Deuxième composition
ENSAE 2003 MP

Notations :
Dans tout le problème, le corps des scalaires est $\mathbf{R}$ et les espaces vectoriels sont de dimension finie. Si X et Y sont deux espaces vectoriels normés, on note $\mathscr{L}(X,Y)$ l'espace des applications linéaires de X dans Y. On note $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbf{R})$ et on l'appelle espace vectoriel dual de E.
Si X et Y sont deux espaces vectoriels, $\mathrm{GL}(X,Y)$ désigne l'ensemble des isomorphismes de X sur Y.
Une isométrie entre deux espaces vectoriels normés $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ est une application linéaire f de X dans Y qui conserve la norme : pour tout $x \in X$, $\|f(x)\|_Y = \|x\|_X$. On dit que deux espaces vectoriels normés de dimension finie sont isométriques s'il existe une isométrie de l'un sur l'autre (donc surjective).
Soit β une base d'un espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$; on notera $\det_\beta(x_1, \ldots, x_n)$ le déterminant dans la base β des vecteurs x_1, …, x_n de E.

PARTIE I - Espaces l_N^p et leur dual.

Soit p et q des réels strictement supérieurs à 1 vérifiant $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et N un entier naturel non nul.

1. Soit x et y deux réels positifs. Montrer $xy \leq \dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}y^q$.
2. Soit a_1, …, a_N, b_1, …, b_N des réels. Montrer $\left|\displaystyle\sum_{n=1}^N a_n b_n\right| \leq \left(\displaystyle\sum_{n=1}^N |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\displaystyle\sum_{n=1}^N |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.
3. En déduire, pour tous réels a_1, …, a_N, $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^N |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup\left\{\left|\displaystyle\sum_{n=1}^N a_n b_n\right| \;\middle|\; \displaystyle\sum_{n=1}^N |b_n|^q = 1\right\}$.
4. Soit a_1, …, a_N, b_1, …, b_N des réels. Montrer que pour tout $r \geq 1$, on a :

$$\left(\sum_{n=1}^N |a_n + b_n|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{n=1}^N |a_n|^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{n=1}^N |b_n|^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

On pose $\|(a_1, \ldots, a_N)\|_\infty = \max\limits_{1 \leq n \leq N} |a_n|$ et on désigne par l_N^∞ l'espace $\mathbf{R}^N$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $r \geq 1$, on définit l_N^r comme l'espace $\mathbf{R}^N$ muni de la norme $\|(a_1, \ldots, a_N)\|_r = \left(\displaystyle\sum_{n=1}^N |a_n|^r\right)^{\frac{1}{r}}$.

5. a) Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés de dimension finie. Montrer que l'on définit une norme sur $\mathscr{L}(E,F)$ en posant $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$, puis montrer qu'on a, pour tout x dans E, $\|f(x)\|_F \leq \|f\| \cdot \|x\|_E$. Dans la suite on munit $\mathscr{L}(E,F)$ et E^* de cette norme, où $\mathbf{R}$ est muni de la valeur absolue.

   b) Justifier que l_N^p est un espace vectoriel normé dont le dual $(l_N^p)^*$ est isométrique à l_N^q.

   Indication : considérer l'application θ de l_N^q dans $(l_N^p)^*$ définie par $\theta(b)(a) = \displaystyle\sum_{n=1}^N a_n b_n$.

   c) Déterminer le dual de l_N^1 et celui de l_N^∞.

PARTIE II - Hahn-Banach fini-dimensionnel.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E, distinct de E, et f une forme linéaire sur F.

