non entier on a $\sin(\pi x) \neq 0$, $\boxed{K_N(x) = \dfrac{1}{N+1}\left(\dfrac{\sin((N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\right)^2.}$

3. (i) Pour k entier on a, par linéarité de l'intégrale,
$$c_k(f)e_k(x) = \int_0^1 f(y)e_{-k}(y)e_k(x)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 f(y)e_k(x-y)\,\mathrm{d}y$$
et donc, par linéarité de l'intégrale et définition de K_n et σ_N, $\boxed{\sigma_N(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 f(y)K_N(x-y)\,\mathrm{d}y.}$

(ii) D'après la question II.1 on a $f(x) = f(x)\displaystyle\int_0^1 K_N(y)\,\mathrm{d}y$. Par changement de variables affine bijectif, $\sigma_N(f)(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} f(x-y)K_N(y)\,\mathrm{d}y$. Comme l'intégrande est périodique son intégrale sur une période ne dépend pas de l'intervalle choisi, par exemple par relation de Chasles, on a

$$\sigma_N(f)(x) = \int_0^1 f(x-y)K_N(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

et donc, par linéarité de l'intégrale, il vient $\boxed{\sigma_N(f)(x) - f(x) = \displaystyle\int_0^1 (f(x-y) - f(x))K_N(y)\,\mathrm{d}y.}$

4. (i) Soit ε dans $\mathbf{R}_+^*$. D'après la question I.2, par uniforme continuité, on dispose de δ dans $\mathbf{R}_+^*$, que l'on peut supposer dans $\left]0;\frac{1}{2}\right[$, pour tous x et y' dans $\mathbf{R}$ vérifiant $|x-y'| < \delta$ on ait $|f(y') - f(x)| < \varepsilon$ et donc aussi, par 1-périodicité, $|f(y'-1) - f(x)| < \varepsilon$. Soit N un entier naturel. D'après la question II.2, K_N est une fonction positive et donc, par inégalité de la moyenne et en majorant l'intégrale de K_N sur tout intervalle inclus dans $[0;1]$ par celle sur $[0;1]$, i.e. par 1 d'après la question II.1, il vient, avec $y' = x - y$, $\boxed{\displaystyle\int_0^\delta |f(x-y) - f(x)|\,K_N(y)\,\mathrm{d}y \leq \varepsilon}$ et, avec $y' = x - y + 1$, $\boxed{\displaystyle\int_{1-\delta}^1 |f(x-y) - f(x)|\,K_N(y)\,\mathrm{d}y \leq \varepsilon.}$

(ii) Soit δ dans $\mathbf{R}_+^*$. On pose $\kappa_{\delta,f} = 0$ si $\delta \geq \dfrac{1}{2}$ et $\kappa_{\delta,f} = 2\dfrac{\|f\|_\infty}{\sin^2(\delta)}$ sinon. Dans le premier cas l'intégrale est négative et l'inégalité est acquise. Sinon, par positivité et croissance de sin sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, pour y dans $\left[\delta;\frac{1}{2}\right]$ on a $\sin^2(\pi y) \geq \sin^2(\pi\delta)$. Par invariance par symétrie par rapport à $\dfrac{\pi}{2}$ de sin, cette inégalité est vraie sur $[\delta; 1-\delta]$. Il résulte de la question II.2 que pour y dans $[\delta; 1-\delta]$, on a $|f(x-y) - f(x)|\,K_N(y) \leq \kappa_{\delta,f}\sin^2((N+1)\pi y) \leq \kappa_{\delta,f}$ et donc, par inégalité de la moyenne, $\boxed{\displaystyle\int_\delta^{1-\delta} |f(x-y) - f(x)|\,K_N(y)\,\mathrm{d}y \leq \frac{\kappa_{\delta,f}}{N+1}.}$

(iii) On déduit des trois questions précédentes, de l'inégalité triangulaire et de la positivité de K_N résultant de la question II.2 que $\boxed{\text{la suite de fonctions } (\sigma_N(f))_{N\geq 1} \text{ converge uniformément vers } f.}$

5. (i) Puisqu'on a affaire à des fonctions de classe C^∞, une intégration par parties donne

$$\int f'e_{-k} = fe_{-k} + 2ik\pi\int fe_{-k}$$

et donc, par 1-périodicité de fe_{-k}, $c_k(f') = 2ik\pi c_k(f)$ et ainsi $\boxed{c_k(f^{(n)}) = (2ik\pi)^n c_k(f).}$

