ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES COMMUNE À LYON ET CACHAN
ENS 1995 – MP

Introduction

De manière informelle, une fonction élémentaire est une fonction définie sur un ouvert de $\mathbf{R}$ ou de $\mathbf{C}$ et qui « s'exprime par composition » à l'aide de la fonction exponentielle, de la fonction logarithme, des opérations rationnelles (somme, produit, quotient) et d'opérations algébriques (telles que les racines n-ièmes). Par exemple, les fonctions (avec $\log(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$) :

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \frac{z^{1995} \sqrt[3]{\sin\left(\frac{z^2}{1+z}\right)}}{e^{\sqrt{\log(z)}}}, \qquad \arctan(z) = \frac{\log(1+iz) - \log(1-iz)}{2i}$$

sont élémentaires. Il est plausible, d'après cette vague définition, que la dérivée d'une fonction élémentaire est encore élémentaire et il est bien connu qu'une fraction rationnelle à coefficients réels ou complexes admet comme primitive une fonction élémentaire. Par contre, il existe des fonctions élémentaires très simples n'ayant pas de primitive qui soit élémentaire : c'est le cas par exemple de la fonction $z \mapsto e^{z^2}$; il est donc impossible de calculer « la » primitive d'une telle fonction, du moins avec les règles du jeu habituelles.

Le but de l'épreuve consiste d'une part à formaliser le concept de fonction élémentaire et d'autre part à démontrer un critère dû en partie à LIOUVILLE (1835), amélioré par OSTROWSKI (1946) permettant de tester si certaines fonctions admettent comme primitive une fonction élémentaire. Le cadre de cette étude est purement algébrique, la notion de primitive étant considérée comme inverse de la dérivée : on dispose d'un corps de base $\mathbf{K}$ (penser au corps des fractions rationnelles sur $\mathbf{C}$), d'un surcorps E de $\mathbf{K}$ et d'un opérateur de dérivation $D : E \to E$ satisfaisant aux propriétés habituelles (c.f. la suite). Il est alors possible de définir de manière rigoureuse ce que veut dire « f dans E est élémentaire sur $\mathbf{K}$ » et de donner dans certains cas un critère permettant d'affirmer que f dans E admet une primitive g dans E, i.e. $D(g) = f$, élémentaire sur $\mathbf{K}$.

Préliminaires

Tous les corps considérés dans le problème sont commutatifs et contiennent $\mathbf{Q}$; en particulier, si x est élément d'un tel corps et $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, alors $nx = 0$ implique $x = 0$. On rappelle que si $\mathbf{K}$ est un corps (commutatif), l'anneau des polynômes $\mathbf{K}[X]$ est intègre et tous ses idéaux sont principaux. On y dispose alors d'une **décomposition en facteurs irréductibles (essentiellement) unique** et du **lemme de GAUSS** : si P, Q et R sont dans $\mathbf{K}[X]$ avec P et Q premiers entre eux et si P divise QR, alors P divise R. On remarque enfin que ces considérations sont valables si $\mathbf{K} = \mathbf{C}(T)$ ou plus généralement $\mathbf{K} = k(T)$, i.e. **$\mathbf{K}$ est le corps des fractions rationnelles sur un corps k.**

Soit E un surcorps d'un corps $\mathbf{K}$, c'est-à-dire un corps contenant $\mathbf{K}$; un élément x de E est **algébrique** sur $\mathbf{K}$ s'il existe P dans $\mathbf{K}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(x) = 0$; il est dit **transcendant** sur $\mathbf{K}$ dans le cas contraire. Pour x dans E, on désigne par $\mathbf{K}(x)$ le plus petit sous-corps de E contenant $\mathbf{K}$ et x.

1. Si x dans E est algébrique sur $\mathbf{K}$, démontrer l'existence et l'unicité d'un polynôme unitaire P_x dans $\mathbf{K}[X]$ tel que, pour Q dans $\mathbf{K}[X]$, on ait l'équivalence $Q(x) = 0 \Longleftrightarrow P_x \mid Q$; démontrer alors qu'on a $\mathbf{K}(x) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbf{K}x^i$ où $n = \deg(P_x)$; en particulier $\dim_{\mathbf{K}} \mathbf{K}(x) = n$.

   Réciproquement, si $\mathbf{K}(x)$ est de dimension finie sur $\mathbf{K}$, démontrer que x est algébrique sur $\mathbf{K}$ (considérer les puissances de x dans le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{K}(x)$).

Le polynôme P_x est appelé le **polynôme minimal** de x sur $\mathbf{K}$.

2. Si x dans E est transcendant sur $\mathbf{K}$, démontrer que l'application $\mathbf{K}(X) \to E$, $R \mapsto R(x)$ induit un isomorphisme du corps des fractions rationnelles $\mathbf{K}(X)$ sur le corps $\mathbf{K}(x)$.

I - Les dérivations et leurs propriétés élémentaires

Une **dérivation** sur un corps $\mathbf{K}$ est une application $D : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ satisfaisant à :

$$\forall (u, v) \in \mathbf{K}^2 \qquad D(u + v) = D(u) + D(v)\,, \quad D(uv) = D(u)v + D(v)u\,.$$

Un **corps différentiel** $\mathbf{K}$ est un corps muni d'une dérivation D ; on note $\mathbf{K}_{cst} = \{u \in \mathbf{K} \mid D(u) = 0\}$ que l'on appelle le **sous-corps des constantes**.

1. Que vaut $D(1)$? Pour $(u, v) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K}^*$, exprimer $D(u/v)$ en fonction de u, v, $D(u)$, $D(v)$. Question analogue pour $D(u^n)$ avec $(u, n) \in \mathbf{K} \times \mathbf{N}$ ou $(u, n) \in \mathbf{K}^* \times \mathbf{Z}$.

   Vérifier que $\mathbf{K}_{cst}$ est bien un sous-corps de $\mathbf{K}$. Quelle propriété possède la « dérivée logarithmique » $\mathbf{K}^* \to \mathbf{K}$ qui à u associe $D(u)/u$? À quelle condition a-t-on $D(u)/u = D(v)/v$?

2. Si $P = \sum_i a_i X^i \in \mathbf{K}[X]$, on note P^D le polynôme $\sum_i D(a_i)X^i$ et P' le polynôme dérivé de P au sens habituel i.e. $P' = \sum_i i a_i X^{i-1}$. Pour $u \in \mathbf{K}$, vérifier $D(P(u)) = P'(u)D(u) + P^D(u)$.

On dit qu'un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$ est **sans facteur carré** s'il est produit de polynômes irréductibles distincts c'est-à-dire si les exposants intervenant dans sa décomposition en facteurs irréductibles sont tous égaux à 1.

3. Soit D une dérivation sur le corps des fractions rationnelles $\mathbf{K}(X)$ vérifiant $D(\mathbf{K}[X]) \subset \mathbf{K}[X]$. On considère une famille finie $(Q_j)_{j\in J}$ de polynômes non nuls de $\mathbf{K}[X]$ sans facteur carré et premiers entre eux deux à deux et une égalité :

$$\sum_{j\in J} \frac{P_j}{Q_j} = D\left(\frac{P}{Q}\right)\,,$$

   avec les P_j et P dans $\mathbf{K}[X]$, $Q \in \mathbf{K}[X] \setminus \{0\}$ et $\mathrm{pgcd}(P, Q) = 1$. Démontrer que Q divise $D(Q)$ puis que, si j dans J est tel que $\mathrm{pgcd}(Q_j, Q) = 1$, alors $Q_j \mid P_j$.