1. Soit x_0 un vecteur de E n'appartenant pas à F. On note $\tilde{F} = F \oplus \mathbf{R}x_0$.

a) Montrer $\sup_{v\in F}\left(f(v)-\|f\|\cdot\|v-x_0\|\right)\leq \inf_{v\in F}\left(\|f\|\cdot\|v+x_0\|-f(v)\right)$.

b) En déduire qu'il existe un réel α tel que pour tout $v\in F$, on ait :

$$f(v)+\alpha\leq\|f\|\cdot\|v+x_0\| \quad \text{et} \quad f(v)-\alpha\leq\|f\|\cdot\|v-x_0\| \ .$$

On pose pour $x=v+tx_0\in\tilde{F}$, où $v\in F$ et $t\in\mathbf{R}$: $\tilde{f}(x)=f(v)+\alpha t$.

c) Montrer que $\tilde{f}$ est une forme linéaire continue sur $\tilde{F}$ dont la restriction à F est f et qu'on a $\|f\|=\|\tilde{f}\|$.

2. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue g sur E, dont la restriction à F est f, telle qu'on ait $\|f\|=\|g\|$.
3. Soit $x\in E$. Montrer $\|x\|=\sup\{|f(x)|\mid f\in E^* \text{ avec } \|f\|=1\}$.

PARTIE III - Distance de BANACH-MAZUR. Généralités.

Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés de même dimension finie. On définit

$$d(E,F)=\inf\left\{\ln\left(\|u\|\cdot\left\|u^{-1}\right\|\right)\ \middle|\ u\in \mathrm{GL}(E,F)\right\}\ .$$

1. a) Montrer $0\leq d(E,F)$.
   b) Montrer $d(E,F)=d(F,E)$.
2. a) Montrer que la borne inférieure est atteinte.
   b) En déduire que E et F sont isométriques si et seulement si $d(E,F)=0$.
3. Montrer $d(E,G)\leq d(E,F)+d(F,G)$.
4. a) Soit $u\in\mathscr{L}(E,F)$. On définit $u^*(\zeta)=\zeta\circ u$, pour $\zeta\in F^*$. Montrer $u^*\in\mathscr{L}(F^*,E^*)$ et qu'on a $\|u\|=\|u^*\|$.
   b) En déduire $d(E,F)=d(E^*,F^*)$.

PARTIE IV - Distance de BANACH-MAZUR entre espaces l_n^p.

On note $E=l_n^p$, où $p\geq 1$, $F=l_n^2$ et ω_n l'ensemble des applications de $[\![1;n]\!]$ dans $\{-1,1\}$.

1. Soit m dans $\mathbf{N}^*$. Montrer, pour tous x_1, …, x_m dans F,

$$2^{-m}\sum_{\varphi\in\omega_n}\left\|\sum_{i=1}^{m}\varphi(i)x_i\right\|_2^2=\sum_{i=1}^{m}\|x_i\|_2^2\ .$$

Soit $u : l_n^p\to l_n^2$ un isomorphisme. On note $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

2. a) Soit $A(u)=\displaystyle\sum_{\varphi\in\omega_n}\left\|\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)u(e_i)\right\|_2^2$. Montrer $A(u)\leq n2^n\|u\|^2$.
   b) Montrer $A(u)\geq 2^n n^{2/p}\left\|u^{-1}\right\|^{-2}$.
3. Montrer $d(l_n^p,l_n^2)\geq\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{p}\right|\ln(n)$.
4. a) Montrer que pour tout $p'\geq p\geq 1$ et tout $x\in\mathbf{R}^n$, on a : $\|x\|_{p'}\leq\|x\|_p$.
   b) Montrer $d(l_n^p,l_n^2)=\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{p}\right|\ln(n)$. Indication : on pourra considérer l'identité sur $\mathbf{R}^n$.
   c) Que se passe-t-il pour $p=\infty$?

PARTIE V - Distance de Banach-Mazur à l^1_N.

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension n. On note S_E la sphère unité de E.

1. Montrer qu'il existe n vecteurs $b_1, \ldots, b_n$ de E de norme 1 et n formes linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de norme égale à 1 telles que pour tous $1 \leq i, j \leq n$, on ait $\varphi_i(b_j) = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.
   Indication : on pourra considérer l'application : $\Lambda : S_E^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ qui à un n-uplet de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ associe leur déterminant dans une base β ; ainsi que l'application, à i fixé et quand $\Lambda(x_1, \ldots, x_n)$ est non nul, qui à $x \in E$ associe $\dfrac{\det_\beta(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{\det_\beta(x_1, \ldots, x_n)}$.
2. On pose pour tout $x \in E$: $\nu(x) = \sum_{i=1}^n |\varphi_i(x)|$. Montrer que ν est une norme sur E et qu'en notant E_1 l'espace E muni de cette norme, E_1 et l^1_n sont isométriques.
3. Montrer $d(E, l^1_n) \leq \ln(n)$.

