# Deuxième composition de mathématiques
# ENS Paris 1991 – MP

## Notations

Dans tout le problème, on se donne un entier $q \geq 2$ fixé une fois pour toutes.
On note $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{C}$) le corps des nombres réels (resp. des nombres complexes), et $\mathbf{C}[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ formé des polynômes à une variable à coefficients dans $\mathbf{C}$.
Pour tout entier $n \geq 1$, on note $P_n$ l'élément de $\mathbf{C}[X]$ défini par :

$$P_n(X) = \prod_{k=1}^{n} \left( X - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right) .$$

On pose $P_0(X) = 1$.
Si $N$ est un entier $\geq 1$, l'ensemble des matrices carrées $N \times N$ à coefficients dans $\mathbf{C}$ est noté $\mathscr{M}_N(\mathbf{C})$. On note $\mathrm{Tr}(A)$ la trace d'un élément $A$ de $\mathscr{M}_N(\mathbf{C})$, et $I_N$ la matrice unité de $\mathscr{M}_N(\mathbf{C})$, c'est-à-dire la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1.
À toute matrice $A$ dans $\mathscr{M}_N(\mathbf{C})$ on associe la forme linéaire $\mu_A : \mathbf{C}[X] \to \mathbf{C}$ telle que, pour tout élément $P$ de $\mathbf{C}[X]$, on ait

$$\mu_A(P) = \frac{1}{N} \sum_{\lambda} P\left(q^{-1/2}\lambda\right) ,$$

$\lambda$ parcourant les valeurs propres de $A$ comptées avec multiplicité, c'est-à-dire, si l'on préfère :

$$\mu_A(P) = \frac{1}{N} \sum_{\lambda} m(\lambda) P\left(q^{-1/2}\lambda\right) ,$$

$\lambda$ parcourant alors les valeurs propres distinctes de $A$, et $m(\lambda)$ désignant l'ordre de multiplicité de $\lambda$.
En particulier, on a $\mu_{I_N}(P) = P\left(q^{-1/2}\right)$.

## PARTIE I

I.1. Vérifier les formules suivantes, pour $n \geq 0$ :

I.1.a. Pour tout $x$ dans $\mathbf{C}^*$ : $P_n\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{n-2k}$.

I.1.b. Pour tout $x$ dans $\mathbf{R}$ : $\sin(x) P_n(2\cos(x)) = \sin((n+1)x)$.

I.1.c. $P_{n+2}(X) = XP_{n+1}(X) - P_n(X)$.

I.2. Montrer que, pour tout $x$ réel avec $|x| \leq 2$, on a : $|P_n(x)| \leq n+1$.

I.3. Calculer

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} P_n(x)\,\mathrm{d}x ,$$

pour $n \geq 0$.

I.4.

I.4.a. Montrer que, pour $0 \leq n \leq m$, on a : $P_n P_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_{m+n-2k}$.

I.4.b. Montrer que, pour $n \geq 1$, et pour $x$ et $y$ dans $\mathbf{C}$, on a :

$$P_n(x) - P_n(y) = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x) P_{n-k-1}(y) .$$

I.4.c. Soit $n \geq 1$ et $Y_n$ le polynôme défini par : $Y_n(X) = \dfrac{P_n^2(X)}{X - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)}$.

Montrer qu'il existe $2n$ nombres réels positifs $(y_k)_{0 \leq k \leq 2n-1}$ tels que $Y_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} y_k P_k$.

## PARTIE II

Si $N$ est un nombre entier supérieur ou égal à $q+1$, on dit qu'une matrice $T$ de $\mathscr{M}_N(\mathbf{C})$ possède la propriété $\mathcal{P}_N$ si :

i. $T$ est symétrique ;

ii. ses coefficients $t_{i,j}$ sont égaux à 0 ou à 1 ;

iii. pour tout $i$ dans $[\![1, N]\!]$, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} t_{i,j} = q+1$.

Dans toute la partie II, $N$ est un entier fixé, supérieur ou égal à $q+1$, et $T = (t_{i,j})$ une matrice vérifiant la propriété $\mathcal{P}_N$.

II.1. Montrer que les valeurs propres de $T$ sont des nombres réels de valeur absolue inférieure ou égale à $q+1$.

II.2. Soit $v$ un vecteur propre de $T$ de valeur propre distincte de $q+1$. Montrer que les composantes $(x_i)$ de $v$ vérifient $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i = 0$.

II.3. Un <u>$T$-chemin de longueur $k$</u> entre deux éléments $x$ et $y$ de $[\![1, N]\!]$ est par définition la donnée de $k+1$ éléments $u_0, \ldots, u_k$ de $[\![1, N]\!]$ tels que $u_0 = x$, $u_k = y$ et $t_{u_i, u_{i+1}} = 1$ pour tout $i$ tel que $0 \leq i \leq k-1$. Un <u>$T$-chemin de longueur $k$ sans aller-retour</u> est un $T$-chemin de longueur $k$ tel que, pour tout $i$ tel que $0 \leq i \leq k-2$, on ait $u_i \neq u_{i+2}$.