II - Dérivation sur $\mathbf{K}(X)$ de type logarithmique

Un **surcorps différentiel** E d'un corps $\mathbf{K}$ est un surcorps de $\mathbf{K}$ muni d'une dérivation D vérifiant $D(\mathbf{K}) \subset \mathbf{K}$ et ayant même sous-corps des constantes que $\mathbf{K}$ (i.e. si v dans E vérifie $D(v) = 0$ alors $v \in \mathbf{K}$).
On considère dans cette partie une dérivation D sur le corps des fractions rationnelles $\mathbf{K}(X)$ telle que $\mathbf{K}(X)$ est un surcorps différentiel de $\mathbf{K}$ et $D(X) \in \mathbf{K}$.

1. Soit $P = \sum_i a_i X^i \in \mathbf{K}[X]$; à l'aide de l'expression de $D(P)$ en fonction de $D(X)$, P^D et P' (c.f. question I.2), démontrer $D(P) \in \mathbf{K}[X]$ et comparer le degré de $D(P)$ avec celui de P. À quelle condition a-t-on $\deg D(P) < \deg P$?
2. Quels sont les polynômes unitaires Q dans $\mathbf{K}[X]$ tels que Q divise $D(Q)$? les polynômes P dans $\mathbf{K}[X]$ tels que $D(P) \in \mathbf{K}$?
3. Soit R une fraction rationnelle de $\mathbf{K}(X)$ telle que $D(R) \in \mathbf{K}$; démontrer $R = cX + g$ avec $c \in \mathbf{K}_{cst}$ et $g \in \mathbf{K}$.

Dans un corps différentiel $\mathbf{K}$, on appelle **somme de Liouville** dans $\mathbf{K}$ tout élément de $\mathbf{K}$ de la forme :

$$D(g) + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{D(f_i)}{f_i}$$

avec $g \in \mathbf{K}$, $c_i \in \mathbf{K}_{cst}$, $f_i \in \mathbf{K}^*$.

4. Soit f dans $\mathbf{K}$; on suppose que f est une somme de Liouville dans $\mathbf{K}(X)$. Démontrer qu'il existe c dans $\mathbf{K}_{cst}$ tel que $f - cD(X)$ soit une somme de Liouville dans $\mathbf{K}$. Pour cela, on montrera, en partant de la définition d'une somme de Liouville dans $\mathbf{K}(X)$, que l'on peut écrire f sous la forme :

$$f = D(R) + \sum_{i \in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i} + \sum_{j \in J} d_j \frac{D(Q_j)}{Q_j},$$

avec $R \in \mathbf{K}(X)$, $f_i \in \mathbf{K}^*$, $Q_j \in \mathbf{K}[X] \setminus \{0\}$, c_i et d_j dans $\mathbf{K}_{cst}$, les Q_j étant des polynômes distincts de $\mathbf{K}[X]$, de degrés non nuls, irréductibles et unitaires puis on utilisera la question I.3.

Dans un corps différentiel $\mathbf{K}$, on dit que v dans $\mathbf{K}$ est un **logarithme** de u dans $\mathbf{K}^*$ si $D(v) = D(u)/u$ (penser à la formule $(\log u)' = u'/u$).
Un surcorps différentiel E de $\mathbf{K}$ est dit **logarithmique** s'il est de la forme $E = \mathbf{K}(v)$ où v dans E est un logarithme d'une fonction u dans $\mathbf{K}^*$.

5. Soit $E = \mathbf{K}(v)$ un surcorps différentiel logarithmique, v étant supposé transcendant sur $\mathbf{K}$. Démontrer le théorème de descente de Liouville : si f dans $\mathbf{K}$ est une somme de Liouville dans E, alors f est une somme de Liouville dans $\mathbf{K}$. Pour cela, on transportera la dérivation de E en une dérivation de $\mathbf{K}(X)$ à l'aide de l'isomorphisme de corps $\mathbf{K}(X) \simeq E$ et on appliquera la question précédente.

III - Dérivation sur $\mathbf{K}(X)$ de type exponentiel

On considère dans cette partie une dérivation D sur le corps des fractions rationnelles $\mathbf{K}(X)$ telle que $\mathbf{K}(X)$ est un surcorps différentiel de $\mathbf{K}$ et $\dfrac{D(X)}{X} \in \mathbf{K}$. La première assertion signifie donc qu'on a $D(\mathbf{K}) \subset \mathbf{K}$ et $\mathbf{K}(X)_{cst} = \mathbf{K}_{cst}$ (en particulier $D(X) \neq 0$).

1. Soit P dans $\mathbf{K}[X]$; démontrer $D(P) \in \mathbf{K}[X]$ et comparer le degré de $D(P)$ avec celui de P.
2. Soit P dans $\mathbf{K}[X]$; démontrer que P divise $D(P)$ si et seulement si P est de la forme aX^n, avec $a \in \mathbf{K}$.
3. Soit R dans $\mathbf{K}(X)$ une fraction rationnelle ; démontrer que si $D(R)$ est dans $\mathbf{K}[X]$, alors soit $R \in \mathbf{K}_{cst}$, soit R est un polynôme, de même degré que $D(R)$ (en particulier, si $D(R) \in \mathbf{K}$ alors $R \in \mathbf{K}$).

4. Soit f dans $\mathbf{K}$; on suppose que f est une somme de LIOUVILLE dans $\mathbf{K}(X)$. Démontrer qu'il existe c dans $\mathbf{K}_{cst}$ tel que $f - cD(X)/X$ soit une somme de LIOUVILLE dans $\mathbf{K}$. Pour cela, on raisonnera comme dans la question II.4.

Dans un corps différentiel $\mathbf{K}$, on dit que v dans $\mathbf{K}^*$ est une **exponentielle** de u dans $\mathbf{K}$ si $D(v)/v = D(u)$ (penser à la formule $(e^u)' = u'e^u$).
Un surcorps différentiel E de $\mathbf{K}$ est dit **exponentiel** s'il est de la forme $E = \mathbf{K}(v)$ où v dans E est une exponentielle d'un élément u de $\mathbf{K}$.

5. Soit $E = \mathbf{K}(v)$ un surcorps différentiel exponentiel, v étant supposé transcendant sur $\mathbf{K}$. Énoncer et démontrer un théorème de descente de LIOUVILLE analogue à celui de la question II.5.

IV - Norme, trace et descente dans un surcorps de dimension finie

Dans cette partie, $\mathbf{K}$ désigne un corps (rappel : $\mathbf{K}$ est commutatif et contient $\mathbf{Q}$, en particulier il est infini) et E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, avec $n > 1$. Si u est un endomorphisme de E, on note $\chi_u(T)$ dans $\mathbf{K}[T]$ le polynôme caractéristique de u, $\Omega_u(T)$ dans $\mathbf{K}[T]$ le polynôme tel que $T\Omega_u(T) = \chi_u(T) - \chi_u(0)$ et $u^\sharp$ l'endomorphisme $(-1)^{n-1}\Omega_u(u)$.

