Première composition de mathématiques
ENS Paris 1986 – MP

NOTATIONS

On munit $\mathbf{R}^n$ du produit scalaire donné par $\langle x \mid y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ et de la norme associée. On identifie les endomorphismes de $\mathbf{R}^n$ aux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On note 1_n la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $x \in \mathbf{R}^n$, on note Ax l'image de x par A. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme donnée par

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in\mathbf{R}^n \\ \|x\|=1}} \|Ax\| = \sup_{x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\ .$$

On ne demande pas de vérifier qu'il s'agit bien d'une norme.

Le but du problème est de démontrer l'énoncé (E) suivant :

Soit n un entier avec $n \geq 1$, I un intervale ouvert de $\mathbf{R}$, et $M\,:\, I \to \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une application de classe C^1 telle que pour tout t dans I la matrice $M(t)$ soit symétrique. Il existe alors n applications $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de classe C^1 de I dans $\mathbf{R}$ telles que le polynôme caractéristique de $M(t)$ soit $\prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i(t))$ pour tout t dans I.

Les parties I, II et III du problème sont indépendantes. **Les préliminaires peuvent être admis en prenant soin de le mentionner clairement sur la copie.**

Préliminaires

1) Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles, ainsi que a un point dans $\overline{I} \setminus I$.
   On suppose que f n'a qu'un nombre fini de valeurs limites en a, i.e. on dispose d'une partie finie Y de $\mathbf{R}$ telle que pour toute suite (a_n) de points de I tendant vers a et telle que $(f(a_n))$ converge, on a $\lim f(a_n) \in Y$.
   Montrer que f admet une limite en a dans $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$.
2) Soit E et F deux espaces vectoriels réels normés de dimension finie, U un ouvert de E, f une fonction de classe C^1 de U dans F, et x dans U tel que $\mathrm{d}f(x)$ soit bijective. On note $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ les normes sur E et F.
   a. On suppose $E = F$, $x = 0$ et $\mathrm{d}f(x) = \mathrm{Id}_E$. On pose $\varphi = \mathrm{Id} - f$.
      Montrer qu'il existe r dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que φ soit lipschitzienne de rapport $\frac{1}{2}$ sur la boule ouverte $B(0, r)$ de centre 0 et de rayon r.
      En déduire que f est injective sur cette boule ouverte.
   b. On reprend les hypothèses et notations de la question précédente et on note $U_r = B(0, r)$ et $V_r = f(U_r)$.
      Soit y_0 dans V_r, a dans U_r tel que $f(a) = y_0$, r' vérifiant $0 < 2r' < r - \|a\|_E$ et y dans $\overline{B}(y_0, r')$, la boule fermée de centre y_0 et de rayon r'. Pour k dans $\mathbf{N}$, on pose $y_{k+1} = y + \varphi(y_k)$.
      Montrer que (y_k) est à valeurs dans $\overline{B}(a, 2r')$, puis que la série $\sum(y_{k+1} - y_k)$ est absolument convergente.
      En déduire que V_r est ouvert.
   c. Dans le cas général, montrer qu'il existe un voisinage U_r de x dans U et un voisinage V_r de $f(x)$ dans F, tels que f soit une bijection de U_r dans V_r et que f^{-1} soit de classe C^1 sur U_r.

PARTIE I - Exemples et contre-exemples

1) Montrer que l'énoncé obtenu en remplaçant l'hypothèse « $M(t)$ est symétrique », par « $M(t)$ est diagonalisable » dans (E) est faux. On pourra considérer l'application $M : \mathbf{R} \to \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ définie par $M(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour $t \neq 0$,

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & t^3 \left(2 + \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2 \\ t & 0 \end{pmatrix} .$$

2) Montrer que sous les hypothèses de (E) il n'existe pas en général d'application continue $e : I \to \mathbf{R}^n$ telle que $e(t)$ soit un vecteur propre (donc non nul) de $M(t)$ pour tout t dans I.
3) Montrer que (E) implique le résultat suivant : pour toute suite finie $f_1, \ldots, f_m$ d'applications de classe C^1 de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, il existe une application $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^1 telle que $g^2 = f_1^2 + \cdots + f_m^2$.
4) Montrer que la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(0) = 0$ et, pour $t \neq 0$, $f(t) = t^5 \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ est de classe C^2 et qu'il n'existe aucune application $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^2 telle que $g^2(t) = t^{14} + f^2(t)$ pour tout réel t.
5) Montrer que, même si l'on suppose dans l'énoncé (E) l'application M de classe C^2, il n'est pas possible en général de trouver des fonctions $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ satisfaisant aux conclusions de (E) et qui soient de classe C^2.

PARTIE II - Prolongement en un point

Dans cette partie, a et b sont des nombres réels tels que $a < b$, n un entier avec $n \geq 1$, $M : [a; b[\to \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $\lambda :]a; b[\to \mathbf{R}$ des applications continues. On suppose que ia matrice $M(t)$ est symétrique pour tout t dans $[a; b[$, et que $\lambda(t)$ est une valeur propre de $M(t)$ pour tout t dans $]a; b[$.

1) Montrer que λ admet un prolongement continu au point a. On pose $\lambda(a) = \lim_{a^+} \lambda$. Est-ce que $\lambda(a)$ est valeur propre de $M(a)$?
2) Montrer que $\mathbf{R}^n$ est somme directe orthogonale du noyau N et de l'image L de $M(a) - \lambda(a)1_n$.

Étant donné x dans $\mathbf{R}^n$, on notera dans la suite x_N et x_L les éléments de N et L tels que $x = x_N + x_L$.

3) Supposons que M admette en a une dérivée à droite $M'_d(a)$. Montrer que λ admet en a une dérivée à droite $\lambda'_d(a)$ et que $\lambda'_d(a)$ est valeur propre de l'endomorphisme $x \mapsto (M'_d(a)x)_N$ de l'espace vectoriel N.

   On pourra remarquer que, si $(t_m)_{m \geq 1}$ est une suite d'éléments de $]a; b[$ tendant vers a, et si pour tout m supérieur à 1 on choisit un vecteur propre $e(t_m)$ de norme 1 de $M(t_m)$ relatif à la valeur propre $\lambda(t_m)$, une sous-suite de la suite $(e(t_m))_{m \geq 1}$ est convergente.
4) Supposons que M admette en tout point t de $[a; b[$ une dérivée à droite $M'_d(t)$ et que l'on ait $M'_d(a) = \lim_{a^+} M'_d$.
   a. Soit t dans $[a; b[$. Montrer que λ admet en t une dérivée à droite $\lambda'_d(t)$ et qu'il existe $e(t)$ dans $\mathbf{R}^n$ tel que $\|e(t)\| = 1$, $M(t)e(t) = \lambda(t)e(t)$ et $\langle e(t) \mid M'_d(t)e(t) \rangle = \lambda'_d(t)$.
   b. Montrer que l'on a $\lambda'_d(a) = \lim_{a^+} \lambda'_d$.