(ii) Puisque f est de classe C^2 et 1-périodique, f'' est continue et 1-périodique, donc bornée sur $[0;1]$ par théorème de Weierstrass donc sur $\mathbf{R}$ par 1-périodicité. L'inégalité de la moyenne donne alors $c_k(f'') = \mathrm{O}\left(1\right)$ et la relation précédente fournit $c_k(f) = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$. Par comparaison avec une série de Riemann dans le cas positif, on en déduit $\boxed{(c_k(f))_{k\in\mathbf{Z}} \in \ell^1(\mathbf{Z}).}$

(iii) D'après ce qui précède, puisque e_k est à valeurs dans $\mathbf{U}$ et par inégalité triangulaire, la série de fonctions $\sum(S_{n+1}(f) - S_n(f))$ est normalement convergente sur $\mathbf{R}$, elle est donc uniformément convergente, i.e. $(S_n(f))$ l'est aussi. Comme sa somme est f d'après la question précédente et la question I.3, $\boxed{\text{la suite de fonctions } (S_n(f))_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge uniformément vers } f.}$

III - Équirépartition

1. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels et c et d deux réels vérifiant $0 \leq c \leq d \leq 1$. On note $P_{c,d}$ et $P'_{c,d}$ les propriétés

$$(P_{c,d}) \ : \ \lim_{N\to+\infty} \gamma(N,(x_n),[c;d[) = d-c \quad \text{et} \quad (P'_{c,d}) \ : \ \lim_{N\to+\infty} \gamma(N,(x_n),[c;d]) = d-c$$

respectivement. On note P et P' les propriétés affirmant $P_{a,b}$, respectivement $P'_{a,b}$, pour tous réels a et b vérifiant $0 \leq a < b \leq 1$. On cherche à démontrer $P \iff P'$.
Par construction la fonction γ est une fonction croissante de Y et à valeurs dans $[0;1]$. Elle est même additive, i.e.

$$\gamma(N,(x_n),Y_1+Y_2) = \gamma(N,(x_n),Y_1) + \gamma(N,(x_n),Y_2)$$

où Y_1+Y_2 désigne la réunion disjointe de deux parties non vides de $[0;1]$. Comme $(x_n-[x_n])$ est à valeurs dans $[0;1[$, $P'_{1,1}$ est vraie et puisqu'on a $[c;d] = [c;d[+\{d\}$, on en déduit que $P \iff P'$ est équivalent au fait que P et P' entraînent chacune la propriété $\forall b \in]0;1[\ P'_{b,b}$i.e.

$$\forall b \in]0;1[\qquad \lim_{N\to+\infty} \gamma(N,(x_n),\{b\}) = 0\ .$$

La suite $(\gamma(N,(x_n),\{d\}))$ étant à valeurs dans $[0;1]$, elle converge vers 0 si et seulement si elle admet 0 comme unique valeur d'adhérence, par réciproque partielle du théorème de Bolzano-Weierstrass. Cette dernière propriété est équivalente au fait que pour tout ε dans $\mathbf{R}_+^*$, toutes ses valeurs d'adhérence sont dans $[0;\varepsilon]$. Comme, pour $d<1$ et $0<\varepsilon<1-d$, on a $\{d\} \subset [d;d+\varepsilon[\ \leq [d;d+\varepsilon]$, la croissance de γ en Y permet de conclure que P et P' entraînent chacune $P'_{d,d}$. Ainsi

$$\boxed{(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est équirépartie si et seulement si pour tous réels } a \text{ et } b \text{ vérifiant } 0 \leq a < b \leq 1,\ \lim_{N\to+\infty} \gamma(N,(x_n),[a;b[) = b-a.}$$

2. (i) Soit ε dans $\mathbf{R}_+^*$ et M un entier supérieur à 1. Pour x réel, en posant $k=[x]$ et $j=[M(x-k)]$ on a $j \leq M(x-k) < j+1$ et donc $k+\frac{j}{M} \leq x < k+\frac{j+1}{M}$ et ainsi $\Phi_M(f)(x) = f\left(k+\frac{j}{M}\right)$ et donc

$$\|\Phi_M(f)-f\|_\infty \leq \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \\ |x-y|\leq \frac{1}{M}}} |f(x)-f(y)|\ .$$