1. Soit A la matrice de u dans une base de E ; démontrer que la matrice $A^\sharp$ de $u^\sharp$ dans cette base est la transposée de la matrice des cofacteurs de A (considérer d'abord le cas où u est inversible ; considérer ensuite l'endomorphisme $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ pour $\lambda \in \mathbf{K}$).
2. On suppose dans la suite de cette partie que E est un surcorps de $\mathbf{K}$; on définit deux applications $\mathrm{Tr} : E \to \mathbf{K}$ (la trace) et $N : E \to \mathbf{K}$ (la norme) par : $\mathrm{Tr}(x) = \mathrm{Tr}(m_x)$, $N(x) = \det(m_x)$ où $m_x : y \mapsto xy$ est la multiplication par x dans E.
   Vérifier que la trace est $\mathbf{K}$-linéaire ; que vaut $\mathrm{Tr}(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathbf{K}$? Vérifier $N(xy) = N(x)N(y)$ pour x et y dans E ; que vaut $N(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathbf{K}$?
   Soit $x \in E$; démontrer qu'il existe un unique $x^\sharp$ dans E tel que $(m_x)^\sharp = m_{x^\sharp}$. Vérifier $x^\sharp x = x x^\sharp = N(x)$.
3. Soit D une dérivation sur $\mathbf{K}$; pour $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on note $D(A)$ la matrice $(D(a_{i,j}))$. Démontrer $D(\det(A)) = \mathrm{Tr}(A^\sharp D(A))$.
4. Soit D une dérivation sur E vérifiant $D(\mathbf{K}) \subset \mathbf{K}$. Démontrer $\mathrm{Tr}(D(x)) = D(\mathrm{Tr}(x))$ pour $x \in E$.
   Pour cela, on fixe une base $\mathcal{B}$ de E sur $\mathbf{K}$, avec $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, et on note $\Delta : E \to E$ l'unique application $\mathbf{K}$-linéaire définie par $\Delta(e_i) = D(e_i)$ (attention, D n'est pas $\mathbf{K}$-linéaire) ; soit $(a_{i,j})$ la matrice de m_x dans $\mathcal{B}$ et $m_x^D : E \to E$ l'application $\mathbf{K}$-linéaire de matrice $(D(a_{i,j}))$ relativement à la base $\mathcal{B}$. Vérifier :
   $$m_x \circ \Delta + m_{D(x)} = \Delta \circ m_x + m_x^D \qquad (*)$$
   puis conclure.
5. Démontrer $\mathrm{Tr}(x^\sharp D(x)) = D(N(x))$ (on pourra éventuellement utiliser la base $\mathcal{B}$ et la relation $(*)$ de la question précédente). En déduire que pour x non nul dans E :
   $$\frac{D(N(x))}{N(x)} = \mathrm{Tr}\left(\frac{D(x)}{x}\right) .$$
6. Énoncer un théorème de descente pour un surcorps différentiel de $\mathbf{K}$ de dimension finie.

V - Le théorème de Liouville-Ostrowski

1. Soit E un surcorps différentiel de $\mathbf{K}$; si x dans E est algébrique sur $\mathbf{K}$, démontrer $D(\mathbf{K}(x)) \subset \mathbf{K}(x)$.

Un surcorps différentiel E de $\mathbf{K}$ est dit **élémentaire** sur $\mathbf{K}$ s'il existe une suite $(\mathbf{K}_i)_{0\leq i\leq m}$ de sous-corps de E telle que :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 \subset \mathbf{K}_1 \subset \mathbf{K}_2 \subset \cdots \subset \mathbf{K}_{m-1} \subset \mathbf{K}_m = E$$

où $\mathbf{K}_{i+1}$ est ou bien de dimension finie sur $\mathbf{K}_i$ ou bien de la forme $\mathbf{K}_i(v_{i+1})$ avec v_{i+1} dans $\mathbf{K}_{i+1}$ soit un logarithme, soit une exponentielle d'un élément de $\mathbf{K}_i$. On rappelle que E et $\mathbf{K}$ ont même sous-corps de constantes.

2. Soit f appartenant à un corps différentiel $\mathbf{K}$; on suppose que f admet une primitive dans un surcorps différentiel E élémentaire sur $\mathbf{K}$, i.e. $\exists g \in E\ D(g) = f$. Démontrer que f est une somme de Liouville dans $\mathbf{K}$. C'est le théorème de Liouville-Ostrowski : il ramène une propriété ayant lieu dans E à une propriété ayant lieu dans $\mathbf{K}$.

VI - $\displaystyle\int e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ n'est pas une fonction élémentaire

Soit $\mathbf{K}$ un corps différentiel et u dans $\mathbf{K}$; afin d'alléger les notations, on note (de manière abusive) e^u tout élément appartenant à un surcorps différentiel de $\mathbf{K}$ qui est une exponentielle de u. Idem pour les logarithmes avec la notation $\log(u)$.

1. On reprend les hypothèses figurant au début de la partie III. Soit f dans $\mathbf{K}$; démontrer que Xf est une somme de Liouville dans $\mathbf{K}(X)$ si et seulement s'il existe g dans $\mathbf{K}$ tel que $f = D(g) + gD(X)/X$. Si de plus $\mathbf{K}$ est égal à un corps de fractions rationnelles $k(T)$ (à coefficients dans un corps k) muni de la dérivation habituelle, démontrer que si f et $D(X)/X$ appartiennent à $k[T]$, alors g aussi (i.e. si f et $D(X)/X$ sont des polynômes en T, alors g est un polynôme en T).
2. Soit E un surcorps différentiel de $\mathbf{K}$; on considère un élément v de E tel que $D(v) \in \mathbf{K}$ (c'est le cas par exemple si $v = \log(u)$ pour u dans $\mathbf{K}^*$) ; démontrer que si v n'appartient pas à $\mathbf{K}$, alors v est transcendant sur $\mathbf{K}$. De manière analogue, pour u dans $\mathbf{K}$, démontrer que e^u est transcendant sur $\mathbf{K}$ sauf dans le cas où il existe un entier n tel que $n > 0$ et nu soit un logarithme d'un élément de $\mathbf{K}$ (dans les deux cas, on pourra raisonner par l'absurde et considérer le polynôme minimal de v sur $\mathbf{K}$).
3. On considère le corps différentiel « habituel » $\mathbf{K} = \mathbf{C}(T)$; démontrer qu'une fraction rationnelle de $\mathbf{C}(T)$ non constante n'admet pas de logarithme dans $\mathbf{C}(T)$. En déduire que si u dans $\mathbf{C}(T)$ n'est pas une constante, alors e^u est transcendant sur $\mathbf{C}(T)$.
4. En déduire le critère de Liouville : soit f dans $\mathbf{C}(T)$, u dans $\mathbf{C}(T) \setminus \mathbf{C}$; alors fe^u admet une primitive dans un surcorps différentiel élémentaire de $\mathbf{C}(T)$ si et seulement s'il existe g dans $\mathbf{C}(T)$ tel que $f = g' + gu'$. De plus, si f et u sont des polynômes, alors g est un polynôme et $\deg(u) \leq 1 + \deg(f)$.
5. En déduire que $\displaystyle\int e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ n'est pas une fonction élémentaire i.e. n'appartient à aucun surcorps différentiel élémentaire de $\mathbf{C}(T)$.