PARTIE III - Séparation de valeurs propres

Dans cette partie, I est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, n un entier avec $n \geq 1$, $M : I \to \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une application de dasse C^1 et a un point de I. On suppose que le polynôme caractéristique de $M(a)$ est produit de deux polynômes unitaires Q et R, premiers entre eux, et à coefficients réels.

1) Montrer qu'il existe un voisinage I_1 de a dans I, et pour tout t dans I, des polynômes unitaires Q_t et R_t de mêmes degrés respectivement que Q et R, à coefficients réels, et tels que :

— on ait $Q_a = Q$ et $R_a = R$;

— les coefficients de Q_t et R_t soient des fonctions de dasse C^1 de t sur I_1 ;

— pour tout t dans I_1, le polynôme caractéristique de $M(t)$ soit égal à $Q_t R_t$.

On pourra se servir des préliminaires.

2) Montrer qu'il existe un voisinage I_2 de a dans I_1 tel que les polynômes Q_t et R_t soient premiers entre eux pour tout t dans I_2.

3) Soit t dans I_2. Notons F_t et G_t les images des endomorphismes $Q_t(M(t))$ et $R_t(M(t))$ de $\mathbf{R}^n$. Montrer que $\mathbf{R}^n$ est somme directe de F_t et G_t, et que F_t et G_t sont stables par $M(t)$.

4) Montrer qu'il existe un voisinage I_3 de a dans I_2, un entier m compris entre 0 et n, et n applications $e_1, \ldots, e_n$ de classe C^1 de I_3 dans $\mathbf{R}^n$ telles que pour tout t dans I_3, les vecteurs $e_1(t), \ldots, e_m(t)$ forment une base de F_t et les vecteurs $e_{m+1}(t), \ldots, e_n(t)$ forment une base de G_t.

5) Lorsque les matrices $M(t)$, pour t dans I, sont symétriques, montrer que les applications $e_1, \ldots, e_n$ de la question précédente peuvent être choisies de sorte qu'en outre $e_1(t), \ldots, e_n(t)$ soit orthonormale quel que soit t dans I_3.

Montrer qu'alors les endomorphismes de F_t et G_t induits par $M(t)$ sont représentés dans les bases $e_1(t), \ldots, e_m(t)$ et $e_{m+1}(t), \ldots, e_n(t)$ par des matrices symétriques, et que celles-ci sont des fonctions de classe C^1 de t sur I_3.

PARTIE IV - Démonstration de l'énoncé (E)

Nous démontrerons l'énoncé (E) par récurrence sur n. Vérifier que le cas $n = 1$ est immédiat. On supposera donc $n \geq 2$ et on admettra dans ce qui suit l'énoncé (E) relatif aux entiers n' avec $n' < n$.

On considère un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ et une application $M : I \to \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ de classe C^1 telle que $M(t)$ soit une matrice symétrique pour tout t dans I.

Étant donné une partie ouverte U de I, on note $\Lambda(U)$ l'ensemble des n-uplets $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ d'applications de classe C^1 de U dans $\mathbf{R}$ tels que, quel que soit t dans U, le polynôme caractéristique de $M(t)$ soit égal à $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i(t))$.

1) Soit a dans I tel que $M(a)$ ait au moins deux valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe un voisinage J de a dans I tel que $\Lambda(J)$ soit non vide.

2) Soit a, b dans I, avec $a < b$, et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ dans $\Lambda(]a; b[)$. On sait d'après II que les couples $(\lambda_i(t), \lambda_i'(t))$ ont des limites lorsque t tend vers a par la droite. Comment peut-on décrire les n couples limites en termes de $M(a)$ et de $M'(a)$?

<u>Application numérique</u> au cas où $I = \mathbf{R}$, $a = 0$, et $M(t) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 2 & t & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

3) Soit a, b, c dans I avec $a < b < c$, et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ dans $\Lambda(]a; b[)$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ dans $\Lambda(]b; c[)$. Montrer qu'il existe une permutation σ dans $\mathscr{S}_n$ et un élément de $\Lambda(]a; c[)$ dont la restriction à $]a; b[$ est $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et dont la restriction $]b; c[$ est $(\mu_{\sigma(1)}, \ldots, \mu_{\sigma(n)})$.

4) Soit U une partie ouverte de I. Montrer que si tout point t de U possède un voisinage J_t dans I tel que $\Lambda(J_t) \neq \emptyset$, alors $\Lambda(U)$ est non vide. On pourra commencer par traiter le cas où U est un intervalle.

5) Soit a dans I. Supposons que la matrice $M(a)$ soit scalaire et que $M'(a)$ ait au moins deux valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe un voisinage J de a dans I tel que $\Lambda(J)$ soit non vide.

6) Montrer que l'ensemble F des a dans I tels que $M(a)$ et $M'(a)$ soient scalaires, est une partie fermée de I, et que $\Lambda(I \setminus F)$ est non vide.

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ dans $\Lambda(I \setminus F)$. On prolonge les applications λ_i à I en définissant $\lambda_i(t)$, pour t dans F, comme l'unique valeur propre de $M(t)$. Montrer que les applications ainsi prolongées sont continues sur I, puis qu'elles satisfont aux conclusions de (E).

Première composition de mathématiques
ENS Paris 1986 – MP

Préliminaires

1) Soit (a_n) une suite quelconque dans I, convergeant vers a. Soit (b_n) et (c_n) deux suites extraites de (a_n) telles que $(f(b_n))$ et $(f(c_n))$ convergent ou divergent vers $\pm\infty$, i.e. $\lim f(b_n) \in Y \cup \{\pm\infty\}$ et $\lim f(c_n) \in Y \cup \{\pm\infty\}$. On suppose que ces deux limites sont distinctes. Par finitude de Y, on dispose de z entre ces deux limites et n'appartenant pas à Y. Par définition de la limite à partir d'un certain rang les signes de $f(b_n) - z$ et $f(c_n) - z$ sont constants et, par choix de z, on a alors $(f(b_n)-z)(f(c_n)-z) < 0$. La continuité de f et le théorème de Bolzano, dit des valeurs intermédiaires, assure pour tout tel entier n l'existence de z_n entre b_n et c_n tel que $f(z_n) = z$. Par encadrement on a $|b_n - z_n| = \mathrm{O}\left(|b_n - c_n|\right) = \mathrm{o}\left(1\right)$ et donc $\lim z_n = a$ et $\lim f(z_n) = z$. Ceci entre en contradiction avec $z \notin Y$.

   Ainsi si $(f(a_n))$ est bornée, par réciproque partielle du théorème de Bolzano-Weierstrass, elle converge. Sinon $(|f(a_n)|)$ admet une sous-suite divergeant vers $+\infty$ et donc $(f(a_n))$ en admet une divergeant vers $\pm\infty$. Elle ne peut alors avoir de sous-suite divergeant à l'opposé, et ne peut avoir de sous-suite bornée, donc elle diverge vers $\pm\infty$.