PARTIE VI - Compact de Minkowski.

Soit n un entier supérieur ou égal à 1, on note M_n l'ensemble des normes sur $\mathbf{R}^n$. On considère l'ensemble $\mathcal{E}_n$ des espaces vectoriels normés $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|)$, où $\|\cdot\| \in M_n$.
Pour X et Y dans $\mathcal{E}_n$, on définit la relation $X\mathcal{R}Y$ si X et Y sont isométriques.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{E}_n$. Justifier la notation $\hat{d}(\hat{X}, \hat{Y}) = d(X, Y)$ (où $\hat{X}$, resp. $\hat{Y}$, est la classe de X, resp. de Y) est cohérente.

On note $\hat{\mathcal{E}}_n$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation d'équivalence.
On note B_1 la boule unité (fermée) de l'espace l^1_n et $C(B_1)$ est l'espace des fonctions continues sur B_1, à valeurs réelles, muni de la norme $N_\infty(f) = \sup\{|f(x)| \mid x \in B_1\}$. On note Φ_n l'ensemble des fonctions continues sur B_1 qui sont la restriction à B_1 d'une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbf{R}^n$ vérifiant pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $\|x\| \leq \|x\|_1$ et $\|x\|_1 \leq n\,\|x\|$.

2. a) Montrer que Φ_n est une partie fermée bornée de $C(B_1)$.
   b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x, $y \in B_1$:

$$\|x - y\|_1 \leq \delta \Longrightarrow \sup\{|f(x) - f(y)| \mid f \in \Phi_n\} \leq \varepsilon\ .$$

On admet dans la suite que ces deux résultats impliquent que Φ_n est une partie compacte de $C(B_1)$ (Théorème d'Ascoli).

3. On considère l'application τ de Φ_n dans $\hat{\mathcal{E}}_n$ qui à f associe la classe de $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|)$, où $\|\cdot\|$ est la norme associée à f par définition de Φ_n.
   a) Montrer que τ est bien définie et surjective.
   b) Montrer que si $(f_j)_{j\in\mathbf{N}}$ converge vers f dans Φ_n alors $\lim\limits_{j\to\infty} \hat{d}(\tau(f_j), \tau(f)) = 0$.
4. En déduire que $(\hat{\mathcal{E}}_n, \hat{d})$ est un espace métrique compact.

Deuxième composition – ENSAE 2003 MP

PARTIE I

1. Si x ou y est nul, le membre de gauche est nul et l'autre est positif. Si x et y sont strictement positifs, par concavité du logarithme sur $\mathbf{R}_+^*$ et donc entre x^p et y^q, on a

$$\ln(xy) = \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q) \leq \ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right)$$

et donc, par croissance de la fonction exponentielle, il en résulte que dans tous les cas on a

$$\boxed{xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.}$$

Remarque : on peut aussi directement étudier la fonction donnée par $\frac{1}{p}t^p + \frac{1}{q}y^q - yt$. Elle est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ comme combinaison algébrique de fonctions puissances, de dérivée donnée par $t^{p-1} - y$, strictement croissante car $p > 1$, et admet donc un unique minimum en $y^{1/(p-1)}$ i.e. en $y^{q/p}$ car $p(1-\frac{1}{p}) = \frac{p}{q}$. En ce point elle vaut $y^q - y^{1+q/p}$, ce qui est nul car $p + q = pq$. On en déduit l'inégalité ainsi que le cas d'égalité donné par $x^p = y^q$.