Pour tout $k \geq 1$, soit $U_k^T$ la matrice de $\mathscr{M}_N(\mathbf{C})$ dont le coefficient $u_{i,j}$ d'indice $(i,j)$ est égal au nombre de $T$-chemins de longueur $k$ sans aller-retour entre $i$ et $j$. On pose d'autre part $U_0^T = I_N$ et, pour tout $n \geq 0$ :

$$V_n^T = \sum_{k=0}^{[n/2]} U_{n-2k}^T \,,$$

où $[n/2]$ désigne la partie entière de $n/2$.

En particulier, on a $V_0^T = I_N$ et $V_1^T = T$.

II.3.a. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $V_n^T = q^{n/2} P_n(q^{-1/2} T)$.

II.3.b. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $\mathrm{Tr}(V_n^T) = N q^{n/2} \mu_T(P_n)$.

II.3.c. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $\mu_T(P_n) \geq 0$.

## PARTIE III

Dans cette partie, on se donne une suite de matrices $(T_N)_{N \geq q+1}$ possédant la propriété $\mathcal{P}_N$.

III.1. Soit $\varepsilon$ un nombre réel strictement supérieur à 0.

III.1.a. Montrer qu'il existe un polynôme $Y$, combinaison linéaire à coefficients positifs des polynômes $P_n$, tel que, pour tout $x$ réel avec $x \leq 2 - \varepsilon$, on ait $Y(x) < -1$.

(On pourra considérer une combinaison linéaire convenable des polynômes $Y_n$ de la question I.4.)

III.1.b. Pour tout $N \geq q+1$, soit $a_N$ le nombre de valeurs propres de $T_N$, comptées avec leur multiplicité, qui sont supérieures ou égales à $2\sqrt{q} - \varepsilon$. Montrer qu'il existe une constante $C_\varepsilon$ strictement positive, indépendante de $N$, telle que $a_N > C_\varepsilon N$.

(On pourra considérer $\mu_{T_N}(Y)$.)

III.2. On suppose désormais qu'il existe une suite $(c_n)$ de nombres réels positifs tels que, pour tout $N \geq q+1$, et pour tout $n \geq 1$, on ait $\mathrm{Tr}(U_n^{T_N}) \leq c_n$, où $U_n^{T_N}$ est la matrice associée à $T_N$ dans la question II.3.

III.2.a. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $\lim\limits_{N \to +\infty} \mu_{T_N}(P_{2n+1}) = 0$ et $\lim\limits_{N \to +\infty} \mu_{T_N}(P_{2n}) = q^{-n}$.

III.2.b. Montrer que la série de fonctions définies sur le segment $[-2, 2]$ et à valeurs réelles, de terme général $q^{-n}P_{2n}$, $n \geq 0$, converge normalement sur le segment $[-2, 2]$.

III.2.c. Soit $\varphi = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^{-n}P_{2n}$ la somme de cette série, et soit $\mu$ la forme linéaire sur $\mathbf{C}[X]$ telle que, pour tout élément $P$ de $\mathbf{C}[X]$, on ait $\mu(P) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\varphi(x)P(x)\,\mathrm{d}x$.

Montrer que, pour tout élément $P$ de $\mathbf{C}[X]$, on a : $\lim\limits_{N \to +\infty} \mu_{T_N}(P) = \mu(P)$.

III.3.

III.3.a. Soit $a < b$ deux nombres réels, et $J$ l'intervalle $[a, b]$. Soit $g$ une fonction continue de $J$ dans $\mathbf{R}$, et $c$ un élément de $J$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(Q_n)_{n \geq 0}$ de $\mathbf{R}[X]$, tels que :

i. pour tout $x$ dans $J$, et tout $n \geq 0$, $Q_n(x) \geq 0$ ;

ii. $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_a^b g(x)Q_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$ ;

iii. pour tout $n \geq 0$, $Q_n(c) = 1$.

(On pourra utiliser le polynôme $1 - \left(\dfrac{X - c}{b - a}\right)^2$.)

III.3.b. Soit $\alpha$ un réel, avec $|\alpha| \leq q + 1$. Soit $(b_N)_{N \geq q+1}$ la suite d'entiers définie de la façon suivante : si $\alpha$ n'est pas valeur propre de $T_N$, on pose $b_N = 0$. Sinon, $b_N$ est l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\alpha$ de $T_N$.

Montrer $\lim\limits_{N \to +\infty} \dfrac{b_N}{N} = 0$.

(On pourra utiliser la question précédente, avec $a$, $b$ et $g$ convenablement choisis, et considérer $\mu_{T_N}(Q_n)$.)

# Deuxième composition – ENS Ulm 1991 – MP

## PARTIE I

I.1.