   La limite, finie ou infinie, ne saurait dépendre de (a_n) car si (a'_n) en est une autre, en considérant $(a_0, a'_0, a_1, a'_1, \cdots, a_n, a'_n, \dots)$, on obtient $\lim f(a_n) = \lim f(a'_n)$. Le critère séquentiel assure que $\boxed{\lim_a f \text{ existe dans } \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}.}$

2) a. Par hypothèse φ est de classe C^1 sur U et on a $\mathrm{d}\varphi(0) = 0$. Par continuité de $\mathrm{d}\varphi$, on dispose de r dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que, pour tout a dans $B(0,r)$, on ait $\|\mathrm{d}\varphi(a)\| \le \frac{1}{2}$. L'inégalité de Lagrange, dite des accroissements finis, entraîne que $\boxed{\varphi \text{ est } \tfrac{1}{2}\text{-lipschitzienne sur } B(0,r).}$

   Pour a et b dans $B(0,r)$, on a $f(a) = f(b) \Longrightarrow \varphi(a) - \varphi(b) = a - b \Longrightarrow a = b$, d'après le caractère lipschitzien, i.e. $\boxed{f \text{ est injective sur } B(0,r).}$

   b. Pour k entier, on a $y_{k+1} - a = y - y_0 + \varphi(y_k) - \varphi(a)$. On a $\|y - y_0\|_E \le r'$ et, si $y_k \in B(0,r)$, $\|\varphi(y_k) - \varphi(a)\|_E \le \frac{1}{2}\|y_k - a\|_E$. Par inégalité triangulaire, $\overline{B}(a, 2r') \subset B(0,r)$ et donc

$$y_k \in \overline{B}(a,2r') \Longrightarrow y_{k+1} \in \overline{B}(a,2r') \ .$$

   Par principe de récurrence, $\boxed{(y_k) \text{ est donc à valeurs dans } \overline{B}(a,2r').}$

   On a par ailleurs, pour tout entier k, $y_{k+2} - y_{k+1} = \varphi(y_{k+1}) - \varphi(y_k)$ et donc, par récurrence immédiate, $\|y_{k+1} - y_k\|_E \le 2^{-k}\|y_1 - y_0\|_E$ et donc, par comparaison à une série géométrique de raison dans $[0;1[$, $\boxed{\sum(y_{k+1} - y_k) \text{ est absolument convergente.}}$

   On en déduit que (y_k) converge. Par passage à la limite $\lim y_k \in \overline{B}(a,2r') \subset B(0,r)$ et, par continuité de f, $f(\lim y_k) = y$, i.e. $y \in f(U_r)$, puis $B(a,2r') \subset V_r$. Donc $\boxed{V_r \text{ est ouvert.}}$

   c. On se ramène au cas précédent en considérant $u \mapsto \mathrm{d}f(x)^{-1}(f(x+u) - f(x))$: par hypothèse, cette fonction est de classe C^1 et sa différentielle en 0 est Id_E. On dispose donc de U_r un voisinage ouvert de x dans U et V_r un voisinage ouvert de $f(x)$ dans F tels que $\boxed{f \text{ induise une bijection de } U_r \text{ sur } V_r.}$

   Comme $\mathrm{d}\varphi$ est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur U_r, la série $\sum \mathrm{d}\varphi^n$ est normalement convergente, de somme l'inverse de $\mathrm{Id}_E - \mathrm{d}\varphi$, i.e. de $\mathrm{d}f$. On en déduit que $\mathrm{d}f$ est inversible sur U_r et de norme inférieure à 2. Ce qu'on vient de démontrer assure alors que l'image de tout ouvert dans U_r est ouvert dans F et donc que f^{-1} est continu sur U_r.

   Soit y dans V_r et $x = f^{-1}(y)$. Soit k dans F vérifiant $y + k \in V_r$ et $h = f^{-1}(y+k) - x$. On a donc $f(x+h) = y + k$ et ainsi $k = f(x+h) - f(x) = \mathrm{d}f(x)\cdot h + \mathrm{o}\left(h\right)$. Il vient

$$f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) = h = \mathrm{d}f(x)^{-1}(k + \mathrm{o}\left(h\right)) = \mathrm{d}f(x)^{-1}(k) + \mathrm{o}\left(h\right) \ .$$

Or, puisque φ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur U_r,

$$\|h\| = \|x+h-x\| \leq 2\,\|f(x+h)-f(x)\| = 2\,\|k\| \ .$$

Il en résulte $f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y) = \mathrm{d}f(x)^{-1}(k)+\mathrm{o}\,(k)$ et donc f^{-1} est différentiable, de différentielle $(\mathrm{d}f\circ f^{-1})^{-1}$. Elle est donc continue et la formule précédente montre que sa différentielle aussi, i.e. $\boxed{f^{-1} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } U_r.}$

PARTIE I

1) On considère l'application suggérée par l'énoncé, notée $(m_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$. Comme $M(0)$ est nulle elle est diagonalisable et comme, pour $t\neq 0$, on a $2+\sin\left(\frac{1}{t}\right) \geq 1 > 0$ et donc $t^2\left(2+\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) > 0$, ainsi $\chi_{M(t)} = X^2 - t^4\left(2+\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2$, $\chi_{M(t)}$ est simplement scindé sur $\mathbf{R}$ donc $M(t)$ est diagonalisable. De plus m_{ij} est polynomiale, donc de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, sauf pour $(i,j) = (1,2)$. Dans ce dernier cas m_{12} est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^*$ car elle y est définie et les fonctions qui la composent le sont. En 0 on a $m_{12}(t) = \mathrm{o}\,(t)$ et donc m_{12} est dérivable en 0, de dérivée nulle. Pour $t\neq 0$ on a $m_{12}'(t) = 3t^2\left(2+\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2 - 2t\left(2+\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)\cos\left(\frac{1}{t}\right) = \mathrm{o}\,(1)$ et donc m_{12} est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.
Supposons disposer de deux applications de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, λ_1 et λ_2, telles que $\chi_M = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$, i.e. $\lambda_1+\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1\lambda_2 = -m_{12}m_{21}$. On a déjà remarqué que la fonction f définie par $f(t) = t^2\left(2+\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ est strictement positive sur $\mathbf{R}^*$ et donc $\frac{\lambda_1}{f}$ est continue sur $\mathbf{R}^*$ et à valeurs dans $\{\pm 1\}$. C'est donc une fonction constante sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$. Quitte à renuméroter, on peut donc supposer $\lambda_1 = f = -\lambda_2$ sur $\mathbf{R}_+^*$. Il en résulte, pour $t>0$, $\lambda_1'(t) = 2t\left(2+\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) - 2\cos\left(\frac{1}{t}\right)$ et ceci contreduit la continuité de λ_1' en 0 car, quand k entier tend vers l'infini, $\lambda_1'(\frac{1}{2k\pi}) = -2+\mathrm{o}\,(1)$ et $\lambda_1'(\frac{1}{(2k+1)\pi}) = 2+\mathrm{o}\,(1)$. Ainsi $\boxed{\text{(E) est faux en remplaçant symétrique par diagonalisable.}}$