Comme f est uniformément continue, d'après la question I.2, on dispose de M tel que $\boxed{\|f-\Phi_M(f)\|_\infty \leq \varepsilon.}$

(ii) Soit ε dans $\mathbf{R}_+^*$ et M un entier supérieur à 1 comme à la question précédente, ainsi que N dans $\mathbf{N}^*$. On a, par linéarité de l'intégrale et inégalité de moyenne,

$$\left|\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \Phi_M(f)(y)\,\mathrm{d}y\right| = \left|\int_0^1 (f(y)-\Phi_M(f)(y))\,\mathrm{d}y\right| \leq \varepsilon$$

et, par inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f(x_n) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \Phi_M(f)(x_n)\right| = \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N (f(x_n)-\Phi_M(f)(x_n))\right| \leq \varepsilon\ .$$

Par ailleurs, par définition, on a, en posant $Y_j = \left[k+\frac{j}{M};k+\frac{j+1}{M}\right[$,

$$\sum_{n=1}^N \Phi_M(f)(x_n) = \sum_{j=0}^{M-1} \gamma(N,(x_n),Y_j) f\left(k+\frac{j}{M}\right)$$

et donc, par inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y\right| \leq 2\varepsilon + \sum_{j=0}^{M-1}\left|\frac{1}{N}\gamma(N,(x_n),Y_j) - \frac{1}{M}\right| f\left(k+\frac{j}{M}\right)$$

Par équirépartition, pour tout j dans $[\![0;M]\!]$ on a $\lim \dfrac{1}{N}\gamma(N,(x_n),Y_j) = k + \dfrac{j+1}{M} - (k+\dfrac{j}{M}) = \dfrac{1}{M}$ et donc on dispose de N_j tel que, pour $N \geq N_j$, on ait $\left|\dfrac{1}{N}\gamma(N,(x_n),Y_j) - \dfrac{1}{M}\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{M}$ et donc, pour N supérieur à $\max(N_1,\ldots,N_M)$, il vient

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y\right| \leq (2+\|f\|_\infty)\varepsilon\ .$$

On en conclut $\boxed{\lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y.}$

3. (i) Soit $u = \min(\frac{1}{4}\varepsilon, a, 1-b, \frac{1}{3}(b-a))$. Par hypothèse on a $u > 0$ et on définit, en utilisant la question I.1, des fonctions f_ε^- et f_ε^+ dans $\mathcal{C}_{per}$ à partir des fonctions affines par morceaux, donc continues, sur $[0;1]$, nulles en 0 et 1, et valant 0, 1, 1 et 0 en $a-u$, a, b et $b+u$ (respectivement a, $a+u$, $b-u$, b). Alors f_ε^+ coïncide avec $\mathbb{1}_{[a;b]}$ sur $[0;a-u]$, $[a;b]$ et $[b+u;1]$ et vaut 1 sur le reste de $[0;1]$. Aussi f_ε^- coïncide avec $\mathbb{1}_{[a;b]}$ sur $[0;a]$, $[a+u;b-u]$ et $[b;1]$ et vaut 1 sur le reste de $[0;1]$. Il en résulte, puisque $\mathbb{1}_{[a;b]}$ est à valeurs dans $\{0;1\}$, que pour tout x dans $[0;1]$, on a $\boxed{f_\varepsilon^-(x) \leq \mathbb{1}_{[a;b]}(x) \leq f_\varepsilon^+(x).}$ De plus, puisqu'on a $\|f_\varepsilon^+ - f_\varepsilon^-\|_\infty = 1$, il vient par inégalité de la moyenne

$$0 \leq \int_0^1 \left(f_\varepsilon^+(y) - f_\varepsilon^-(y)\right)\mathrm{d}y \leq 4u$$

et donc $\boxed{\int_0^1 \left(f_\varepsilon^+(y) - f_\varepsilon^-(y)\right)\mathrm{d}y \leq \varepsilon.}$

(ii) Par construction des fonctions précédentes, pour N dans $\mathbf{N}^*$, on a