I.1.a. Soit $x$ dans $\mathbf{C}^*$. On a

$$\begin{aligned} P_n\left(x+\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x^n}\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)+1\right) \\ &= \frac{1}{x^n}\prod_{k=1}^{n}\left(x-e^{ik\pi/(n+1)}\right)\left(x-e^{-ik\pi/(n+1)}\right) \\ &= \frac{1}{x^n}\prod_{\zeta^{2(n+1)}=1\,,\zeta^2\neq 1}(x-\zeta)\ . \end{aligned}$$

Si on note $Q$ le polynôme défini par $Q(X)=\displaystyle\prod_{\zeta^{2(n+1)}=1\,,\zeta^2\neq 1}(X-\zeta)$, alors $(X^2-1)Q(X)$ est le polynôme unitaire dont les racines sont racines $2(n+1)$-èmes de l'unité, i.e. $X^{2n+2}-1$. Il en résulte que $Q$ est le quotient de $X^{2n+2}-1$ par $X^2-1$, i.e. d'après la formule de Bernoulli, $Q=1+X^2+\cdots+X^{2n}$.

Il vient $\boxed{P_n\left(x+\frac{1}{x}\right)=\sum_{k=0}^{n}x^{n-2k}.}$

I.1.b. Soit $x$ dans $\mathbf{R}$. On applique ce qui précède à $e^{ix}$. Il vient

$$P_n(2\cos(x))=P_n(e^{ix}+e^{-ix})=\sum_{k=0}^{n}e^{i(n-2k)x}$$

et donc, puisqu'on a affaire à une somme télescopique,

$$(e^{ix}-e^{-ix})=e^{i(n+1)x}-e^{-i(n+1)x}\,,$$

soit, en divisant par $2i$, $\boxed{\sin(x)P_n(2\cos(x))=\sin\left((n+1)x\right).}$

I.1.c. Soit $x$ dans $\mathbf{R}$. On a $\sin((n+2)x)+\sin(x)=2\cos(x)\sin((n+1)x)$ et donc

$$\sin(x)P_{n+2}(2\cos(x))+\sin(x)P_n(2\cos(x))=2\sin(x)\cos(x)P_{n+1}(2\cos(x))\ .$$

Il en résulte, pour $x$ dans $\mathbf{R}\setminus\pi\mathbf{Z}$, que le polynôme $P_{n+2}+P_n-XP_{n+1}$ admet $2\cos(x)$ comme racine. En ayant donc une infinité, c'est le polynôme nul et il vient $P_{n+2}(X)=XP_{n+1}(X)-P_n(X)$.

I.2. Soit $x$ réel avec $|x|\leq 2$. On peut donc l'écrire sous la forme $x=2\cos(y)$ avec $y$ dans $\mathbf{R}$. Il vient, par inégalité triangulaire et 1a,

$$\left|P_n(e^{iy}+e^{-iy})\right|\leq\sum_{k=0}^{n}\left|e^{i(n-2k)y}\right|=n+1$$

et donc $\boxed{|P_n(x)|\leq n+1.}$

I.3. L'intégrande étant une fonction continue sur le segment $[-2,2]$, l'intégrale est bien définie et on peut lui appliquer le changement de variable de classe $C^1$ donné par $x=2\cos(t)$ pour $t\in[0,\pi]$. Il vient grâce à 1b

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}P_n(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\sin^2(t)P_n(2\cos(t))\,\mathrm{d}t=2\int_0^{\pi}\sin(t)\sin((n+1)t)\,\mathrm{d}t=\pi\delta_{n,0}$$

où $\delta$ est le symbôle de Kronecker. Autrement dit

$$\boxed{\int_{-2}^{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}P_n(x)\,\mathrm{d}x \text{ est égal à } \pi \text{ si } n=0 \text{ et à } 0 \text{ sinon.}}$$

I.4.

I.4.a. Soit $x$ dans $\mathbf{R}$ et $n$ et $m$ entiers tels que $0 \leq n \leq m$. On a

$$\begin{aligned}\sin^2(x)P_n(2\cos(x))P_m(2\cos(x)) &= \sin((n+1)x)\sin((m+1)x)\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos((n-m)x)-\cos((n+m+2)x)\right)\ .\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\sin^2(x)\sum_{k=0}^{n}P_{m+n-2k}(2\cos(x)) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\cos((m+n-2k)x)-\cos((m+n-2k+2)x)\right)$$

et cette dernière somme étant télescopique, il vient

$$\sin^2(x)P_n(2\cos(x))P_m(2\cos(x)) = \sin^2(x)\sum_{k=0}^{n}P_{m+n-2k}(2\cos(x))\,,$$

i.e. $P_nP_m - \sum_{k=0}^{n}P_{m+n-2k}$ admet $2\cos(x)$ comme racine pour tout $x$ dans $\mathbf{R}\setminus\pi\mathbf{Z}$. Ayant une infinité de racines, ce polynôme est nul, i.e. $\boxed{P_nP_m = \sum_{k=0}^{n}P_{m+n-2k}.}$