2. On pose $\alpha = \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^p\right)^{1/p}$ et $\beta = \left(\sum_{i=1}^N |b_i|^q\right)^{1/q}$. On peut écrire $(a_1, \ldots, a_N) = \alpha(x_1, \ldots, x_N)$ et $(b_1, \ldots, b_N) = \beta(y_1, \ldots, y_N)$ avec $\sum_{i=1}^N |x_i|^p = 1$ et $\sum_{i=1}^N |y_i|^p = 1$: si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, alors $a_1 = \cdots = a_N = 0$ ou $b_1 = \cdots = b_N = 0$ et on peut prendre $x_i = \delta_{i1}$ ou $y_j = \delta_{j1}$, et sinon les x_i ou les y_j sont uniquement déterminés par division par α ou β et la relation s'ensuit par définition de α et β. On applique, pour $1 \leq i \leq N$, l'inégalité précédente à $|x_i|$ et $|y_i|$, ce qui est licite car ce sont des réels positifs. Il vient, par inégalité triangulaire et positivité de α et β,

$$\left|\sum_{i=1}^N a_i b_i\right| \leq \alpha\beta \sum_{i=1}^N |x_i|\,|y_i| \leq \alpha\beta \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q\right) \leq \alpha\beta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \leq \alpha\beta$$

ce qui est l'inégalité demandée : $\boxed{\left|\sum_{i=1}^N a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^N |b_i|^q\right)^{1/q}.}$

3. Soit a_1, …, a_N des réels. On pose $\alpha = \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^p\right)^{1/p}$ et on écrit comme précédemment $(a_1, \ldots, a_N) = \alpha(x_1, \ldots, x_N)$ avec $\sum_{i=1}^N |x_i|^p = 1$. La question précédente montre que le supremum considéré dans la question est bien défini et qu'il est majoré par α. Réciproquement, pour $1 \leq i \leq N$, on pose $b_i = \operatorname{sgn}(x_i)\,|x_i|^{p/q}$ où la fonction signe, notée sgn, vaut -1 sur $\mathbf{R}_-^*$, 0 en 0 et 1 sur $\mathbf{R}_+^*$. En particulier on a $\sum_{i=1}^N |b_i|^q = \sum_{i=1}^N |x_i|^p = 1$ et, puisque pour i entre 1 et N x_i et b_i sont de même signe, $\left|\sum_{i=1}^N x_i b_i\right| = \sum_{i=1}^N |x_i|\,|b_i|$. De plus, pour i entre 1 et N, $|x_i|\,|b_i| = (|b_i|^q)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = |b_i|^q = \frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|b_i|^q$. On en conclut $\left|\sum_{i=1}^N x_i b_i\right| = 1$ ou encore $\left|\sum_{i=1}^N a_i b_i\right| = \alpha$, par définition et positivité de α. Ceci montre que le supremum est effectivement atteint en $(b_1, \cdots, b_N)$, i.e. $\boxed{\left(\sum_{i=1}^N |a_i|^p\right)^{1/p} = \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^N a_i b_i\right| \;\middle|\; \sum_{i=1}^N |b_i|^q = 1\right\}.}$

4. Si $r=1$, il s'agit de l'inégalité triangulaire. On suppose donc $r>1$. Par application de l'inégalité I.2), avec $p=r$ et $q=\dfrac{r}{r-1}$, inégalité triangulaire et positivité de $|a_i+b_i|^{p-1}$, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N |a_i+b_i|^p &\leq \sum_{i=1}^N (|a_i|+|b_i|)\,|a_i+b_i|^{p-1} \leq \sum_{i=1}^N |a_i|\cdot|a_i+b_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^N |b_i|\cdot|a_i+b_i|^{p-1}\\ &\leq \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^N |a_i+b_i|^{q(p-1)}\right)^{1/q}+\left(\sum_{i=1}^N |b_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^N |a_i+b_i|^{q(p-1)}\right)^{1/q}\\ &\leq \left(\left(\sum_{i=1}^N |a_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^N |b_i|^p\right)^{1/p}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^N |a_i+b_i|^p\right)^{1/q}\end{aligned}$$

et donc, si $\sum_{i=1}^N |a_i+b_i|^p>0$, on en déduit le résultat cherché puisque $1-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}$. Sinon c'est que cette somme est nulle et l'inégalité est vérifiée aussi puisque le membre de droite est positif. Par conséquent