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_\varepsilon^-(x_n) \leq \frac{1}{N}\gamma(N,(x_n),[a;b]) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_\varepsilon^+(x_n)$$

et donc en appliquant $(\star)$ pour $f_\varepsilon^\pm$, on dispose de N_0 tel que pour $N \geq N_0$ on ait

$$\int_0^1 f_\varepsilon^-(y)\,\mathrm{d}y - \varepsilon \leq \frac{1}{N}\gamma(N,(x_n),[a;b]) \leq \int_0^1 f_\varepsilon^+(y)\,\mathrm{d}y + \varepsilon\ .$$

Or, par croissance de l'intégrale, puisqu'une fonction en escalier est intégrable, on a également

$$\int_0^1 f_\varepsilon^-(y)\,\mathrm{d}y - \varepsilon \leq \int_0^1 f_\varepsilon^-(y)\,\mathrm{d}y \leq b-a \leq \int_0^1 f_\varepsilon^+(y)\,\mathrm{d}y \leq \int_0^1 f_\varepsilon^+(y)\,\mathrm{d}y + \varepsilon$$

et donc $b-a$ et $\dfrac{1}{N}\gamma(N,(x_n),[a;b])$ appartiennent à un même intervalle de longueur 3ε, de par la seconde propriété de la question précédente. Par conséquent pour $N \geq N_0$, on a

$$\left|b - a - \frac{1}{N}\gamma(N,(x_n),[a;b])\right| \leq 3\varepsilon\,,$$

et donc $\lim \dfrac{1}{N}\gamma(N,(x_n),[a;b]) = b-a$. Par conséquent $\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\geq 1} \text{ est équirépartie.}}$

4. Soit f dans $\mathcal{C}_{per}$ et M dans $\mathbf{N}$. Par hypothèse on a, par linéarité de la limite

$$\lim \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sigma_M(f)(x_n) = c_0(f)$$

puisque e_0 est la fonction constante égale à 1 et que $\sigma_M(f)$ est une combinaison linéaire des fonctions e_k pour k dans $\mathbf{Z}$, et que le coefficient de e_0 dans cette combinaison linéaire est $c_0(f)$. Or, pour N dans $\mathbf{N}$, on a, par inégalité triangulaire,

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sigma_M(f)(x_n) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \right| \leq \|f - \sigma_M(f)\|_\infty$$

Soit alors ε dans $\mathbf{R}_+^*$. D'après le théorème de Fejèr, on dispose de M tel que $\|f - \sigma_M(f)\|_\infty \leq \varepsilon$ et, pour un tel M, on dispose de N_0 tel que pour $N \geq N_0$, on ait $\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sigma_M(f)(x_n) - c_0(f) \right| \leq \varepsilon$ et donc aussi, par inégalité triangulaire

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) - c_0(f) \right| \leq 2\varepsilon \ .$$

On en déduit $\lim \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = c_0(f) = \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y$. Il résulte de la question précédente que $\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n \geq 1} \text{ est équirépartie.}}$

5. Soit k un entier relatif non nul et N dans $\mathbf{N}^*$. On a

$$\sum_{n=1}^{N} e_k(x_n) = e_k(x + \alpha) \sum_{n=0}^{N-1} e_n(k\alpha) = e_k(x + \alpha) \frac{1 - e_N(k\alpha)}{1 - e_1(k\alpha)} = \mathrm{O}\,(1)$$

puisque, α étant irrationnel, $e_1(k\alpha)$ n'est pas égal à 1. On en déduit

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e_k(x_n) = \mathrm{o}\,(1)$$

et donc, d'après ce qui précède, $\boxed{\text{la suite } (\alpha n + x)_{n \geq 1} \text{ est équirépartie.}}$

6. Soit x un réel ; la majoration précédente est indépendante de x et on a, pour k entier relatif non nul

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e_k(x + n\alpha) \right| \leq \frac{2}{|1 - e_{k\alpha}|} \frac{1}{N} = \frac{1}{N \sin(k\pi\alpha)}$$

et

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e_0(x + n\alpha) = 1 = \int_0^1 e_0(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

i.e., pour tout entier relatif k, l'assertion demandée est vraie si $f = e_k$. Soit alors ε dans $\mathbf{R}_+^*$. On dispose d'après le théorème de Fejèr, de M tel que $\|f - \sigma_M(f)\|_\infty \leq \varepsilon$. On note $g = \sigma_M(f)$ et G_n la fonction dans $\mathcal{C}_{per}$ définie par $G_n(x) = g(\alpha n + x)$. Par linéarité de la limite, et de l'intégrale, comme

g est une combinaison linéaire des e_k pour $-M \le k \le M$, l'assertion demandée est vraie pour g. Par hypothèse sur M, inégalité de la moyenne et inégalité triangulaire, on a

$$\left|\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y\right| \le \varepsilon \quad \text{et} \quad \left\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N F_n - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N G_n\right\|_\infty \le \varepsilon$$

puisque $\|F_n - G_n\|_\infty \le \varepsilon$ pour tout entier n. Puisque l'assertion est vraie pour g, par inégalité triangulaire on dispose donc de N_0 tel que, pour $N \ge N_0$,

$$\left\|\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N F_n\right\|_\infty \le 3\varepsilon\ .$$