2) On considère M donnée par $M(t) = (t-|t|)^2A+(t+|t|)^2B$ avec $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Ainsi M est polynomiale de valuation 2 sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$, et donc M est de classe C^1 sur ces intervalles et sa dérivée admet une limite nulle en 0. Comme on a aussi $M(t) = \mathrm{o}\,(t)$ en 0, M est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$. Les espaces propres sont constants pour t dans $\mathbf{R}_+^*$ ou dans $\mathbf{R}_-^*$. Si e est une fonction continue à valeurs dans les espaces propres de M, par continuité en 0, $e(0)$ est simultanément colinéaire à $(1,0)$ ou $(0,1)$, et à $(1,1)$ ou $(1,-1)$, ce qui est impose $e(0)=0$: $\boxed{\text{une telle fonction n'existe pas en général.}}$

3) On suppose (E) et on démontre par récurrence le prédicat sur m dans $\mathbf{N}^*$ donné par $(\mathbf{H}_m)$: pour tous $f_1, \ldots, f_m$ dans $C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$, il existe g dans $C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ tel que $g^2 = f_1^2+\cdots+f_m^2$. Pour $m=1$ le prédicat est tautologique en prenant $g=f_1$. Soit alors, pour m dans $\mathbf{N}^*$, $f_1, \ldots, f_{m+1}$ dans $C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ et g dans $C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ tel que $g^2 = f_1^2+\cdots+f_m^2$. On considère M donné par $M = \begin{pmatrix} g & f_{m+1}\\ f_{m+1} & -g\end{pmatrix}$ de sorte que M est de classe C^1 car ses coefficients le sont, est symétrique, et vérifie $\chi_M = X^2-(g^2+f_{m+1}^2)$. L'énoncé (E) entraîne alors l'existence de λ_1 et λ_2 de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, de somme nulle et de produit $-(g^2+f_{m+1}^2)$. En particulier $\lambda_1^2 = -\lambda_1\lambda_2 = f_1^2+\cdots+f_{m+1}^2$ et donc le prédicat étudié est héréditaire. Le principe de récurrence permet de conclure

$$\boxed{\text{pour tous } m \text{ dans } \mathbf{N}^* \text{ et } f_1, \ldots, f_m \text{ dans } C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}), \text{ il existe } g \text{ dans } C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}) \text{ tel que } g^2 = f_1^2+\cdots+f_m^2.}$$

4) La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^*$ car elle y est définie et les fonctions qui la composent le sont. Pour t non nul, il vient

$$f'(t) = 5t^4\sin\left(\frac{1}{t}\right) - t^3\cos\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{et} \quad f''(t) = t(20t^2-1)\sin\left(\frac{1}{t}\right) - 8t^2\cos\left(\frac{1}{t}\right)$$

de sorte que, par le théorème de la limite de la dérivée $\boxed{f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbf{R} \text{ et } f'(0) = f''(0) = 0.}$
Soit alors g de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ tel que, pour t réel, $g^2(t) = t^{14}+f^2(t)$, et donc $g(t)g'(t) = 7t^{13}+f(t)f'(t)$

puis $g''(t)g(t)+g'(t)^2 = 91t^{12} + f''(t)f(t)+f'(t)^2$. Pour t de la forme $\frac{1}{2k\pi}$ avec k entier, on a $g^2(t) = t^{14}$, $g'(t)^2 = 49t^{12}$ et $g''(t)g(t) = 91t^{12} + t^6 - 49t^{12}$, et donc $g''(t)^2 = \left(\frac{1+42t^6}{t}\right)^2$. En particulier $\lim \left|g''(\frac{1}{2k\pi})\right| = +\infty$, de sorte que g'' ne saurait être continu en 0. Cette contradiction assure que $\boxed{\text{une telle fonction n'existe pas.}}$

5) Avec les notations de la question précédente, on considère M donné par $M(t) = \begin{pmatrix} t^7 & f(t) \\ f(t) & -t^7 \end{pmatrix}$. Alors M est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ car ses coefficients le sont. Si λ_1 et λ_2 sont des fonctions de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ satisfaisant aux conclusions de (E), alors $\lambda_1+\lambda_2 = 0$ et il vient, pour t réel, $\lambda_1^2(t) = t^{14} + f^2(t)$. La question précédente assure que c'est impossible et donc, pour M et λ_1, …, λ_n comme dans (E), avec de plus M de classe C^2, $\boxed{\text{de telles fonctions } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \text{ de classe } C^2 \text{ n'existent pas en général.}}$

PARTIE II

1) Puisque M est continu en a, $\|M\|$ est borné au voisinage de a : on dispose d'un segment I, avec $I = [a; c]$ et $a < c < b$, et d'un réel positif K tels que, pour x dans I, $\|M(x)\| \leq K$. Par définition de la norme, on a en particulier, pour x dans I, $|\lambda(x)| \leq K$.
Soit alors (a_n) une suite à valeurs dans $]a; b[$ convergeant vers a. À partir d'un certain rang, elle est à valeurs dans I et donc $(\lambda(a_n))$ est bornée et, en vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass, admet au moins une valeur d'adhérence. De plus, par continuité, de M, de l'application $A \mapsto \chi_A$ qui à une matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ associe son polynôme caractéristique, et de l'application $(P, x) \mapsto P(x)$ qui à un polynôme et un réel associe l'évaluation du polynôme en ce réel, toute valeur d'adhérence de $(\lambda(a_n))$ est racine de $\chi_{M(a)}$. Il résulte alors de la question 1 des préliminaires que λ admet une limite dans $\mathrm{Sp}(M(a)) \cup \{\pm\infty\}$. Étant de plus bornée, $\boxed{\lambda \text{ admet un prolongement continu en } a, \text{ avec } \lambda(a) \in \mathrm{Sp}(M(a)).}$

2) Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, x dans $\mathrm{Ker}(f)$ et y dans E. On a $\langle f(y) \,|\, x\rangle = \langle f(x) \,|\, y\rangle = 0$ et donc $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont orthogonaux. Le théorème du rang assure alors qu'ils sont supplémentaires orthogonaux. Puisque $M(a) - \lambda(a)1_n$ est une matrice symétrique réelle, on en déduit $\boxed{\mathbf{R}^n = N \oplus^\perp L.}$