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^N |a_i+b_i|^r\right)^{1/r}\leq\left(\sum_{i=1}^N |a_i|^r\right)^{1/r}+\left(\sum_{i=1}^N |b_i|^r\right)^{1/r}.}$$

5. a) Soit f dans $\mathscr{L}(E,F)$. Comme E est de dimension finie, f est continue, donc bornée sur la sphère unité et donc $\|f\|_\infty$ est bien défini. Pour tout x dans E, on dispose de u dans E de norme 1 tel que $x=\|x\|_E\,u$ et il vient $f(x)=\|x\|_E\,f(u)$ et donc $\|f(x)\|_F\leq\|f\|\cdot\|x\|_E$. Par conséquent si $\|f\|=0$, alors $f=0$. Pour λ réel on a, par homogénéité de la norme sur E et positivité de $|\lambda|$, $\|\lambda f\|=|\lambda|\cdot\|f\|$. Enfin si g est dans $\mathscr{L}(E,F)$ et x de norme 1 dans E, par inégalité triangulaire dans F, on a $\|(f+g)(x)\|_F\leq\|f(x)\|_F+\|g(x)\|_F$ et donc $\|(f+g)(x)\|_F\leq\|f\|+\|g\|$, par définition des suprema, et aussi $\|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|$ par passage au supremum. Il en résulte que

$\boxed{\|\cdot\| \text{ est une norme sur } \mathscr{L}(E,F) \text{ et, pour } x \text{ dans } E,\ \|f(x)\|_F\leq\|f\|\cdot\|x\|_E.}$

b) Soit a dans $\mathbf{R}^N$ avec $a=(a_1,\cdots,a_N)$, et λ dans $\mathbf{R}$. On a $\|a\|_p\geq 0$ et, de plus, $\|a\|_p=0$ si et seulement si $\|a\|_p^p=0$ et cette dernière condition exprime qu'une somme de termes tous positifs est nulle. Elle a lieu si et seulement si tous ses termes sont nuls, i.e. $a=0$. Autrement dit $\|\cdot\|_p$ satisfait à l'axiome de séparation. On a également $\|\lambda a\|_p^p=|\lambda|^p\,\|a\|_p^p$ par multiplicativité des fonctions puissances sur $\mathbf{R}_+$ et donc $\|\lambda a\|_p=|\lambda|\cdot\|a\|_p$, i.e. $\|\cdot\|_p$ satisfait à l'axiome d'homogénéité. Enfin elle vérifie aussi l'inégalité triangulaire d'après la question précédente. Par conséquent $\boxed{\ell_N^p \text{ est un espace vectoriel normé.}}$

Le dual de ℓ_N^p est engendré par les applications coordonnées, ce qui revient à dire que c'est l'ensemble des applications $(a_1,\cdots,a_N)\mapsto\displaystyle\sum_{i=1}^N a_ib_i$, avec $(b_i)_{1\leq i\leq N}\in\mathbf{R}^N$. En particulier, par bilinéarité de l'application $(a,b)\mapsto\displaystyle\sum_{i=1}^N a_ib_i$, l'application θ suggérée par l'énoncé est un isomorphisme d'espace vectoriels entre $\mathbf{R}^N$ et son dual. De plus, en appliquant I.3), en échangeant p et q (ce qui est licite car on a $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{p}=1$) et a et b,

$$\|\theta(b)\|=\sup\left\{|\theta(b)(a)|\ \middle|\ \|a\|_p=1\right\}=\|b\|_q$$

et donc θ réalise une isométrie entre le dual de ℓ_N^p muni de la norme subordonnée et ℓ_N^q : $\boxed{(\ell_N^p)^*\simeq\ell_N^q.}$

c) Les espaces ℓ_N^1 et ℓ_N^∞ sont bien des espaces vectoriels normés. De plus, pour $(a_i)_{1\leq i\leq N}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq N}$ dans $\mathbf{R}^N$, on a