Autrement dit $\boxed{\lim_{N\to+\infty}\left\|\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N F_n\right\|_\infty = 0.}$

IV - Théorème de Weyl

1. (i) On a

$$\sum_{n=1}^N z_n - \frac{1}{H}\sum_{n=1}^N\sum_{h=1}^H z_{n+h} = \sum_{h=1}^H \left(\frac{H+1-h}{H} z_h + \frac{h}{H} z_{N+h}\right)\ .$$

Par inégalité triangulaire chaque terme est de module inférieure à $\dfrac{H+1}{H}$ et donc, par sommation et inégalité triangulaire $\boxed{\left|\sum_{n=1}^N z_n - \frac{1}{H}\sum_{n=1}^N\sum_{h=1}^H z_{n+h}\right| \le H+1.}$

(ii) On note $Z = \sum_{n=1}^N\sum_{h=1}^H z_{n+h}$. On dispose de θ dans $\mathbf{R}$ tel que $Z = |Z|\,e^{i\theta}$ et donc, par linéarité de la partie réelle,

$$|Z| = \mathrm{Re}(|Z|) = \sum_{n=1}^N e^{-i\theta}\sum_{h=1}^H z_{n+h} = \sum_{n=1}^N \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\sum_{h=1}^H z_{n+h}\right)$$

et donc, par inégalité de Cauchy-Schwarz (ou inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne quadratique), puisque pour tout complexe z on a $\left|\mathrm{Re}(e^{-i\theta}z)\right| \le \left|e^{-i\theta}z\right| = |z|$,

$$|Z|^2 \le N\sum_{n=1}^N \left|\sum_{h=1}^H z_{n+h}\right|^2$$

et donc, par croissance de la racine carrée et puisque N et H sont strictement positifs,

$$\frac{1}{N}\frac{1}{H}\left|\sum_{n=1}^N\sum_{h=1}^H z_{n+h}\right| \le \frac{1}{N^{1/2}}\frac{1}{H}\left(\sum_{n=1}^N\left|\sum_{h=1}^H z_{n+h}\right|^2\right)^{1/2}\ .$$

L'inégalité de la question précédente, divisée par N, et l'inégalité triangulaire permettent de conclure

$$\boxed{\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N z_n\right| \le \frac{1}{N^{1/2}}\frac{1}{H}\left(\sum_{n=1}^N\left|\sum_{h=1}^H z_{n+h}\right|^2\right)^{1/2} + \frac{H+1}{N}.}$$

(iii) Pour n dans $\mathbf{N}^*$, on a

$$\left|\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right|^2 = \sum_{h=1}^{H} z_{n+h} \sum_{h'=1}^{H} \overline{z_{n+h'}} = \sum_{h=1}^{H} |z_{n+h}|^2 + 2 \sum_{1\leq h'<h\leq H} \mathrm{Re}(z_{n+h}\overline{z_{n+h'}})$$

et donc, en prenant $h-h'$ comme nouvelle variable,

$$\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right|^2 = NH + 2\sum_{h=1}^{H-1}\sum_{n=1}^{N}\sum_{h'=1}^{H-h} \mathrm{Re}(z_{n+h'+h}\overline{z_{n+h'}})\ .$$

Or, pour h fixé, on a

$$\left|(H-h)\sum_{n=1}^{N}\mathrm{Re}(z_{n+h}\overline{z_n}) - \sum_{n=1}^{N}\sum_{h'=1}^{H-h}\mathrm{Re}(z_{n+h'+h}\overline{z_{n+h'}})\right| \leq (H-h)(H-h+1) \leq H(H+1)$$

en appiquant le résultat de la question IV.1a à la famille $(\mathrm{Re}(z_{n+h}\overline{z_n}))$ de nombres complexes de module inférieur à 1. On a, par linéarité de la partie réelle, majoration de la partie réelle par le module et positivité du module