Épreuve de mathématiques commune à Lyon et Cachan – ENS 1995 – MP

Préliminaires

1. L'application $\mathbf{K}[X] \to E$, $P \mapsto P(x)$ est un morphisme d'anneau. Son noyau est donc un idéal principal de $\mathbf{K}[X]$. Comme il n'est pas réduit à $\{0\}$ par hypothèse sur x, on dispose d'un unique générateur unitaire de cet idéal P_x, i.e.
$\boxed{P_x \text{ dans } \mathbf{K}[X] \text{ est unitaire et tel que, pour } Q \text{ dans } \mathbf{K}[X],\ Q(x) = 0 \iff P_x \mid Q.}$
Un supplémentaire du noyau est donc $\mathbf{K}_{n-1}[X]$ et le théorème du rang assure que l'image du morphisme précédent est celle de ce supplémentaire et que la base canonique de $\mathbf{K}_{n-1}[X]$ admet une base de $\mathbf{K}[x]$ pour image. Puisque E est intègre, si P_x s'écrit QR avec Q et R dans $\mathbf{K}[X]$, alors soit $Q(x) = 0$, soit $R(x) = 0$ et donc P_x divise soit Q, soit R. Il en résulte que P_x est irréductible. Si P est dans $\mathbf{K}_{n-1}[X]$ et est non nul, il est donc premier à P_x et on dispose d'une relation de Bézout $UP + VP_x = 1$ avec U et V dans $\mathbf{K}[X]$. Il en résulte, en spécialisant en x, $U(x)P(x) = 1$, i.e. l'inverse de $P(x)$ appartient à $\mathbf{K}[X]$ et donc aussi à $\mathbf{K}_{n-1}[X]$. On en conclut que ce dernier est un corps. Comme il contient $\mathbf{K}$ et x et que tout corps contenant $\mathbf{K}$ et x le contient, il vient $\boxed{\mathbf{K}(x) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbf{K}x^i \text{ et } \dim_{\mathbf{K}} \mathbf{K}(x) = n.}$
Si $\mathbf{K}(x)$ est de dimension finie sur $\mathbf{K}$, le morphisme considéré précédemment ne saurait être injectif et on dispose donc d'un polynôme P dans $\mathbf{K}[X]$, non nul, tel que $P(x) = 0$, i.e. $\boxed{x \text{ est algébrique sur } \mathbf{K}.}$

2. Si x dans E est transcendant sur $\mathbf{K}$, l'application $\mathbf{K}(X) \to E$, $R \mapsto R(x)$ est bien définie puisque x n'est racine d'aucun polynôme non nul dans $\mathbf{K}[X]$, et est un morphisme de corps. Elle est donc injective et induit un isomorphisme d'anneau de $\mathbf{K}(X)$ sur son image. Cette dernière est alors un corps contenant $\mathbf{K}$ et x et est telle que tout corps contenant $\mathbf{K}$ et x la contient, i.e. c'est '$\mathbf{K}(x)$. On en déduit qu'on a
$\boxed{\mathbf{K}(X) \simeq \mathbf{K}(x) \text{ via l'isomorphisme de corps } R \mapsto R(x).}$

I - Les dérivations et leurs propriétés élémentaires

1. On a $D(1) = D(1 \times 1) = 2D(1)1 = 2D(1)$ et donc $\boxed{D(1) = 0.}$ Soit $(u, v) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K}^*$, on a $D(u) = D(u/v)v + D(v)u/v$ et donc $\boxed{D(u/v) = \frac{D(u)v - D(v)u}{v^2}.}$ En particulier $D(1/v) = -D(v)/v^2$ puisque $D(1) = 0$. Une récurrence immédiate fournit alors $D(u^n) = nD(u)u^{n-1}$ pour n dans $\mathbf{N}^*$ et donc $D(1/v^n) = D(1/v)/v^{n-1} = -D(v)/v^{n+1}$. Le cas $n = 0$ résultant de l'étude de $D(1)$, on a donc, pour u dans $\mathbf{K}$, $\boxed{D(u^n) = nD(u)u^{n-1} \text{ pour } n \in \mathbf{N}^* \text{ et } D(u^0) = 0}$ et, pour $u \in \mathbf{K}^*$, $\boxed{D(u^n) = nD(u)u^{n-1} \text{ pour } n \in \mathbf{Z}.}$ Puisque $\mathbf{K}_{cst}$ contient 1, est inclus dans $\mathbf{K}$, est stable par addition, multiplication, par propriété de D, par passage à l'inverse pour un élément non nul d'après ce qui précède, il suffit de vérifier que $\mathbf{K}_{cst}$ est stable par passage à l'opposé. On a $\forall u \in \mathbf{K}$ $D(u) + D(-u) = D(0)$ donc, avec $u = 0$, il vient $D(0) = 0$, puis $D(-u) = -D(u)$. Ainsi $\boxed{\mathbf{K}_{cst} \text{ est un sous-corps de } \mathbf{K}.}$ De par la propriété de D pour la multiplication $\boxed{\text{la dérivée logarithmique est un morphisme de groupe de } (\mathbf{K}^*, \times) \text{ dans } (\mathbf{K}, +).}$ Le noyau de ce morphisme étant $\mathbf{K}_{cst}$, on en déduit, pour u et v dans $\mathbf{K}^*$,

$\boxed{D(u)/u = D(v)/v \iff u/v \in \mathbf{K}_{cst}.}$

2. Soit $P = \sum_i a_i X^i \in \mathbf{K}[X]$ et $u \in \mathbf{K}$. On a $D(P(u)) = \sum_i D(a_i u^i)$, i.e. $D(P(u)) = \sum_i D(a_i)u^i + \sum_i a_i D(u^i) == \sum_i D(a_i)u^i + \sum_i a_i i u^{i-1}$, i.e. $\boxed{D(P(u)) = P'(u)D(u) + P^D(u).}$

3. On pose $R = \prod_j Q_j$ et on définit R_j tel que $R = Q_j R_j$. Comme les Q_j sont premiers entre eux deux à deux, un facteur irréductible de R apparaît dans un et un seul Q_j et donc R est sans facteur carré. Après multiplication par $Q^2 R$, l'identité considérée fournit $Q^2 \sum_j P_j R_j = R(D(P)Q - D(Q)P)$. En particulier R divise $Q^2 \sum_j P_j R_j$. Tout facteur irréductible de R apparait donc comme facteur irréductible de Q ou de $\sum_j P_j R_j$. Comme R est le produit de ces facteurs irréductibles, sans exposant, il divise $Q \sum_j P_j R_j$ et donc QR divise $Q^2 \sum_j P_j R_j$. Il en résulte que QR divise $R(D(P)Q - D(Q)P)$, i.e. Q divise $D(P)Q - D(Q)P$. Par conséquent Q divise $D(Q)P$ et puisqu'il est premier à P, le lemme de Gauss assure que $\boxed{Q \text{ divise } D(Q).}$
Soit j dans J est tel que $\operatorname{pgcd}(Q_j, Q) = 1$, alors Q_j divise R_i pour $i \neq j$ et, puisqu'il divise R, il divise $Q^2 P_j R_j$. Comme les Q_j sont premiers entre eux, Q_j est premier à R_j et donc, d'après le lemme de Gauss, $\boxed{Q_j \mid P_j.}$