3) Soit (t_m) est une suite d'éléments de $]a; b[$ tendant vers a. On dispose pour tout entier m d'un vecteur propre unitaire e_m de $M(t_m)$ relatif à la valeur propre $\lambda(t_m)$. La sphère unité d'un espace euclidien étant un fermé borné d'un espace vectoriel de dimension finie, c'est un compact d'après le théorème de Heine-Borel. Quitte à extraire une sous-suite on peut donc supposer que (e_m) converge vers un vecteur unitaire, noté e. Par continuité de l'évaluation, de M et λ en a, on déduit de $((M(t_m) - \lambda(t_m)1_n)e_m) = (0)$, $M(a)e = \lambda(a)e$, i.e. $e \in N$. On a alors pour tout entier m

$$\frac{1}{t_m - a}\left(M(t_m) - M(a)\right)e_m = \frac{\lambda(t_m) - \lambda(a)}{t_m - a} e_m + \frac{1}{t_m - a}\left(M(a) - \lambda(a)1_n\right)e_m$$

et donc

$$\left(\frac{1}{t_m - a}\left(M(t_m) - M(a)\right)e_m\right)_N = \frac{\lambda(t_m) - \lambda(a)}{t_m - a}(e_m)_N \ .$$

On note u_m le membre de gauche. Le projecteur sur N étant une application linéaire en dimension finie, il est continu. On en déduit, par passage à la limite, $\lim u_m = (M_d'(a)e)_N$. Par continuité du produit scalaire, par exemple inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit aussi $\lim \langle u_m \,|\, e\rangle = \langle (M_d'(a)e)_N \,|\, e\rangle$ et $\lim \langle (e_m)_N \,|\, e\rangle = \|e\|^2 = 1$. Ainsi $\langle (e_m)_N \,|\, e\rangle$ est non nul à partir d'un certain rang, et alors $\dfrac{\langle u_m \,|\, e\rangle}{\langle (e_m)_N \,|\, e\rangle}$ admet une limite, i.e. $\dfrac{\lambda(t_m) - \lambda(a)}{t_m - a}$ admet une limite. On la note λ_a' et il vient en passant à la limite dans l'identité précédente $(M_d'(a)e)_N = \lambda_a' e$. Comme e est non nul, λ_a' est un élément du spectre de l'endomorphisme de N donné par $x \mapsto (M'(a)x)_N$.

On applique la question 1 des préliminaires à la fonction sur $]a;b[$ donnée par la pente par rapport à a, qui admet donc une limite à droite en a, i.e.

$\boxed{\lambda \text{ est dérivable à droite en } a \text{ et } \lambda'_d(a) \text{ appartient au spectre de } x \mapsto (M'(a)x)_N.}$

4) a. Dans l'étude de la question précédente on a obtenu une suite (t_m) dans $]a;b[$, tendant vers a et une suite (e_m) de vecteurs unitaires tendant vers un vecteur e vérifiant $M(a)e = \lambda(a)e$ et $\langle (M'_d(a)e)_N \,|\, e\rangle = \lim \dfrac{\lambda(t_m) - \lambda(a)}{t_m - a}$. Par dérivabilité à droite de λ en a, cette limite est $\lambda'_d(a)$. Comme e appartient à N et puisqu'un projecteur orthogonal est symétrique, on a

$$\langle (M'_d(a)e)_N \,|\, e\rangle = \langle M'_d(a)e \,|\, e_N\rangle \, \langle M'_d(a)e \,|\, e\rangle \ .$$

L'assertion est donc vraie pour $t = a$. On peut alors appliquer ce résultat, pour t dans $[a;b[$, en prenant $a = t$ et $b = b$. On en conclut que $\boxed{\lambda \text{ est dérivable à droite sur } [a;b[}$ et que, pour tout t dans $[a;b[$, il existe $e(t)$ dans $\mathbf{R}^n$ avec $\boxed{\|e(t)\| = 1,\ M(t)e(t) = \lambda(t)e(t) \text{ et } \langle e(t) \,|\, M'_d(t)e(t)\rangle = \lambda'_d(t).}$

b. Soit (t_m) est une suite d'éléments de $]a;b[$ tendant vers a. Les arguments de la question 3 montrent qu'on peut extraire une sous-suite convergente de $(e(t_m))$, convergeant vers e, unitaire, vérifiant $M(a) = \lambda(a)e$ et tel que $\langle M'_d(a)e \,|\, e\rangle = \lambda'_d(a)$.

Par continuité du produit scalaire, la suite $(\langle M'_d(t_m)e(t_m) \,|\, e(t_m)\rangle)$ admet donc une sous-suite convergeant vers $\lambda'_d(a)$, i.e. $(\lambda'_d(t_m))$ admet une sous-suite convergeant vers $\lambda'_d(a)$. Pour tout ε strictement positif, la suite $(|\lambda'_d(t_m) - \lambda'_d(a)|)$ ne saurait donc prendre une infinité de valeurs supérieures à ε sinon on disposerait d'une sous-suite contredisant la propriété précédente. On en déduit $\lim \lambda'_d(t_m) = \lambda'_d(a)$. Le critère séquentiel de la limite permet de conclure $\boxed{\lambda'_d(a) = \lim_{a^+} \lambda'_d.}$

PARTIE III

1) On note q et r les degrés respectifs de Q et R. On applique le résultat de la question 2 des préliminaires à la situation suivante : $E = \mathbf{R}_{q-1}[X] \times \mathbf{R}_{r-1}[X]$, $F = \mathbf{R}_{q+r-1}$, f donnée par $f(A,B) = (Q+A)(R+B) - X^n$, $x = (0,0)$. Alors f est polynomiale donc de classe C^∞ sur son domaine de définition et on a $\mathrm{d}f(0,0)\cdot(A,B) = QB + RA$. Puisque Q et R sont premiers entre eux le noyau de cette application est constitué de couples (A,B) avec $R \mid B$ et $Q \mid A$. Par degré, on en déduit que $\mathrm{d}f(0,0)$ est injective et donc, par dimension, bijective. Soit alors U et V des voisinages de $(0,0)$ dans E et $QR - X^n$ dans F tel que f y induise une bijection de classe C^1. Alors par continuité de M et donc aussi de $t \mapsto \chi_{M(t)}$, on dispose de I_1 un voisinage de a dans I tel que, pour t dans I_1, $\chi_{M(t)} - X^n$ est à valeurs dans V. On pose alors, pour de tels t, $(Q_t, R_t) = (Q,R) + f^{-1}(\chi_{M(t)} - X^n)$. Puisqu'on a $X^n + f(0,0) = QR = \chi_{M(a)}$, par bijectivité de f sur U, on a donc $\boxed{Q_a = Q \text{ et } R_a = R.}$ Puisque f^{-1} est de classe C^1 tout comme M, $\boxed{\text{les coefficients de } Q_t \text{ et } R_t \text{ sont réels et de classe } C^1 \text{ en } t \text{ sur } I_1}$ et, par construction, $\boxed{\deg(Q_t) = \deg(Q),\ \deg(R_t) = \deg(R) \text{ et } \chi_{M(t)} = Q_t R_t.}$