I.4.b. Pour $n \geq 0$, soit $(\mathbf{H}_n)$ lé prédicat :

$$\forall (x,y)\in\mathbf{C}^2\,,\quad P_n(x)-P_n(y) = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1}P_k(x)P_{n-k-1}(y)\,,$$

en convenant que la somme vaut 0 si $n=0$.
Comme $P_1 = X$ et $P_0 = 1$, $(\mathbf{H}_0)$ et $(\mathbf{H}_1)$ s'écrivent $1-1=(x-y)\times 0$ et $x-y=(x-y)\times 1$ et sont donc vrais pour tout $x$ et $y$ complexes.
Soit $n \geq 0$ tel que $(\mathbf{H}_n)$ et $(\mathbf{H}_{n+1})$ sont vrais et $x$ et $y$ dans $\mathbf{C}$. On a, en utilisant la relation de récurrence 1c,

$$\begin{aligned}P_{n+2}(x)-P_{n+2}(y) &= xP_{n+1}(x)-yP_{n+1}(y)-P_n(x)+P_n(y)\\ &= (x-y)P_{n+1}(x)+y\left(P_{n+1}(x)-P_{n+1}(y)\right)-P_n(x)+P_n(y)\end{aligned}$$

et donc, en utilisant $(\mathbf{H}_n)$ et $(\mathbf{H}_{n+1})$,

$$P_{n+2}(x)-P_{n+2}(y) = (x-y)\left(P_{n+1}(x)+\sum_{k=0}^{n}P_k(x)yP_{n-k}(y)-\sum_{k=0}^{n}P_k(x)P_{n-1-k}(y)\right)\ .$$

En réutilisant la relation de récurrence 1c, il vient

$$P_{n+2}(x)-P_{n+2}(y) = (x-y)\left(P_{n+1}(x)+yP_n(x)+\sum_{k=0}^{n-1}P_k(x)P_{n+1-k}(y)\right)$$

ce qui, en tenant compte de $P_0 = 1$ et $P_1 = X$, s'écrit

$$P_{n+2}(x) - P_{n+2}(y) = (x-y) \sum_{k=0}^{n+1} P_k(x) P_{n+1-k}(y) \ .$$

Le principe de récurrence permet de conclure, pour $n \geq 0$ et donc a fortiori $n \geq 1$,

$$\boxed{P_n(x) - P_n(y) = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x) P_{n-k-1}(y).}$$

I.4.c. Comme $X - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ divise $P_n$, le polynôme $Y_n$ est bien défini et est de degré $2n-1$. Comme les polynômes $(P_k)$ sont échelonnés en degrés on sait a priori que $Y_n$ s'écrit comme combinaison linéaire de $(P_k)_{0 \leq k \leq 2n-1}$. Plus précisément l'égalité précédente spécialisée en $y = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ permet d'écrire, puisque $P_n(y) = 0$,

$$P_n(X) = \left(X - 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right) \sum_{k=0}^{n-1} P_k(X) P_{n+1-k}\left(2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)$$

et donc, en utilisant 4a,

$$Y_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P_n(X) P_k(X) P_{n+1-k}\left(2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right) = \sum_{k=0}^{2n-1} y_k P_k$$

avec $y_k$ une somme de nombres de la forme $P_{n+1-\ell}\left(2\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)\right)$ avec $0 \leq \ell \leq n+1$. Comme on évalue $P_{n+1-\ell}$ en un réel supérieur à toutes ses racines, le résultat est du signe de son coefficient dominant, i.e. 1, et donc $y_k$ est une somme de termes tous positifs. Il en résulte

$$\boxed{Y_n = \sum_{k=0}^{2n-1} y_k P_k \text{ avec } (y_k)_{0 \leq k \leq 2n-1} \in (\mathbf{R}_+)^{2n}.}$$

## PARTIE II

II.1. Comme $T$ est symétrique réelle, elle est diagonalisable sur $\mathbf{R}$. Soit $\lambda$ une de ses valeurs propres, $v$ un vecteur propre associé et $(x_i)$ les coordonnées de $v$. On a donc, pour tout $i$ dans $[\![1, N]\!]$, $\sum_{j=1}^{N} t_{i,j} x_j = \lambda x_i$, de sorte que, en utilisant l'inégalité triangulaire, $|\lambda|.|x_i| \leq \sup\limits_{1 \leq j \leq N} |x_j| \sum\limits_{j=1}^{N} t_{i,j}$ et donc $|\lambda| \sup\limits_{1 \leq j \leq N} |x_j| \leq (q+1) \sup\limits_{1 \leq j \leq N} |x_j|$. Comme $v$ est non nul, le supremum précédent n'est pas nul et il vient $|\lambda| \leq q+1$, i.e.