II - Dérivation sur $\mathbf{K}(X)$ de type logarithmique

1. D'après la question I.2 pour le corps $\mathbf{K}(X)$, on a $D(P) = D(X)P' + P^D$ avec $D(X) \in \mathbf{K}$, $P' \in \mathbf{K}[X]$ et $P^D \in \mathbf{K}[X]$, ces deux derniers polynômes étant de degré inférieur à celui de P. Donc $\boxed{D(P) \in \mathbf{K}[X] \text{ avec } \deg(D(P)) \leq \deg(P).}$ Si P n'est pas nul, en notant $\deg(P) = n$, $\deg(P') < n$ et le coefficient de degré n de $D(P)$ est $D(a_n)$. Si $P = 0$, on a $D(P) = P$ et ainsi $\boxed{\deg D(P) < \deg P \text{ si et seulement si le coefficient dominant de } P \text{ est dans } \mathbf{K}_{cst}.}$

2. Soit Q un polynôme unitaire dans $\mathbf{K}[X]$. Puisqu'on a $D(1) = 0$, la question précédente montre que $D(Q)$ est de degré strictement inférieur à celui de D et donc ne saurait le diviser que s'il est nul, i.e. $\boxed{Q \mid D(Q) \iff Q = 1.}$ Soit P dans $\mathbf{K}[X]$ non nul. On note $n = \deg(P)$ et $P = \sum_i a_i X^i$. On a donc $D(P) \in \mathbf{K}$ si et seulement si $a_n \in \mathbf{K}_{cst}$ et pour $i \geq 1$, $D(a_i) + (i+1)a_{i+1}D(X)$. Remarquons qu'ainsi, pour $i \geq 1$, $a_{i+1} \in \mathbf{K}_{cst} \implies D(a_i + (i+1)a_{i+1}X) = 0 \implies a_i \in \mathbf{K}_{cst}$ et $(i+1)a_{i+1} = 0$, puisque $\mathbf{K}(X)_{cst} = \mathbf{K}_{cst}$. On en déduit que pour $i \geq 1$, $a_{i+1} = 0$ et donc $n \leq 1$. La réciproque étant directe, on a donc $\boxed{D(P) \in \mathbf{K} \iff P = aX + b \text{ avec } (a,b) \in \mathbf{K}_{cst} \times \mathbf{K}.}$

3. On dispose de P et Q dans $\mathbf{K}[X]$, premiers entre eux, avec Q unitaire, tels que $R = \frac{P}{Q}$. On applique la question I.3 avec J un singleton, $Q_1 = 1$ et $P_1 = D(R)$. Alors Q_1 est sans facteur carré et donc on en déduit que Q divise $D(Q)$. Étant unitaire, la question précédente montre $Q = 1$ et donc $D(P) = D(R) \in \mathbf{K}$. La question précédente permet de conclure $\boxed{R = cX + g \text{ avec } (c,g) \in \mathbf{K}_{cst} \times \mathbf{K}.}$

4. On dipose de R dans $\mathbf{K}(X)$, n dans $\mathbf{N}$, (c_i) dans $\mathbf{K}_{cst}^n$ et (Q_i) dans $(\mathbf{K}(X)^*)^n$ tels que $f = D(R) + \sum_{i=1}^n c_i \frac{D(Q_i)}{Q_i}$, par définition et puisque $\mathbf{K}(X)$ et $\mathbf{K}$ ont même corps des constantes.
Par propriété de la dérivée logarithmique on peut supposer les Q_i soit dans $\mathbf{K}$, soit irréductible

et unitaire dans $\mathbf{K}[X]$ puisqu'ils sont produit et quotient de tels éléments et que la dérivée logarithmique transforme un produit en somme et un quotient en différence. On note I la partie de $[\![1;n]\!]$ formée des i tels que $Q_i \in \mathbf{K}$ et $f_i = Q_i$ pour i dans I. On note enfin J une partie de $[\![1;n]\!]$ telle que $\forall i \notin I\ \exists j \in J\ Q_i = Q_j$, puis $d_j = \sum\limits_{\substack{i\notin I\\ Q_i=Q_j}} c_i$ pour j dans J. On a alors

$f = D(R) + \sum\limits_{i\in I} c_i \dfrac{D(f_i)}{f_i} + \sum\limits_{j\in J} d_j \dfrac{D(Q_j)}{Q_j}$, avec $R \in \mathbf{K}(X)$, $f_i \in \mathbf{K}^*$, $Q_j \in \mathbf{K}[X] \setminus \{0\}$, c_i et d_j dans $\mathbf{K}_{cst}$, et les Q_j distincts, de degrés non nuls, irréductibles et unitaires. On écrit $R = \frac{P}{Q}$ avec P et Q dans $\mathbf{K}[X]$, Q non nul, unitaire et premier à P. La question I.3 s'applique alors puisqu'un polynôme constant ou irréductible est sans facteur carré. On en déduit $Q \mid D(Q)$ puis, Q étant unitaire, $Q \in \mathbf{K}_{cst}$. Il en résulte que tous les Q_j sont premiers à Q et donc divisent respectivement $D(Q_j)$. Étant unitaires, ils sont dans $\mathbf{K}_{cst}$, ce qui montre que J est vide et donc $D(R) \in \mathbf{K}$. Il résulte de la question précédente qu'on dispose de c dans $\mathbf{K}_{cst}$ tel que $R - cX \in \mathbf{K}$. Il vient $D(R) - cD(X) \in \mathbf{K}$ et donc $f - cD(X) = (R - D(X)) + \sum_{i\in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i}$, i.e. $\boxed{f - cD(X) \text{ est une somme de Liouville dans } \mathbf{K}.}$

5. Soit f dans $\mathbf{K}$ une somme de Liouville dans E. On note φ l'isomorphisme de corps entre $\mathbf{K}(X)$ et $\mathbf{K}(v)$ fourni par $R \mapsto R(v)$ et on considère $\Delta = \varphi^{-1} \circ D \circ \varphi$. Puisque D est une dérivation et φ et φ^{-1} des morphismes de corps, Δ est une application de $\mathbf{K}(X)$ dans lui-même et pour x et y dans $\mathbf{K}(X)$, on a $\Delta(x+y) = \varphi^{-1}(D(\varphi(x)) + D(\varphi(y))) = \Delta(x) + \Delta(y)$ et $\Delta(xy) = \varphi^{-1}(D(\varphi(x))\varphi(y) + D(\varphi(y))\varphi(x)) = \Delta(x)y + \Delta(y)x$, i.e. Δ est une dérivation sur $\mathbf{K}(X)$. De plus pour x dans $\mathbf{K}(X)$, $\Delta(x) = 0 \iff \varphi(x) \in \mathbf{K}_{cst}$, i.e. puisque φ est l'identité sur $\mathbf{K}$, $D(x) = 0 \iff x \in \mathbf{K}$. Donc $\mathbf{K}(X)$ muni de Δ est un surcorps différentiel de $\mathbf{K}$. Puisque f est une somme de Liouville dans E, il en va de même pour $\varphi(f)$, i.e. f, dans $\mathbf{K}(X)$ et donc on dispose d'après la question précédente de c dans $\mathbf{K}_{cst}$ tek que $f - c\Delta(X)$ soit une somme de Liouville dans $\mathbf{K}(X)$. En appliquant φ^{-1}, il en va de même de $f - cD(v)$ dans E. Comme on dispose de u dans $\mathbf{K}^*$ tel que $D(v) = \frac{D(u)}{u}$, il en résulte que $\boxed{f \text{ est une somme de Liouville dans } \mathbf{K}.}$