2) On note m le degré commun des polynômes Q_t pour t dans I_1. Pour de tels t, l'application φ_t de $\mathbf{R}_{n-m-1}[X] \times \mathbf{R}_{m-1}[X]$ dans $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ donnée par $(U,V) \mapsto UQ_t + VR_t$ est linéaire, par bilinéarité du produit polynomial. Par égalité des dimensions des espaces de départ et d'arrivée, on peut définir son déterminant relativement aux bases canoniques de ces espaces, noté $f(t)$. Alors $f(t)$ est non nul si et seulement si φ_t est bijective. En particulier si $f(t)$ est non nul, 1 admet un antécédent et on dispose alors d'une relation de Bézout entre Q_t et R_t, qui sont donc premiers entre eux. Réciproquement si Q_t et R_t sont premiers entre eux et si (U,V) est dans le noyau de φ_t, alors le lemme de Gauss et la relation $Q_t | Q_tU = -R_tV$ entraînent que Q_t divise V et donc $V = 0$ par degré. Il vient alors $U = 0$ par intégrité puisque Q_t est non nul, puis $f(t) \neq 0$. Par continuité du déterminant, de Q et de R, f est une fonction continue sur I_1. Puisqu'elle ne s'annule pas en a par hypothèse, on dispose d'un voisinage I_2 de a dans I_1 où f ne s'annule pas, i.e. $\boxed{Q_t \text{ et } R_t \text{ sont premiers entre eux pour } t \text{ dans } I_2.}$

3) Puisque Q_tR_t est le polynôme caractéristique de $M(t)$, il en est annulateur, d'après le théorème de Cayley-Hamilton et donc $F_t \subset \mathrm{Ker}(R_t(M(t)))$ et $G_t \subset \mathrm{Ker}(Q_t(M(t)))$. Le lemme de décomposition des noyaux assure que $\mathbf{R}^n$ est somme directe de ces deux noyaux. On a en particulier $\dim(\mathrm{Ker}(R_t(M(t)))) = n - \dim(\mathrm{Ker}(Q_t(M(t))))$ et le théorème du rang montre que F_t a même dimension que $\mathrm{Ker}(R_t(M(t)))$, de même que G_t et $\mathrm{Ker}(Q_t(M(t)))$. Les inclusions sont donc des égalités, car les dimensions sont égales et finies, et il vient $\boxed{\mathbf{R}^n = F_t \oplus G_t.}$ Puisque $M(t)$ commute avec tout polynôme en $M(t)$, il en stabilise le noyau, l'image ou tout espace propre, en particulier, $\boxed{F_t \text{ et } G_t \text{ sont } M(t)\text{-stables.}}$

4) Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de $\mathbf{R}^n$ et t dans I_2. Par définition F_t et G_t sont respectivement engendrés par les vecteurs $(f_i(t))_{1\leq i\leq n}$ et $(g_i(t))_{1\leq i\leq n}$ définis par $f_i(t) = Q_t(M(t))u_i$ et $g_i(t) = R_t(M(t))u_i$. On dispose en particulier de J_1 et J_2 des parties de $[\![1;n]\!]$ telles que $(f_i(a))_{i\in J_1}$ et $(g_i(a))_{i\in J_2}$ soient des bases respectives de F_a et G_a. On note m le cardinal de J_1. La matrice dont les colonnes sont les vecteurs $(f_i(a))_{i\in J_1}$ est alors de rang m et admet une matrice extraite de taille m inversible. De même la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $(g_i(a))_{i\in J_2}$ est alors de rang $n-m$, car $F_a \oplus G_a = \mathbf{R}^n$, et admet une matrice extraite de taille $n-m$ inversible. Par continuité du déterminant, on dispose d'un voisinage I_3 de a dans I_2 tel que ces deux matrices extraites soient inversibles pour tout t dans I_3. Pour de tels t, on en déduit que les familles $(f_i(t))_{i\in J_1}$ et $(g_i(t))_{i\in J_2}$ sont libres, comme ce sont des familles respectives de F_t et G_t, on en déduit $\dim(F_t) \geq m$ et $\dim(G_t) \geq n-m$. Comme $F_t \oplus G_t$, il y a en fait égalité et donc ce sont des bases de F_t et G_t. En écrivant $J_1 = \{j_i \,|\, 1 \leq i \leq m\}$, $J_2 = \{j_i \,|\, m+1 \leq i \leq n\}$ et, pour $1 \leq i \leq n$, $e_i(t) = f_i(t)$ si $i \leq m$ et $e_i(t) = g_{i-m}(t)$ sinon, on obtient une base $(e_i(t))_{1\leq i\leq n}$, chaque vecteur étant l'image d'un vecteur (fixe) de la base choisie de $\mathbf{R}^n$ par un polynôme à coefficients continus en t de $M(t)$, et est donc, par composition, de classe C^1 par rapport à t, i.e. $\boxed{\forall i \in [\![1;n]\!]\ e_i \in C^1(I_3, \mathbf{R}^n) \text{ et } \forall t \in I_3,\ F_t = \mathrm{V}ect\,(e_i(t))_{1\leq i\leq m} \text{ et } G_t = \mathrm{V}ect\,(e_i(t))_{m+1\leq i\leq n}.}$

5) On reprend les notations de la question précédente et pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n-m$, on définit par récurrence x_i et x_{m+j} grâce au procédé d'orthonomalisation de Gram-Schmidt : x_i (resp. x_{m+j}) est le vecteur donné par $e_i - \sum_{k<i} \langle x_k \,|\, e_i\rangle$ (resp. $e_{m+j} - \sum_{k<j} \langle x_{m+k} \,|\, e_{m+j}\rangle$) et divisé par sa norme. Puisqu'on applique le procédé à des familles libres, il est bien défini et, pour tout t dans I_3, les familles $(x_i(t))_{1\leq i\leq m}$ et $(x_i(t))_{m+1\leq i\leq n}$ sont des bases orthonormées de F_t et G_t respectivement. Le produit scalaire et le carré de la norme étant de classe C^∞, tout comme la racine carrée sur $\mathbf{R}_+^*$, les fonctions x_i ont la même régularité que les fonctions e_i, i.e. sont de classe C^1 sur I_3.

D'après l'argument donné en question II.2, pour t dans I_3, si $M(t)$ est symétrique, F_t et G_t sont en somme directe orthogonale puisque l'un est le noyau et l'autre l'image de la matrice symétrique réelle $Q_t(M(t))$. On en déduit qu'en fait $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est orthonormée, i.e.