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\sum_{h'=1}^{H-h}\mathrm{Re}(z_{n+h'+h}\overline{z_{n+h'}}) &\leq (H-h)\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\overline{z_n}\right) + H(H+1)\\ &\leq (H-h)\left|\sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\overline{z_n}\right| + H(H+1)\\ &\leq H\left|\sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\overline{z_n}\right| + H(H+1)\end{aligned}$$

et en sommant ces inégalités, il vient $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right|^2 \leq NH + 2H\sum_{h=1}^{H}\left|\sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\overline{z_n}\right| + H^2(H+1).}$

(iv) La racine carrée étant sous-additive (i.e. $\sqrt{x+y}\leq\sqrt{x}+\sqrt{y}$ pour x et y positifs, comme on le vérifie en élevant au carré), il résulte des deux questions précédentes qu'on a

$$\boxed{\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n\right| \leq \sqrt{2}\left(\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\overline{z_n}\right|\right)^{1/2} + \frac{1}{H^{1/2}} + \left(\frac{H+1}{N}\right)^{1/2} + \frac{H+1}{N}.}$$

2. D'après la partie III, (x_n) est équirépartie si et seulement si pour tout k entier relatif non nul la suite donnée par $z_n = e_k(x_n)$ tend en moyenne vers 0, i.e. $\lim \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N} z_n = 0$. Soit alors ε strictement positif et H supérieur à $1/\varepsilon^2$. Puisqu'on a, pour n et h entier, $z_{n+h}\overline{z_n} = e_k(x_{n+h}-x_n)$, par équirépartition de $(x_{n+h}-x_n)_n$ pour $h\leq H$, on dipose de N_0 entier tel que pour $N\geq N_0$, on ait $\left|\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\overline{z_n}\right| \leq \varepsilon^2$ et alors pour N supérieur à N_0, $(H+1)/\varepsilon$ et $\sqrt{(H+1)/\varepsilon}$, la majoration précédente donne

$$\left|\sum_{n=1}^{N} z_n\right| \leq (3+\sqrt{2})\varepsilon$$

et donc $\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\geq 1} \text{ est équirépartie.}}$

3. On note $(\mathbf{H}_d)$ le prédicat défini pour d entier naturel non nul par : pour tout polynôme P dans $\mathbf{R}[X]$ avec $P = \alpha_d X^d + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0$ et $\alpha_d \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, la suite de nombres réels $(P(n))_{n\geq 1}$ est équirépartie. Alors $(\mathbf{H}_1)$ est vrai d'après la question III.5. Si d est dans $\mathbf{N}$, avec $d \geq 2$ et si $(\mathbf{H}_{d-1})$ est vrai, soit P dans $\mathbf{R}[X]$ avec $P = \alpha_d X^d + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0$ et $\alpha_d \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Alors pour tout entier h supérieur à 1, $P(X+h) - P$ est dans $\mathbf{R}_{d-1}[X]$ et de coefficient dominant $hd\alpha_d$. Comme $hd\alpha_d$ est irrationnel car α_d l'est et h et d sont rationnels non nuls, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et obtenir l'équirépartition de la suite $(P(n+h) - P(n))$. La question précédente permet d'en déduire celle de $(P(n))$, de conclure par récurrence. Ceci termine la démonstration du $\boxed{\text{Théorème de WEYL}}$

V - Approximation rationnelle et équirépartition quantitative

1. Soit p, q, p' et q' des entiers avec $q > 0$ et $q' > 0$. On a

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'}\right| = \frac{|pq' - p'q|}{qq'}$$

et donc si $\dfrac{p}{q} \neq \dfrac{p'}{q'}$, cette quantité est supérieure à $\dfrac{1}{qq'}$. Par conséquent si $\dfrac{p'}{q'}$ est de LIOUVILLE, pour tout entier n on dispose de q_n entier tel que $q_n > 1$ et $\dfrac{1}{q_n q'} < \dfrac{1}{q_n^n}$ et donc $q' \geq q_n^{n-1} \geq 2^{n-1}$, ce qui est impossible. Donc $\boxed{\text{un nombre de LIOUVILLE est irrationnel.}}$