III - Dérivation sur $\mathbf{K}(X)$ de type exponentiel

1. Si P est constant, $D(P)$ aussi et $D(P) = 0 \iff P \in \mathbf{K}_{cst}$. Sinon on note n son degré. D'après la question I.2, on a $D(P) = D(X)P' + P^D$ avec $D(X) \in \mathbf{K}^*X$, $P' \in \mathbf{K}_{n-1}[X]$ et $P^D \in \mathbf{K}_n[X]$. Donc $\boxed{D(P) \in \mathbf{K}[X] \text{ avec } \deg(D(P)) \leq \deg(P).}$ En particulier dans le second cas, en notant a le coefficient dominant de P, $D(P - aX^n) = D(P) - D(aX^n)$ et donc $\deg(D(P) - D(aX^n)) < n$. Comme on a $D(aX^n) \leq n$, il vient $\deg(D(P)) < n \iff \deg(D(aX^n)) < n$. Or, par dérivation logarithmique, $D(aX^n) \in \mathbf{K}(aX^n) = \mathbf{K}X^n$. Donc $\deg(D(P)) < n \iff D(aX^n) = 0$. Puisque $\mathbf{K}(X)_{cst} = \mathbf{K}_{cst}$, pour $n \geq 1$ et $a \neq 0$, on a $D(aX^n) \neq 0$. Il en résulte $\boxed{\deg(D(P)) < \deg(P) \iff P \in \mathbf{K}^*_{cst}.}$

2. La question précédente montre $P \mid D(P) \iff \exists a \in \mathbf{K}\ D(P) = aP$. En notant $P = \sum_i a_i X^i$, on a remarqué précédemment $D(a_i X^i) \in \mathbf{K}a_i X^i$. On en déduit que P divise $D(P)$ si et seulement les dérivées logarithmiques des monômes non nuls de P sont toutes égales, i.e. ces monômes non nuls sont multiples les uns des autres par un élément de $\mathbf{K}_{cst}$ d'après la

question I.1. Ainsi $P \mid D(P)$ si et seulement si P ne possède qu'au plus un monôme non nul, puisque deux monômes de degrés différents ne sont jamais proportionnels par une constante : $\boxed{P \mid D(P) \iff P = aX^n, \text{ avec } a \in \mathbf{K} \text{ et } n \in \mathbf{N}.}$

3. On dispose de P et Q dans $\mathbf{K}[X]$, premiers entre eux, avec Q unitaire, tels que $R = \frac{P}{Q}$. On applique la question I.3 avec J un singleton, $Q_1 = 1$ et $P_1 = D(R)$. Alors Q_1 est sans facteur carré et donc on en déduit que Q divise $D(Q)$. Étant unitaire, la question précédente montre $Q = X^n$ pour n dans $\mathbf{N}$ et on écrit $R = \displaystyle\sum_{i=-n}^{+\infty} a_i X^i$ avec a_i dans $\mathbf{K}$. Or on a vu précédemment qu'on a $D(a_iX^i) \in \mathbf{K}^* a_i X^i$ si $i \neq 0$. Puisque $D(R)$ est un polynôme, on en déduit $n = 0$ et $\boxed{\text{soit } R \in \mathbf{K}_{cst}, \text{ soit } R \text{ est un polynôme de même degré que } D(R).}$

4. Avec le raisonnement de la question II.4 il vient $f = D(R) + \sum_{i\in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i} + \sum_{j \in J} d_j \frac{D(Q_j)}{Q_j}$, avec $R \in \mathbf{K}(X)$, $f_i \in \mathbf{K}^*$, $Q_j \in \mathbf{K}[X] \setminus \{0\}$, c_i et d_j dans $\mathbf{K}_{cst}$, et les Q_j distincts, de degrés non nuls, irréductibles et unitaires. On écrit $R = \frac{P}{Q}$ avec P et Q dans $\mathbf{K}[X]$, Q non nul, unitaire et premier à P. La question I.3 s'applique alors puisqu'un polynôme constant ou irréductible est sans facteur carré. On en déduit $Q \mid D(Q)$ puis, Q étant unitaire, on dispose de n dans $\mathbf{N}$ tel que $Q = X^n$. Si j dans J est tel que Q_j est premier à Q, alors Q_j divise $D(Q_j)$ et, étant irréductible et unitaire, $Q_j = X$. Autrement dit soit J est vide, soit $Q = 1$ et J est un singleton et $Q_j = X$. Dans tous les cas $D(R)$ est un polynôme constant et donc R aussi d'après la question précédente. On pose $c = 0$ si J est vide et $c = d_j$ si $J = \{j\}$, et alors $\boxed{f - cD(X)/X \text{ soit une somme de LIOUVILLE dans } \mathbf{K}.}$

5. Comme en question II.5 on utilise un isomorphisme de corps entre $\mathbf{K}(X)$ et $\mathbf{K}(v)$ pour faire de $\mathbf{K}(X)$ un surcorps différentiel de $\mathbf{K}$, de type exponentiel, avec $\dfrac{\Delta(X)}{X} = \dfrac{D(v)}{v}$. On en déduit, par isomorphisme, et puisque v est une exponentielle, que $\boxed{\text{si } f \text{ dans } \mathbf{K} \text{ est une somme de LIOUVILLE dans } E, \text{ c'en est une dans } \mathbf{K}.}$

IV - Norme, trace et descente dans un surcorps de dimension finie

1. On note $\mathrm{com}(A)$ la matrice des cofacteurs de A. Par définition on a $u \circ u^\sharp = (-1)^{n-1}\chi_u(u) + (-1)^n \chi_u(0)\mathrm{Id}_E$ et donc, d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, $u \circ u^\sharp = \det(u)\mathrm{Id}_E$. Matriciellement on a donc $AA^\sharp = \det(A)I_n$. Si A est inversible le membre de droite s'écrit $A\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(A)$ et donc, en simplifiant à gauche par A, il vient $A^\sharp = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(A)$. Pour λ dans $\mathbf{K}$, on a, en posant $v = u - \lambda \mathrm{Id}_E$, $\chi_v = \chi_u(T + \lambda)$. On remarque également que, par définition et en utilisant la formule de TAYLOR, $\Omega_u = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\chi_u^{(k)}(0)}{k!} T^{k-1}$ et donc $\Omega_v = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\chi_u^{(k)}(\lambda)}{k!} T^{k-1}$. Il en résulte $(A - \lambda I_n)^\sharp = (-1)^{n-1} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\chi_u^{(k)}(\lambda)}{k!}(A - \lambda I_n)^{k-1}$ et en particulier tous les coefficients de $(A - \lambda I_n)^\sharp$ sont des polynômes en λ. De plus les coefficients de ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(A - \lambda I_n)$ sont également des polynômes en λ. Ces expressions polynomiales coïncident pour toute valeur de λ non racine de χ_u, donc sur un nombre infini d'éléments de $\mathbf{K}$. Elles coïncident donc sur $\mathbf{K}$ entier et il en résulte que tous les coefficients sont égaux en 0, i.e. $\boxed{A^\sharp = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(A).}$