$\boxed{\text{on peut supposer que, pour tout } t \text{ dans } I_3,\ (e_i(t))_{1\leq i\leq n} \text{ est orthonormée.}}$

Soit t dans I_3. L'endomorphisme représenté par $M(t)$ est symétrique et donc sa restriction à tout sous-espace stable l'est également. La matrice de cette restriction dans une base orthonormée du sous-espace stable considérée est alors symétrique réelle. Dans le cas de F_t (resp. G_t) relativement à la base orthonormée $(e_i(t))$ pour $1 \leq i \leq m$ (resp. $m+1 \leq i \leq n$), les coefficients matriciels sont donnés par $\langle M(t)e_j(t) \,|\, e_i(t)\rangle$ et sont donc des fonctions de classe C^1 en t, car les e_i et M le sont et le produit scalaire est polynomial donc de classe C^∞ :

$\boxed{\text{les endomorphismes induits sur } F_t \text{ et } G_t \text{ sont symétriques et de classe } C^1 \text{ sur } I_3.}$

PARTIE IV

Pour $n = 1$, on a $\lambda_1 = M$ ou plutôt $\lambda_1 = \det(M)$ et donc λ_1 est de classe C^1 sur I.

1) Puisque $M(a)$ est symétrique réelle, on dispose de λ une de ses valeurs propres. Soit m sa multiplicité, $R_a = (X-\lambda)^m$ et Q_a tel que Q_aR_a soit le polynôme caractéristique de $M(a)$. Par hypothèse Q_a n'est pas constant et donc Q_a et R_a sont unitaires et premiers entre eux, car λ n'est pas racine de R_a. Il résulte de la partie III qu'on dispose d'un voisinage J de a dans I et, pour t dans J, de F_t et G_t des

sous- espaces $M(t)$-stables tels que les bi-restrictions de $M(t)$ à F_t et G_t soient représentées par des matrices symétriques réelles à coefficients de classe C^1 sur J. La construction montre que les espaces F_t sont tous de la même dimension que $\mathrm{Ker}(M(a)-\lambda 1_n)$, i.e. m, et les espaces G_t de dimension $n-m$. Comme $1 \le m < n$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux matrices de ces bi-restrictions afin de disposer de $(\lambda_i)_{1\le i\le m}$ et $(\lambda_i)_{m+1\le i\le n}$ des fonctions de classe C^1 sur J telles que $\prod\limits_{1\le i\le m}(X-\lambda_i)$ et $\prod\limits_{m+1\le i\le n}(X-\lambda_i)$ soient les polynômes caractéristiques de ces matrices et donc aussi des bi-restrictions, car le polynôme caractéristique est invariant par changement de base. Comme $F_t \oplus G_t = \mathbf{R}^n$ et qu'on a affaire à des sous-espaces $M(t)$-stables, le polynôme caractéristique de $M(t)$ est le produit des deux précédents, i.e. $\prod\limits_{1\le i\le n}(X-\lambda_i)$. On en déduit que $\boxed{\Lambda(J) \text{ est non vide.}}$

2) La question II.3 montre que les couples $(\lambda_i(t),\lambda_i'(t))$ admettent pour limite un couple (λ,λ') avec $\lambda \in \mathrm{Sp}(M(a))$ et λ' dans le spectre la restriction de $p_\lambda M'(a)$ à $\mathrm{Ker}(M-\lambda 1_n)$, où p_λ désigne le projecteur orthogonal sur cet espace propre. Pour t dans $]a;b[$ on choisit une base d'orthodiagonalisation de $M(t)$, notée $(e_i(t))_{1\le i\le n}$, avec pour tout entier i dans $[\![1;n]\!]$, $M(t)e_i(t)=\lambda_i(t)e_i(t)$, ce qui est licite d'après le théorème spectral. Par compacité de la sphère unité et donc aussi du produit cartésien de n copies d'icelle, on dispose d'une suite (t_m) dans $]a;b[$ convergeant vers a et telle que la suite $((e_i(t_m))_{1\le i\le n})_m$ converge. Elle converge alors vers (e_i), une famille orthonormale, par continuité du produit scalaire. C'est donc une famille libre et d'après les calculs de la question II.3, chacun est vecteur propre de $p_{\lambda_i}M'(a)$. Autrement dit

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{en notant } M'(a)_\lambda \text{ la restriction à } \mathrm{Ker}(M(a)-\lambda 1_n) \text{ de la composée de } M'(a) \text{ avec le projecteur}\\ \text{orthogonal sur cet espace, les } n \text{ couples limites sont les } (\lambda,\lambda') \text{ avec } \lambda\in\mathrm{Sp}(M(a)) \text{ et } \lambda'\in\mathrm{Sp}(M'(a)_\lambda),\\ \text{chaque couple apparaissant autant que la multiplicité de } \lambda' \text{ dans le spectre de } M'(a)_\lambda.\end{array}}$$

<u>Application numérique</u>. Soit t un réel. Le polynôme caractéristique de $M(t)$ est donné par

$$X^3-(t+2)X^2+(2t-64)X+24t-160\ .$$

En 0 il est donc égal à $X^3-2X^2-64X-160$. La règle des signes de DESCARTES montre qu'il a deux racines négatives et une positive. On peut également en chercher des racines paires, i.e. poser $X=2Y$ et diviser par 8 pour chercher les racines de $Y^3-Y^2-16Y-20$ dont une racine évidente ou presque est -2. Mais le sujet suggère plutôt qu'on va trouver une racine double (et ce uniquement pour $t=a$) et on étudie donc le polynôme dérivé, i.e. $3X^2-4X-64$ dont les racines sont -4 et $\frac{16}{3}$. On vérifie ensuite que -4 est racine double, i.e.

$$X^3-2X^2-64X-160=(X+4)^2(X-\frac{16}{3})\ .$$

Le noyau de $M(0)+4 1_3$ est l'orthogonal de son image, que l'on sait de rang 1 et égale au noyau de $M(0)-\frac{16}{3}1_3$. Cette image est donc engendrée par l'image du premier vecteur de base, i.e. $(1,2,3)$. On peut donc poser $F_0=\big\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \bigm| x+2y+3z=0\big\}$ et $G_0=\mathbf{R}(1,2,3)$. On remarque alors que $(3,0,-1)$ appartient à $\mathrm{Ker}(M(0)+4 1_3)$ et comme sa seconde composante est nulle, il appartient en fait à $\mathrm{Ker}(M(t)+4 1_3)$ pour tout réel t. Ceci montre au passage que -4 est valeur propre de tous les $M(t)$ et, de facto, on obtient

$$X^3-(t+2)X^2+(2t-64)X+24t-160=(X+4)(X^2-(t+6)X+6t-40)\ .$$

On peut donc poser

$$\lambda_1(t)=-4\,,\quad \lambda_2(t)=\frac{t+6-\sqrt{(t-6)^2+160}}{2}\quad \text{et } \lambda_3(t)=\frac{t+6+\sqrt{(t-6)^2+160}}{2}$$

et alors, par non annulation du radical,

$$\boxed{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } \mathbf{R} \text{ et, pour tout } t \text{ réel, } \chi_{M(t)}=(X-\lambda_1(t))(X-\lambda_2(t))(X-\lambda_3(t)).}$$

On a $M'(0)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. Pour λ_3, on a $\lambda_3(0)=10$ et $\lambda_3'(0)=\frac{2}{7}$. On vérifie pour $e=\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$, on a $\langle M'(0)e\,|\,e\rangle=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$. On a $\lambda_1(0)=\lambda_2(0)=-4$, $\lambda_1'(0)=0$ et $\lambda_2'(0)=\frac{5}{7}$. Une base de F_0 est donnée par $(3,0,-1)$ et $(2,-1,0)$. Le premier est d'image nulle par $M'(0)$. L'image du second a une projection sur G_0 donnée par $-\frac{1}{7}(1,2,3)$ et on a

$$M'(0)\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\frac{3}{7}\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}+\frac{5}{7}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

et donc la restriction à F_0 de la composée de $M'(0)$ avec le projecteur sur F_0 admet $\begin{pmatrix}0&-\frac{3}{7}\\0&\frac{5}{7}\end{pmatrix}$ comme matrice représentative, et donc son spectre est $\left\{0,\frac{5}{7}\right\}$ comme attendu.