2. (i) Soit p et q deux entiers avec $q > 0$ et r le ppcm des dénominateurs des coefficients de P. Comme $q^d P(p/q)$ est une combinaison entière de ces coefficients, soit il est nul, soit il est supérieur en valeur absolue à $\frac{1}{r}$. Comme P est supposé irréductible, il n'admet pas de racine rationnelle et on en déduit $P(p/q) \geq \frac{1}{rq^d}$. D'après le théorème de LAGRANGE, dit des accroissements finis, on en déduit qu'on dispose de x entre α et $\frac{p}{q}$ tel que $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| |P'(x)| \geq \dfrac{1}{rq^d}$. Et donc en posant M le supremum de la fonction continue P sur le segment $[\alpha - 1; \alpha + 1]$, on obtient

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \min(1, \frac{1}{rMq^d}) \geq \min(1, \frac{1}{rM})\frac{1}{q^d}$$

d'où l'existence de c_α dépendant de α mais pas de p et q, tel que $\boxed{\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \geq \dfrac{c_\alpha}{q^d}.}$

(ii) Soit α un nombre réel algébrique sur $\mathbf{Q}$. S'il est rationnel, il n'est pas de LIOUVILLE d'après la question V.1. Sinon il est racine d'un polynôme comme dans la question ci-dessus et on en déduit, comme dans la question V.1 que pour tout entier naturel non nul n, on dispose de q_n entier avec $q_n > 1$ tel que $0 < c_\alpha \leq q_n^{d-n}$ et donc, pour $n > d$, on a $0 < c_\alpha \leq 2^{d-n} = \mathrm{o}\,(1)$ et cette contradiction montre qu'un $\boxed{\text{nombre algébrique n'est pas de LIOUVILLE.}}$

(iii) Pour n entier on a $10^{n!} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k!}} \equiv 1 \pmod{10}$ et donc en posant $q_n = 10^{n!}$ et $p_n = 10^{n!} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k!}}$, on a $p_n \wedge q_n = 1$ car l'un n'admet que 2 et 5 comme diviseurs premiers, et l'autre leur est premier. On a alors $(n+1)! - nn! = n! \geq 1$ et pour $k > n$, $(k+1)! - k! = kk! \geq 1$, donc $k! - nn! \geq k - n$, et ainsi

$$0 < q_n^n \left(\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k! - nn!}} \leq \sum_{p=1}^{+\infty} 10^{-p} = \frac{1}{9} < 1\,.$$

Il en résulte que α est un nombre de LIOUVILLE. D'après la question précédente il en découle que $\boxed{\alpha \text{ n'est pas algébrique.}}$

3. Puisque α n'est pas un nombre de Liouville, on dispose de d dans $\mathbf{N}^*$ tel que pour tous p et q entiers avec $q > 1$ on ait $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \geq \dfrac{1}{q^d}$. Pour k entier on pose $p = \left[k\alpha + \frac{1}{2}\right]$ et alors

$$|\sin(k\pi\alpha)| = |\sin(k\pi\alpha - p\pi)| \geq \frac{2}{\pi}\,|k\pi\alpha - p\pi| \geq 2\,|k|^{1-d}$$

par concavité du sinus sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et d'après ce qui précède.
D'après la question II.5c, la suite $S_n(f)$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$ vers f. Soit alors N un entier naturel non nul, par linéarité de la somme pour les séries convergentes, on a pour tout réel x

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F_n(x) = \lim \sum_{k=-p}^{p} c_k(f)e_k(x)\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e_k(n\alpha)\ .$$

Comme calculé en question III.6, on a, pour k non nul,

$$\left|\sum_{n=1}^{N} e_k(n\alpha)\right| \leq \frac{1}{|\sin(k\pi\alpha)|} \leq \frac{1}{2}\,|k|^{d-1}\ .$$

Le terme pour $k = 0$ donnant $c_0(f)$, on a donc

$$\left|\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F_n(x)\right| \leq \frac{1}{N}\lim \sum_{k=1}^{p} \frac{|c_k(f)| + |c_{-k}(f)|}{2} k^{d-1}\ ,$$

cette dernière limite existant d'après la question II.5b. Il existe donc une constante $C_{\alpha,f}$ dans $\mathbf{R}_+^*$ et dépendant de α et de f, mais indépendante de N telle que $\boxed{\left\|\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F_n\right\|_\infty \leq \frac{C_{\alpha,f}}{N}.}$