2. Puisque E est un surcorps de $\mathbf{K}$, c'est aussi une $\mathbf{K}$-algèbre associative et donc $E \mapsto \mathscr{L}(E)$, $x \mapsto m_x$ est un morphisme d'algèbre. Comme la trace est linéaire de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathbf{K}$, sa composée avec le morphisme précédent l'est aussi, i.e. $\boxed{\text{Tr est } \mathbf{K}\text{-linéaire.}}$ Soit $\lambda \in \mathbf{K}$, on a $m_\lambda = \lambda \mathrm{Id}_E$ et donc $\boxed{\mathrm{Tr}(\lambda) = n\lambda.}$ Comme le déterminant est multiplicatif de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathbf{K}$, sa composée avec le morphisme précédent l'est aussi, i.e. $\boxed{N(xy) = N(x)N(y) \text{ pour } x \text{ et } y \text{ dans } E.}$ Soit $\lambda \in \mathbf{K}$, on a $m_\lambda = \lambda \mathrm{Id}_E$ et donc $\boxed{N(\lambda) = \lambda^n.}$ Toujours grâce au morphisme d'algèbre, on a $P(m_x) = m_{P(x)}$ pour tout polynôme P dans $\mathbf{K}[X]$ et donc, en posant $x^\sharp = (-1)^{n-1}\Omega_{m_x}(x)$, on a $m_{x^\sharp} = (m_x)^\sharp$. Comme on a également nécessairement $x^\sharp = m_{x^\sharp}(1) = (m_x)^\sharp(1)$, on en déduit $\boxed{\text{l'existe et l'unicité de } x^\sharp.}$ Par définition et d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, on a $m_x(m_x)^\sharp = \det(m_x)\mathrm{Id}_E$ et donc, en utilisant le morphisme d'algèbre, $m_{xx^\sharp} = N(x)m_1 = m_{N(x)}$, i.e. par injectivité du morphisme, $xx^\sharp = N(x)$. Par commutativité de E, on conclut $\boxed{x^\sharp x = xx^\sharp = N(x).}$

3. Pour α et β des k-uplets d'éléments distincts de $[\![1;n]\!]$, on note $A^{\alpha,\beta}$ la matrice extraite de A en supprimant les lignes d'indice dans α et les colonnes d'indice dans β. Par développement par rapport à la première colonne on a donc $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\det(A^{(i),(1)})a_{i,1}$ et donc, par dérivation, $D(\det(A)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\det(A^{(i),(1)})D(a_{i,1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}D(\det(A^{(i),(1)}))a_{i,1}$. On a de plus, en utilisant la question 1, $\mathrm{Tr}((A^{(i),(1)})^\sharp D(A^{(i),(1)})) = \displaystyle\sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne i, k\ne 1}} \det(A^{(i,j),(1,k)})D(a_{j,k})$.

Or on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\det(A^{(i,j),(1,k)})a_{i,1} = \det(A^{(j),(k)})$, par développement par rapport à la première colonne et donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\mathrm{Tr}((A^{(i),(1)})^\sharp D(A^{(i),(1)}))a_{i,1} = \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ k\ne 1}} \det(A^{(j),(k)})D(a_{j,k})$.

En utilisant une fois encore la question 1, on a ainsi

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\det(A^{(i),(1)})D(a_{i,1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\mathrm{Tr}(D(A^{(i),(1)})(A^{(i),(1)})^\sharp)a_{i,1} = \mathrm{Tr}(A^\sharp D(A))$$

et une récurrence sur la dimension permet donc de conclure puisqu'on a, pour (a,b,c,d) dans $\mathbf{K}^4$, on a $D(ad-bc) = (dD(a) - bD(c)) + (-cD(b) + aD(d))$ et $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)^\sharp = \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a\end{smallmatrix}\right)$, $\boxed{D(\det(A)) = \mathrm{Tr}(A^\sharp D(A)).}$

4. Puisqu'on a affaire à des applications linéaires, il suffit de vérifier la relation cherchée sur les vecteurs de $\mathcal{B}$. Soit donc j dans $[\![1;n]\!]$, on a $(m_x \circ \Delta + m_{D(x)})(e_j) = xD(e_j) + D(x)e_j = D(xe_j)$ et $(\Delta \circ m_x + m_x^D)(e_i) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_{i,j}D(e_i) + D(a_{i,j})e_i) = D\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}e_i\right)$, ce qui permet de conclure $\boxed{m_x \circ \Delta + m_{D(x)} = \Delta \circ m_x + m_x^D.}$ Par linéarité et commutativité de la trace on en déduit $\mathrm{Tr}(m_{D(x)}) = \mathrm{Tr}(m_x^D)$. Le membre de gauche est égal à $\mathrm{Tr}(D(x))$ par définition et celui de

droite est $D(\mathrm{Tr}(x))$ car D est additive, i.e. $\boxed{\mathrm{Tr}(D(x)) = D(\mathrm{Tr}(x)).}$

5. La relation $(*)$ donne également, puisque x et $x^\sharp$ commutent, $m_x \circ m_{x^\sharp} \circ \Delta + m_{x^\sharp D(x)} = m_{x^\sharp} \circ \Delta \circ m_x + (m_x)^\sharp \circ m_x^D$. Par linéarité et commutativité de la trace on en déduit $\mathrm{Tr}(x^\sharp D(x)) = \mathrm{Tr}((m_x)^\sharp \circ m_x^D)$ et donc, en utilisant la question 3, le membre de droite est égal à $D(\det(m_x))$ et $\boxed{\mathrm{Tr}(x^\sharp D(x)) = D(N(x)).}$ Si x est non nul, $x^\sharp = N(x)x^{-1}$ et donc par linéarité, puisque $N(x)$ est dans $\mathbf{K}$, $\mathrm{Tr}(x^\sharp D(x)) = N(x)\,\mathrm{Tr}(x^{-1}D(x))$. On en déduit $\boxed{\dfrac{D(N(x))}{N(x)} = \mathrm{Tr}\left(\dfrac{D(x)}{x}\right).}$

6. Soit f dans $\mathbf{K}$ une somme de Liouville dans E, alors on a $f = \dfrac{1}{n}\mathrm{Tr}(f)$ et les deux questions précédentes montrent que la trace d'une somme de Liouville dans E en est une dans $\mathbf{K}$. Ainsi,

   $\boxed{\text{si } f \text{ dans } \mathbf{K} \text{ est une somme de Liouville dans un surcorps différentiel de } \mathbf{K} \text{ de dimension finie, c'en est une dans } \mathbf{K}.}$

V - Le théorème de Liouville-Ostrowski

1. Soit x dans E et algébrique sur $\mathbf{K}$. D'après la question I.2 appliquée à E, x et P_x, on $P_x'(x)D(x) = -P_x^D(x)$. Comme P_x est minimal et non constant, P_x' n'annule pas x et on en déduit $D(x) \in \mathbf{K}(X)$. Par propriété élémentaire des dérivations et puisque $D(\mathbf{K}) \subset \mathbf{K}$ $\boxed{D(\mathbf{K}(x)) \subset \mathbf{K}(x).}$