$\boxed{\text{les valeurs propres de } T \text{ sont des réels de valeur absolue inférieure ou égale à } q+1.}$

II.2. Puisque $T$ est symétrique réelle, ses vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes sont deux à deux orthogonaux. Comme le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à 1 est vecteur propre pour la valeur propre $q+1$, il en résulte que $v$ lui est orthogonal, i.e. $\boxed{\sum_{i=1}^{N} x_i = 0.}$

II.3.

II.3.a. Soit, pour $n \geq 0$, $(\mathbf{H}_n)$ le prédicat $V_n^T = q^{n/2} P_n(q^{-1/2}T)$.
Puisque $V_0^T = I_N$ et $P_0 = 1 = q^0$, on a $V_0^T = q^0 P_0(q^{-1/2}T)$. Puisque $V_1^T = T$ et $P_1 = X$, on a $V_1^T = q^{1/2} P_1(q^{-1/2}T) = T$. Il en résulte que $(\mathbf{H}_0)$ et $(\mathbf{H}_1)$ sont vrais.
Le nombre de $T$-chemins de longueur 2 joignant $i$ à $j$, pour $i$ et $j$ dans $[\![1, N]\!]$, est égal au coefficient de $T^2$ d'indice $(i, j)$. Un tel chemin est sans aller-retour sauf si $i = j$. Or le coefficient d'indice $(i, i)$ de $T^2$ est égal à $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} t_{i,j} t_{j,i}$ soit, par symétrie de $T$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} t_{i,j}^2$ ou encore, puisque $T$ est à coefficients 0 ou 1, $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} t_{i,j}$, i.e. $q + 1$. On en déduit $U_2^T = T^2 - (q+1)I_N$ et donc $V_2^T = T^2 - qI_N$. Comme $P_2 = XP_1 - P_0 = X^2 - 1$, il vient $qP_2(q^{-1/2}T) = qq^{-1}T^2 - qI_N = V_2^T$ et donc $(\mathbf{H}_2)$ est vrai.
Soit maintenant $n \geq 1$ tel que $(\mathbf{H}_n)$ et $(\mathbf{H}_{n+1})$ sont vrais. Soit $i$ et $j$ dans $[\![1, N]\!]$. On va compter de deux manières différentes le nombre $C$ de $T$-chemins de longueur $n+2$ joignant $i$ à $j$, $(u_0, \ldots, u_{n+2})$, tels que $(u_0, \ldots, u_{n+1})$ soit un $T$-chemin de longueur $n+1$ sans aller-retour.
Un tel $T$-chemin peut se voir comme la donnée d'un $T$-chemin $(i, \ldots, u_{n+1})$ tel que $t_{u_{n+1},j}$ soit non nul. On obtient donc la formule

$$C = \sum_{k \;/\; t_{k,j} \neq 0} \left(V_{n+1}^T\right)_{i,k}$$

en notant $\left(V_{n+1}^T\right)_{a,b}$ l'élément d'indice $(a, b)$ de $V_{n+1}^T$. Comme $T$ est à coefficients 0 ou 1, on a en fait

$$C = \sum_{k=0}^{N} \left(V_{n+1}^T\right)_{i,k} t_{k,j}$$

et donc $C$ est le coefficient d'indice $(i, j)$ de $V_{n+1}^T T$.
Mais un tel $T$-chemin est soit un $T$-chemin sans aller-retour entre $i$ et $j$, soit un $T$-chemin de $i$ à $j$ qui est sans aller-retour sur les $n - 1$ premiers éléments du trajet et qui est un aller-retour sur ses deux derniers éléments. Ces deux possibilités sont exclusives l'une de l'autre. La première fournit un nombre égal au coefficient d'indice $(i, j)$ de $V_{n+2}^T$. Quant au second il est égal au coefficient d'indice $(i, j)$ de $V_n^T$ multiplié par le nombre, diminué de 1, de $T$-chemins de $j$ à $j$, de longueur 2. On diminue de 1 car l'avant-dernier élément $u_{n+1}$ ne doit pas être égal à $u_{n-1}$ (un tel élément existe puisque $n \geq 1$).
Or le nombre de $T$-chemins de longueurs 2 joignant $j$ à $j$ est le $j$-ème terme diagonal de $T^2$, i.e. $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} t_{j,k} t_{k,j}$. Puisque $T$ est symétrique et à coefficients 0 ou 1, cette quantité est en fait égale à $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} t_{j,k}^2$ ou encore $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} t_{j,k}$, soit à $q+1$. Le second terme à calculer est donc égal à $q$ fois le coefficient d'indice $(i, j)$ de $V_n^T$.
En résumant, il vient $V_{n+1}^T T = V_{n+2}^T + qV_n^T$. On en déduit, par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} V_{n+2}^T &= q^{(n+1)/2} P_{n+1}(q^{-1/2}T)T - q^{(n+2)/2} P_n(q^{-1/2}T) \\ &= q^{(n+2)/2} \Big( (P_{n+1}X)(q^{-1/2}T) - P_n(q^{-1/2}T) \Big) \\ &= q^{(n+2)/2} P_{n+2}(q^{-1/2}T) \end{aligned}$$

d'après I.1c. Le principe de récurrence permet de conclure $\boxed{V_n^T = q^{n/2} P_n(q^{-1/2}T).}$