$$\left|\sum_{i=1}^N a_i b_i\right| \leq \|a\|_\infty \|b\|_1$$

avec égalité pour $(a_i)_{1\leq i\leq N} = (\operatorname{sgn}(b_i))_{1\leq i\leq N}$, de sorte qu'alors $\|a\|_\infty = 1$ sauf si $b = 0$, d'une part ou $(b_i)_{1\leq i\leq N} = (\delta_{i,i_0})_{1\leq i\leq N}$, avec $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker et i_0 tel que $\|a\|_\infty = |a_{i_0}|$, de sorte que $\|b\|_1 = 1$, d'autre part. Avec le même isomorphisme θ que précédemment entre $\mathbf{R}^N$ et son dual, il vient donc

$$\|\theta(a)\| = \|a\|_\infty \quad \text{et} \quad \|\theta(b)\| = \|b\|_1$$

en considérant à chaque fois la norme de $\theta(\cdot)$ comme la norme subordonnée. Par conséquent $\boxed{\text{le dual de } \ell_N^1 \text{ est isométrique à } \ell_N^\infty \text{ et celui de } \ell_N^\infty \text{ est isométrique à } \ell_N^1.}$

PARTIE II

1. a) Soit u et v dans F. On a, par linéarité, inégalité triangulaire, I.5.a et positivité de $\|f\|$,

$$f(u) + f(v) = f(u+v) \leq \|f\| \cdot \|u+v\| \leq \|f\| \cdot (\|u - x_0\| + \|x_0 + v\|)$$

d'où

$$f(u) - \|f\| \cdot \|u - x_0\| \leq \|f\| \cdot \|v + x_0\| - f(v)\ .$$

Puisque cette inégalité est vraie pour tout u dans F, on peut passer à la borne supérieure en u et il vient

$$\sup_{u\in F} (f(u) - \|f\| \cdot \|u - x_0\|) \leq \|f\| \cdot \|v + x_0\| - f(v)\ .$$

Puisque cette inégalité est vraie pour tout v dans F, on peut passer à la borne inférieure en v et il vient $\boxed{\sup_{u\in F} (f(u) - \|f\| \cdot \|u - x_0\|) \leq \inf_{v\in F} (\|f\| \cdot \|v + x_0\| - f(v)).}$

b) D'après ce qui précède, on dispose de α réel vérifiant

$$\sup_{u\in F} (f(u) - \|f\| \cdot \|u - x_0\|) \leq \alpha \leq \inf_{v\in F} (\|f\| \cdot \|v + x_0\| - f(v))$$

et alors, pour tout v dans F, on a par définition de l'infimum et du supremum,
$\boxed{f(v) - \|f\| \cdot \|v - x_0\| \leq \alpha \text{ et } \alpha \leq \|f\| \cdot \|v + x_0\| - f(v).}$

c) Puisque x_0 n'appartient pas à F, $\tilde{F}$ est somme directe de F et $\mathbf{R}x_0$. Il en résulte $\mathscr{L}(\tilde{F}, \mathbf{R}) \simeq \mathscr{L}(F, \mathbf{R}) \times \mathscr{L}(\mathbf{R}x_0, \mathbf{R})$, l'isomorphisme étant donné par la restriction des formes linéaires. L'isomorphisme réciproque est donné par $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \circ p_F + \psi \circ p_0$, où p_F et p_0 sont les projecteurs associés à la décomposition en somme directe $\tilde{F} = F \oplus \mathbf{R}x_0$. Ici $\tilde{f}$ est la forme linéaire associée au couple $(f, \alpha e_0)$, où e_0 est la forme coordonnée associée à la base (x_0) de $\mathbf{R}x_0$.
La forme linéaire $\tilde{f}$ est de plus continue puisqu'elle est définie sur un espace de dimension finie.
Soit x dans $\tilde{F}$. Si x est dans F, par définition, on a $\tilde{f}(x) = f(x)$ et donc $\left\|\tilde{f}(x)\right\| \leq \|f\| \cdot \|x\|$. Si x n'appartient pas à F, alors on dispose de u dans F et t dans $\mathbf{R}^*$ tels qu'on ait $x = u + t_0$. On pose $v = \dfrac{1}{|t|}u$. La question précédente permet d'écrire $f(\pm v) + \alpha \leq \|f\| \cdot \|\pm v + x_0\|$ et $f(\pm v) - \alpha \leq \|f\| \cdot \|\pm v - x_0\|$, d'où, en notant sgn la fonction signe et en utilisant la positivité de $|t|$,