2. Si E est un surcorps de $\mathbf{K}$ de dimension finie et x est dans $E \setminus \mathbf{K}$, alors E est un surcorps de $\mathbf{K}(x)$ de dimension finie strictement inférieure à la précédente. On en déduit qu'on peut supposer $\mathbf{K}_{i+1}$ de la forme $\mathbf{K}_i(v_i)$ dans tous les cas, dans la définition de surcorps différentiel élémentaire, avec v_i une exponentielle ou un logarithme d'un élément de $\mathbf{K}_i$, ou un élément algébrique sur $\mathbf{K}_i$. Dans tous les cas si $D(\mathbf{K}_i) \subset \mathbf{K}_i$, on en déduit $D(\mathbf{K}_{i+1}) \subset \mathbf{K}_{i+1}$ et ainsi $\mathbf{K}_{i+1}$ est un surcorps différentiel de $\mathbf{K}_i$, ayant même corps $\mathbf{K}_{cst}$ des constantes, de type exponentiel, logarithmique ou algébrique. Les trois parties précédentes montrent alors que si f est une somme de Liouville sur $\mathbf{K}_{i+1}$, c'en est une sur $\mathbf{K}_i$. Comme l'existence de primitive dans E exhibe en particulier f comme sonne de Liouville dans E, on en déduit que $\boxed{f \text{ est une somme de Liouville dans } \mathbf{K}.}$

VI - $\displaystyle\int e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ n'est pas une fonction élémentaire

1. On reprend les arguments des questions III.4 et III.3. Si Xf est une somme de Liouville dans $\mathbf{K}(X)$, on peut l'écrire $Xf = D(R) + \displaystyle\sum_{i\in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i} + \sum_{j\in J} d_j \frac{D(Q_j)}{Q_j}$, avec $R = \frac{P}{Q}$, avec les mêmes notations qu'en question III.4. On en déduit $Q = X^n$ pour un certain entier n, puis que $D(R)$ est dans $\mathbf{K}[X]$. En écrivant $R = \displaystyle\sum_{k=-n}^{+\infty} a_k X^k$, il vient comme en question III.3, en considérant le coefficient de X, $f = D(a_1) + a_1 \frac{D(X)}{X}$. Réciproquement, dans ce cas, on a $Xf = D(a_1)X + a_1 D(X) = D(a_1 X)$ et $a_1 X \in \mathbf{K}(X)$. On en déduit

$\boxed{Xf \text{ est une somme de Liouville dans } \mathbf{K}(X) \iff \exists g \in \mathbf{K}\ f = D(g) + gD(X)/X.}$ Si $\mathbf{K} = k(T)$ et f et $D(X)/X$ appartiennent à $k[T]$, alors en écrivant $g = \frac{P}{Q}$ avec P et Q dans $k(T)$ premiers entre eux, il vient $Q(Qf - P\frac{D(X)}{X}) = P'Q - Q'P$, de sorte que Q divise Q' et donc Q est constant, i.e. $\boxed{g \text{ est un polynôme en } T.}$

2. On suppose par l'absurde que v est algébrique. D'après la question I.2 appliquée à E, v et P_v, on a $P_v'(v)D(v) + P^D(v) = 0$ et donc P_v divise $P^D + D(v)P_v'$. Comme ce dernier polynôme est de degré strictement inférieur à celui de P_v, puisque P_v est unitaire et qu'on a $D(1) = 0$, on en déduit $P^D + D(v)P_v' = 0$. En notant n le degré de P_v et en considérant le coefficient de degré $n-1$ dans l'égalité précédente, il vient $D(a_{n-1}) + nD(v) = 0$, i.e. $a_{n-1} + nv \in \mathbf{K}_{cst}$ et ceci contredit $v \notin \mathbf{K}$ puisque n est non nul et n et a_{n-1} sont dans $\mathbf{K}$: $\boxed{v \text{ est transcendant.}}$
On suppose maintenant $D(v)/v = D(u)$ avec u dans $\mathbf{K}$ et v algébrique sur $\mathbf{K}$. Il vient comme précédemment $D(u)vP_v'(v) + P^D(v) = 0$ et donc P_v divise $D(u)XP_v' + P^D$. Par égalité des degrés il vient $D(u)XP_v' + P^D = nD(u)P_v$, en notant n le degré de P_v. Si X divisait P_v alors P_v/X annulerait v, ce qui contredirait la minimalité de P_v et donc $P_v(0)$ est non nul. En considérant le terme constant dans l'égalité précédente, il vient $D(P(0)) = nD(u)P(0)$ et donc nu est un logarithme de $P(0)$. Réciproquement si $D(nu) = D(x)/x$ avec x dans $\mathbf{K}^*$, on a $D(v^n)/v^n = D(x)/x$ et donc $v^n = ax$ avec $a \in \mathbf{K}_{cst}$ et v est algébrique. Par conséquent $\boxed{e^u \text{ est transcendant sauf s'il existe } n \text{ dans } \mathbf{N}^* \text{ tel que } nu \text{ soit un logarithme.}}$

3. Soit u dans $\mathbf{C}(T)$ non constant. En décomposant u en facteurs irrédutibles, on obtient $\dfrac{u'}{u} = \displaystyle\sum_i \frac{d_i}{X - a_i}$ où les a_i sont les racines et pôles de u et d_i est l'ordre de la racine ou l'opposé de celui du pôle. Par unicité de la décomposition en éléments simples et en partant de celle de v dans $\mathbf{C}(T)$ pour ovtenir celle de v', on ne donc pas avoir $v' = \dfrac{u'}{u}$, i.e. $\boxed{u \text{ n'admet pas de logarithme dans } \mathbf{C}(T).}$ La question précédente, jointe à ce résulte, montre que $\boxed{e^u \text{ est transcendant sur } \mathbf{C}(T).}$

4. Si fe^u admet une primitive dans un surcorps différentiel élémentaire de $\mathbf{C}(T)$, c'est une somme de Liouville dans ce surcorps et donc dans $\mathbf{C}(T)$ d'après la partie V. D'après ce qui précède e^u est transcendant et on peut donc appliquer la question 1 avec $X = e^u$. On obtient directement $f = g' + gu'$ avec g dans $\mathbf{C}(T)$. La réciproque est directe puisque $(ge^u)' = (g' + gu')e^u$:
$$\boxed{\text{fe^u admet une primitive dans un surcorps différentiel élémentaire de $\mathbf{C}(T)$ si et seulement s'il existe g dans $\mathbf{C}(T)$ tel que $f = g' + gu'$.}}$$
De plus, si f et u sont des polynômes, alors $(e^u)'/e^u$ aussi et la question 1 permet d'affirmer que'g est un polynôme. Puisque u n'est pas constant le degré de gu' est strictement supérieur à celui de g' et aussi à celui de u'. Ce dernier est donc inférieur à celui de f i.e. $\boxed{\deg(u) \leq 1 + \deg(f).}$

5. Puisque T^2 n'est pas constant, on peut appliquer ce qui précède avec $f = 1$ et $u = T^2$, de sorte que le critère de Liouville impose $2 \leq 1 + 0$. Cette impossibilité montre que $\boxed{\displaystyle\int e^{t^2}\,dt \text{ n'est pas une fonction élémentaire.}}$