II.3.b. En prenant la trace des matrices intervenant dans la formule précédente et en utilisant la définition de $\mu_T$, il vient directement $\boxed{\mathrm{Tr}(V_N^T) = Nq^{n/2}\mu_T(P_n).}$

II.3.c. Soit $n \geq 0$. Par définition $U_n^T$ est à coefficients positifs et donc $V_n^T$ aussi. Sa trace est donc positive. Comme $N$ et $q^{n/2}$ aussi, l'assertion précédente donne directement $\boxed{\mu_T(P_n) \geq 0.}$

## PARTIE III

III.1.

III.1.a. Soit $n \geq 0$. Par définition de $Y_n$, c'est un polynôme du signe de $X - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ et est donc à valeurs négatives sur $]-\infty, 2\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)]$. De plus il ne s'annule qu'en les réels de la forme $2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$, pour $k$ dans $[\![1, n]\!]$. Soit $k$ et $\ell$ deux entiers tels que $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq \ell \leq n+1$. Par bijectivité de la fonction cosinus de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, il vient

$$\begin{aligned} 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = 2\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+2}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{k\pi}{n+1} = \frac{\ell\pi}{n+2} \\ &\Leftrightarrow \quad k(n+2) = \ell(n+1) \end{aligned}$$

et donc, puisque $n+1$ et $m+1$ sont premiers entre eux, il vient $n+1|k$ et $n+2|\ell$, ce qui est impossible. Par conséquent, sous cette hypothèse, $Y_n$ et $Y_{n+1}$ sont sans racines communes. En posant $\tilde{Y}_n = Y_n + Y_{n+1}$, on en déduit que $\tilde{Y}_n$ est à valeurs strictement négatives sur $]-\infty, 2\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)]$, puisque $2\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right) < 2\cos\left(\dfrac{\pi}{n+2}\right)$.

Par continuité de cosinus en 0, on dispose de $n$ tel que $2\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right) > 2 - \varepsilon$, puisque $\cos(0) = 1$. Il en résulte que $\tilde{Y}_n$ est strictement négatif sur $]-\infty, 2-\varepsilon]$.
Puisqu'on a affaire à des polynômes unitaires de degré supérieur à 1, $\tilde{Y}_n$ tend vers $-\infty$ en $-\infty$. Il en résulte qu'on dispose de $\alpha$ dans $\mathbf{R}_-$ tel que, pour $x < \alpha$, $\tilde{Y}_n(x) < \tilde{Y}_n(0)$ et donc $\sup\limits_{x \leq 2-\varepsilon} \tilde{Y}_n = \sup\limits_{[\alpha, 2-\varepsilon]} \tilde{Y}_n$.
D'après le théorème de Weierstrass, par compacité de $[\alpha, 2-\varepsilon]$ et continuité de $\tilde{Y}_n$, il en résulte que $\tilde{Y}_n$ atteint son maximum sur $]-\infty, 2-\varepsilon]$. On le note $\beta$ et on a donc $\beta < 0$ puisque $\tilde{Y}_n < 0$ sur $]-\infty, 2-\varepsilon]$ et que le maximum est atteint. Alors le polynôme $Y$ donné par $Y = \dfrac{2}{|\beta|}\tilde{Y}_n$ est à valeurs inférieures à $-2$ sur $]-\infty, 2-\varepsilon]$ et est combinaison linéaire à coefficients positifs des $(Y_k)$, donc aussi des $(P_k)$ d'après I.4.c, i.e.

$\boxed{\text{$Y$ est combinaison linéaire à coefficients positifs des polynômes $P_n$, et, pour tout $x$ réel avec $x \leq 2-\varepsilon$, on a $Y(x) < -1$.}}$

III.1.b. Soit $Y$ donné par la question précédente pour $\varepsilon/\sqrt{q}$, i.e. $Y$ est une combinaison linéaire à coefficients positifs des polynômes $P_n$, et, pour tout $x$ réel avec $x \leq 2\sqrt{q} - \varepsilon$, on a $Y(q^{-1/2}x) < -1$.
D'après II.3.c., $\mu_{T_N}$ est à valeurs positives sur les polynômes $P_n$. Par linéarité et par positivité des coefficients exprimant $Y$ en fonction des $P_n$, on en déduit $\mu_{T_N}(Y) \geq 0$. En coupant la somme donnant $\mu_{T_N}$ selon les éléments du spectre de $T_N$ strictement inférieurs à $2\sqrt{q} - \varepsilon$ ou supérieurs à $2\sqrt{q} - \varepsilon$, il vient