$$\begin{aligned} \pm \tilde{f}(x) = f(\pm u) \pm t\alpha = |t|\,(f(\pm v) \pm \operatorname{sgn}(t)\alpha) \leq \\ |t| \cdot \|f\| \cdot \|\pm v \pm \operatorname{sgn}(t)x_0\| = |t| \cdot \|f\| \cdot \|v + \operatorname{sgn}(t)x_0\| \leq \|f\| \cdot \|u + tx_0\| = \|f\| \cdot \|x\|\ . \end{aligned}$$

On en déduit $\left|\tilde{f}(x)\right| \leq \|f\| \cdot \|x\|$. Par conséquent $\left\|\tilde{f}\right\| \leq \|f\|$. Comme on a

$$\sup_{\substack{v\in\tilde{F}\\ \|v\|=1}} \left\|\tilde{f}(v)\right\| \geq \sup_{\substack{v\in F\\ \|v\|=1}} \left\|\tilde{f}(v)\right\| \geq \sup_{\substack{v\in F\\ \|v\|=1}} \|f(v)\| = \|f\| ,$$

on en conclut $\left\|\tilde{f}\right\| \geq \|f\|$ et donc

$\boxed{\tilde{f} \text{ est une forme linéaire continue sur } \tilde{F} \text{ dont la restriction à } F \text{ est } f \text{ et } \left\|\tilde{f}\right\| = \|f\|.}$

2. Soit X l'ensemble des entiers naturels n tels qu'il existe un sous-espace vectoriel G de E contenant F et de dimension n, ainsi qu'une forme linéaire continue g sur G dont la restriction à F est f et telle qu'on ait $\|g\| = \|f\|$. Alors X est une partie non vide de $\mathbf{N}$, car $\dim(F) \in X$ puisque (F, f) est un couple vérifiant les hypothèses précédentes.

   De plus X est majoré par $\dim(E)$ et donc X admet un plus grand élément. Si ce n'est pas $\dim(E)$, on dispose de (G, g) vérifiant les hypothèses précédentes et de x_0 dans E n'appartenant pas à G, et alors la question précédente permet de prolonger g, et donc aussi f, à $G \oplus \mathbf{R}x_0$ en préservant la norme de g, qui est aussi celle de f. Cette contradiction assure que le plus élément de X est $\dim(E)$. Comme E est le seul sous-espace de E de dimension $\dim(E)$, il en résulte qu'il existe

   $\boxed{\text{une forme linéaire continue } g \text{ sur } E \text{ dont la restriction à } F \text{ est } f \text{ et telle qu'on ait } \|g\| = \|f\|.}$

3. Si x est nul, sa norme aussi et l'ensemble considéré est réduit à $\{0\}$. Soit x dans E, non nul. On dispose de u dans E, de norme 1, tel que $x = \|x\| u$ et de f dans $(\mathbf{R}x)^*$ la forme coordonnée relativement à la base (u). Par définition de f, on a alors $\|f\| = \max(|f(u)|, |f(-u)|) = 1$ et $f(x) = \|x\|$. La question précédente permet de prolonger f en une forme linéaire continue sur E, de norme 1 et telle qu'on ait $g(x) = f(x) = \|x\|$. Réciproquement si g est une forme linéaire continue sur E, de norme 1, on a $|g(x)| \leq \|g\| \cdot \|x\| = \|x\|$ et on a donc l'égalité $\|x\| = \sup_{\substack{f\in E^*\\ \|f\|=1}} |f(x)|$ dans ce cas là. Il en résulte

   $$\boxed{\|x\| = \sup_{\substack{f\in E^*\\ \|f\|=1}} |f(x)|.}$$

PARTIE III

Pour u et v deux applications linéaires dans $\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{L}(F, G)$ respectivement. Pour x dans E de norme 1, on a, d'après I.5.a, $\|v \circ u(x)\| \leq \|v\| \cdot \|u(x)\| \leq \|v\| \cdot \|u\|$ et donc $\|v \circ u\| \leq \|v\| \cdot \|u\|$, i.e. la norme triple est sous-multiplicative.