$\boxed{\text{Les couples limites sont } (-4,0),\ (-4,\tfrac{5}{7}) \text{ et } (10,\tfrac{2}{7}).}$

3) En appliquant les résultats de la question précédente à M avec $a=b$ et $b=c$ et à $t\mapsto M(-t)$ avec $a=-b$ et $b=-a$, on obtient d'une part que les couples $(\mu_i(t),\mu_i'(t))$ ont des limites en b à droite, d'autre part que les couples $(\lambda_i(t),\lambda_i'(t))$ ont des limites en b à gauche, et enfin que ces n couples sont tous les deux décrits en fonction de $M(b)$ et $M'(b)$, via leurs spectres, avec multiplicités. On en déduit que ces couples sont identiques, à l'ordre près, i.e. on dispose de σ dans $\mathscr{S}_n$ tel que les couples $(\lambda_i(t),\lambda_i'(t))$ ont mêmes limites que les couples $(\mu_{\sigma(i)}(t),\mu_{\sigma(i)}'(t))$. On peut donc définir (λ_i) de classe C^1 sur $]a;c[$ en la prolongeant par sa limite en b et par $\mu_{\sigma(i)}$ sur $]b;c[$. Comme les limites en b décrivent le spectre de $M(b)$ avec multiplicité, on en déduit qu'on a construit $\boxed{\text{un élément de } \Lambda(]a;c[).}$

4) Soit b dans U et I la composante connexe par arcs de U contenant b. Comme U est ouvert, I l'est et est donc un intervalle ouvert. Par hypothèse on dispose de $]a;c[$ avec $a<b<c$ tel que $\Lambda(]a;c[)$ soit non vide. L'ensemble $\{x\in I\,|\,x<b,\Lambda(]x;b[)\neq\emptyset\}$ est donc non vide. Si sa borne inférieure dans $\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ n'est pas celle de I, on la note α et on dispose de J_α un voisinage de α tel que $\Lambda(J_\alpha)$ soit non vide et, par définition de la borne inférieure, de β dans J_α tel que $\Lambda(]\beta;b[)$ ne le soit pas non plus. Il en va donc de même, par restriction, de $\Lambda(]\alpha;b[\setminus J_\alpha)$ et donc aussi, en appliquant la question précédente, de $\Lambda(J_\alpha\cup]\alpha;b[)$. Cette contradiction montre que la borne inférieure considérée est celle de I. En considérant $t\mapsto M(-t)$, on en déduit que la borne supérieure de $\{x\in I\,|\,x>b,\Lambda(]b;x[)\neq\emptyset\}$ est celle de I, et donc en appliquant une nouvelle fois la question précédente, $\Lambda(I)$ est non vide.

Soit alors (I_k) les composantes connexes par arcs de U et pour tout k, Λ_k dans $\Lambda(I_k)$. On définit Λ sur U par $\Lambda_{|I_k}=\Lambda_k$. Alors Λ est un n-uplet de fonctions $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ telles que le polynôme caractéristique de $M(t)$, pour t dans U, est $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i(t))$. De plus si t est dans U, on dispose de k tel que t soit dans I_k est donc Λ coïncide avec Λ_k sur un voisinage de t. En particulier Λ est de classe C^1 au voisinage de t et donc sur U, i.e. $\boxed{\Lambda(U)\text{ est non vide.}}$

5) Si tout voisinage de a dans I contenait un point t, distinct de a, tel que $M(t)$ soit scalaire, alors $M'(a)$ le serait, par limite du taux d'accroissement. On dispose donc de $]b;c[$ inclus dans I tel que $b<a<c$ et $M(t)$ n'est scalaire pour aucun t dans $]b;c[$ distinct de a. Il résulte des questions 1 et 4 que $\Lambda(]b;a[)$ et $\Lambda(]a;c[)$ soient non vides et donc, d'après la question 2, $\Lambda(]b;c[)$ est non vide, i.e. on dispose de $\boxed{J\text{ voisinage de } a \text{ dans } I \text{ tel que } \Lambda(J)\neq\emptyset.}$

6) Puisque $\mathbf{R}1_n$ est une partie fermée de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et puisque M et M' sont continus, les images réciproques de $\mathbf{R}1_n$ par M et M' sont des fermés et donc leur intersection aussi, i.e. $\boxed{F\text{ est fermé.}}$ Donc $I\setminus F$ est

ouvert et d'après les questions 1 et 5, tout point a de $I \setminus F$ admet un voisinage J_a dans I tel que $\Lambda(J_a)$ est non vide. Il résulte de la question 4 que $\boxed{\Lambda(I \setminus F) \text{ est non-vide.}}$

Puisque $I \setminus F$ est ouvert, la continuité sur $I \setminus F$ est équivalente à celle de la restriction à $I \setminus F$, ce qui est le cas. Soit a dans F et (t_m) une suite dans I tendant vers a. Soit (u_m) (resp.(v_m)) la suite extraite de (t_m) en ne considérant que les indices pour lesquels $t_m \notin F$ (resp. $t_m \in F$). D'après la partie II appliquée à M ou $t \mapsto M(-t)$, pour tout i dans $[\![1; n]\!]$, $\lambda_i(u_m)$ admet une limite et cette limite est une valeur propre de $M(a)$, i.e. c'est $\lambda_i(a)$. Par ailleurs on a $\lambda_i(v_m) = \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(M(v_m))$ et donc, par continuité de la trace puisque c'est une application linéaire en dimension finie, $\lambda_i(v_n)$ tend vers $\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(M(a)) = \lambda_i(a)$. Par recollement $\lambda_i(t_n)$ admet $\lambda_i(a)$ comme limite. Par caractérisation séquentielle de la limite, $\boxed{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \text{ est continu sur } I.}$ La partie II appliquée à M et $t \mapsto M(-t)$ montre que Λ est de classe C^1 sur I, i.e. $\boxed{\text{l'énoncé } (E) \text{ est vrai.}}$