$$0 \leq \sum_{\lambda < 2\sqrt{q} - \varepsilon} m(\lambda) Y(q^{-1/2}\lambda) + \sum_{\lambda \geq 2\sqrt{q} - \varepsilon} m(\lambda) Y(q^{-1/2}\lambda)$$

et donc
$$\sum_{\lambda \geq 2\sqrt{q}-\varepsilon} m(\lambda) Y(q^{-1/2}\lambda) \geq - \sum_{\lambda < 2\sqrt{q}-\varepsilon} m(\lambda) Y(q^{-1/2}\lambda) \geq \sum_{\lambda < 2\sqrt{q}-\varepsilon} m(\lambda)$$
puisque $-Y(q^{-1/2}\lambda) > 1$ si $\lambda < 2\sqrt{q} - \varepsilon$. Comme $T_N$ admet $N$ valeurs propres comptées avec multiplicité, puisqu'il s'agit d'une matrice diagonalisable, il vient
$$\sum_{\lambda \geq 2\sqrt{q}-\varepsilon} m(\lambda) Y(q^{-1/2}\lambda) \geq N - \sum_{\lambda \geq 2\sqrt{q}-\varepsilon} m(\lambda)$$
ou encore
$$\sum_{\lambda \geq 2\sqrt{q}-\varepsilon} m(\lambda) \Big( Y(q^{-1/2}\lambda) + 1 \Big) \geq N \ .$$
Pour finir on remarque qu'on a $P_n(2) = n+1 > 0$, pour $n \geq 0$, et donc $Y(2) > 0$. Par suite $\sup\limits_{[2-q^{-1/2}\varepsilon, q^{1/2}+q^{-1/2}]} (Y+1) > 0$. Comme $Y+1$ est continu et qu'on a affaire au supremum sur un segment, d'après le théorème de Weierstrass il s'agit en fait d'un maximum. On dispose donc de $C_\varepsilon$ strictement positif tel que $0 < \sup\limits_{[2-q^{-1/2}\varepsilon, q^{1/2}+q^{-1/2}]} (Y+1) < \dfrac{1}{C_\varepsilon}$. Comme, d'après II.1., les valeurs propres de $T_N$ sont inférieures à $q+1$, il vient
$$N \leq \frac{1}{C_\varepsilon} \sum_{\lambda \geq 2\sqrt{q}-\varepsilon} m(\lambda) = \frac{a_N}{C_\varepsilon} \ ,$$
et l'inégalité est stricte puisqu'elle implique $a_N > 0$ et on peut donc multiplier entre elles les inégalités strictes, d'où $\boxed{a_N > C_\varepsilon N.}$

III.2.

III.2.a. D'après l'hypothèse, pour $n \geq 1$, $\mathrm{Tr}(U_n^{T_N}) = O_N(1)$ et donc, si $n$ est impair, $\mathrm{Tr}(V_n^{T_N}) = O_N(1)$ en tant que somme finie de suites bornées. Si $n$ est pair, on a $\mathrm{Tr}(V_n^{T_N}) = \mathrm{Tr}(I_N) + O_N(1) \sim N$, puisque $\mathrm{Tr}(I_N) = N$. Il résulte donc de II.3.b. qu'on a $\mu_{T_N}(P_n) = o_N(1)$ si $N$ est impair, et $\mu_{T_N}(P_n) \sim q^{-n/2}$ sinon, i.e. pour tout $n \geq 0$, on a
$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \mu_{T_N}(P_{2n+1}) = 0 \text{ et } \lim_{N\to+\infty} \mu_{T_N}(P_{2n}) = q^{-n}.}$$

III.2.b. Soit $n \geq 0$. D'après I.2. et le fait qu'on a $P_n(2) = n+1$, on a $\sup\limits_{[-2,2]} |P_n| = n+1$ et donc $\sup\limits_{[-2,2]} |q^{-n} P_{2n}| = q^{-n}(2n+1) = o(q^{-n/2})$ par comparaison entre polynômes et exponentielle et puisque $q > 1$. Il en résulte, par comparaison avec une série géométrique de raison strictement inférieure à 1, que
$$\boxed{\sum_n q^{-n} P_{2n} \text{ converge normalement sur } [-2,2].}$$

III.2.c. Puisque $(P_n)$ est une famille étagée de polynômes, elle forme une base de $\mathbf{C}[X]$. Il suffit donc de démontrer la formule demandée pour cette famille, par linéarité de $\mu$. Soit donc $n \geq 0$.

Comme $x \mapsto \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} P_n(x)$ est continue sur $[-2,2]$, elle y est bornée et donc la série de fonctions donnée par $\sum_k q^{-k} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} P_{2k}(x) P_n(x)$ est normalement convergente sur $[-2,2]$. On peut donc intervertir l'intégrale et la somme de la série. Il vient
$$\mu(P_n) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} q^{-k} \int_{-2}^{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} P_{2k}(x) P_n(x) \, \mathrm{d}x \ .$$

Or d'après I.4.a., l'intégrale est une somme d'intégrales de la forme calculée en I.3. Plus précisément il vient, pour $k$ et $\ell$ entiers avec $0 \leq k \leq \ell$,

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} P_k(x)P_\ell(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{k} \int_{-2}^{2} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} P_{k+\ell-2j}(x)\,\mathrm{d}x$$

et cette somme est nulle sauf s'il existe $j$ avec $0 \leq j \leq k \leq \ell$ tel que $2j = k+\ell$, autrement dit si $k = l = j$. Dans ce cas l'intégrale vaut $\pi$ et donc

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} P_k(x)P_\ell(x)\,\mathrm{d}x = \pi\delta_{k,\ell}$$

où $\delta$ est le symbole de Kronecker. Par conséquent si $n$ est impair $\mu(P_n) = 0$. Sinon $\mu(P_n) = q^{-n/2}$. Il résulte de III.2.a. qu'on a donc $\lim\limits_{N\to+\infty} \mu_{T_N}(P_n) = \mu(P_n)$. Par linéarité il vient, pour tout élément $P$ de $\mathbf{C}[X]$, $\boxed{\lim\limits_{N\to+\infty} \mu_{T_N}(P) = \mu(P).}$

III.3.

III.3.a. Pour $n \geq 0$, on considère le polynôme donné par $Q_n = \left(1 - \left(\frac{X-c}{b-a}\right)^2\right)^n$. Par construction $Q_n(c) = 1$. Soit $x$ dans $[a,b]$, comme $|x-c|$ représente la distance entre deux points de $[a,b]$, on a $|x-c| \leq |b-a|$ et donc $\left(\frac{X-c}{b-a}\right)^2 \leq 1$, d'où $0 \leq Q_n(x) \leq 1$. Enfin comme $[a,b]$ est un segment, la fonction constante égale à $\sup_J |g|$ y est intégrable et domine la suite de fonctions, sur $J$, donnée par $(gQ_n)$. Il résulte du théorème de convergence dominée qu'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b g(x)Q_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\left(\lim_{n\to+\infty} Q_n(x)\right)\mathrm{d}x\,.$$

Or, pour $x$ dans $J$ avec $x \neq c$, on a $0 \leq \left(\frac{X-c}{b-a}\right)^2 < 1$, de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n(x) = 0$. Il en résulte que la suite $(gQ_n)$ convergence simplement vers la fonction nulle sur $J \setminus \{c\}$ et valant $g(c)$ en $c$. Comme cette fonction est d'intégrale nulle sur $J$, il vient

i. pour tout $x$ dans $J$, et tout $n \geq 0$, $Q_n(x) \geq 0$ ;

ii. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b g(x)Q_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$ ;

iii. pour tout $n \geq 0$, $Q_n(c) = 1$.

III.3.b. On pose $a = -b = q^{1/2} + q^{-1/2}$, $J = [a,b]$ et $c = q^{-1/2}\alpha$. Comme $|\alpha| \leq q+1$, on a $c \in J$. Soit $g$ la fonction définie sur $J$ par $g(x) = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\varphi(x)$ si $|x| \leq 2$ et par $g(x) = 0$ sinon. Comme la formule donne $g(2) = g(-2) = 0$ et que les restrictions de $g$ à $[-2,2]$ et $J \setminus [-2,2]$ sont continues, $g$ est continue. On dispose donc d'une suite $(Q_n)$ de polynômes donnée par la question précédente. On a en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(Q_n) = 0$.

Soit $n \geq 0$ et $N \geq q+1$. Puisque $Q_n$ est à valeurs positives sur $J$ et que le spectre de $T_N$ est inclus dans $q^{1/2}J$, il vient $\mu_{T_N}(Q_n) \geq \frac{1}{N} b_N Q_n(q^{-1/2}\alpha) = \frac{b_N}{N} \geq 0$. Le terme de gauche est le terme général d'une suite convergente en $N$, donc bornée. Il en résulte que $(b_N/N)_{N\geq q+1}$ est bornée, disons par $M$.

De plus, par le théorème d'encadrement des limites, toutes ses valeurs d'adhérences sont dans l'intervalle $[0, \mu(Q_n)]$. Comme ceci est vrai pour tout $n \geq 0$, c'est donc que sa seule valeur d'adhérence est 0. La suite $(b_N/N)_{N \geq q+1}$ est donc une suite bornée ayant 0 comme seule valeur d'adhérence. Si elle ne convergeait pas vers 0, on pourrait en extraire une sous-suite à valeurs dans $[-M, M]$ privé d'un intervalle ouvert centré en 0 et elle admettrait alors une valeur d'adhérence dans ce compact, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. Il en résulte $\boxed{\lim_{N \to +\infty} \frac{b_N}{N} = 0.}$