1. a) Puisque l'identité est de norme 1, il vient par sous-multiplicativité de la norme triple, pour u dans $\mathrm{GL}(E, F)$, $1 = \left\|u \circ u^{-1}\right\| \leq \|u\| \cdot \left\|u^{-1}\right\|$ et donc, par croissance du logarithme et définition de la borne inférieure, $\boxed{d(E, F) \geq 0.}$

   b) L'application $u \mapsto u^{-1}$ est une bijection de $\mathrm{GL}(E, F)$ sur $\mathrm{GL}(F, E)$. Comme l'expression définissant $d(E, F)$ est symétrique en u et u^{-1}, il en résulte $\boxed{d(E, F) = d(F, E).}$

2. a) Par définition de l'infimum, on dispose d'une suite (u_n) à valeurs dans $\mathrm{GL}(E, F)$ telle que $d(E, F) = \lim \ln\left(\|u_n\| \cdot \left\|u_n^{-1}\right\|\right)$. Pour n dans $\mathbf{N}$ on pose $v_n = \dfrac{1}{\|u_n\|} u_n$, de sorte qu'on a $\|v_n\| = 1$, $v_n^{-1} = \|u_n\| u_n^{-1}$ et donc $\left\|v_n^{-1}\right\| = \|u_n\| \cdot \left\|u_n^{-1}\right\|$. La suite $(\left\|v_n^{-1}\right\|)$ converge donc vers $\exp(d(E, F))$ par continuité de l'exponentielle, et elle est donc bornée. Soit M un majorant de cette suite.

   La suite de terme général (v_n, v_n^{-1}) est à valeurs dans le produit cartésien de la boule unité fermée dans $\mathscr{L}(E, F)$ avec la boule fermée de centre 0 et de rayon M dans $\mathscr{L}(F, E)$. Comme E et F sont de dimension finie, le théorème de HEINE-BOREL permet de conclure ces boules sont compactes.

Par compacité d'un produit de compacts, on dispose donc d'une sous-suite de (v_n, v_n^{-1}) qui converge dans $\mathscr{L}(E,F)\times\mathscr{L}(F,E)$. Quitte à remplacer la suite de départ par une sous-suite on dispose donc de v dans $\mathscr{L}(E,F)$ et de w dans $\mathscr{L}(F,E)$ tels que $v=\lim v_n$ et $w=\lim v_n^{-1}$. Comme, pour tout n dans $\mathbf{N}$, on a $v_n\circ v_n^{-1}=\mathrm{Id}_F$ et $v_n^{-1}\circ v_n=\mathrm{Id}_E$, on a, par passage à la limite et continuité de la composition, $v\in \mathrm{GL}(E,F)$ et $v^{-1}=w$. Toujours par passage à la limite, on a $\|v\|=1$ et $\|w\|=\exp(d(E,F))$, de sorte qu'on a $d(E,F)=\ln\left(\|v\|\cdot\left\|v^{-1}\right\|\right)$, i.e. $\boxed{\text{la borne inférieure est atteinte.}}$

b) Si E et F sont isométriques, alors on dispose de u dans $\mathscr{L}(E,F)$ tel que, pour tout x dans E, $\|u(x)\|=\|x\|$. En particulier $\|u\|=1$ et u est injective. Puisque E et F sont de même dimension finie, u est bijective et sa réciproque est également une isométrie. Il en résulte $\left\|u^{-1}\right\|=1$ et donc $d(E,F)\leq 0$ par définition de l'infimum. On en déduit $d(E,F)=0$ d'après 1.a).

Réciproquement, d'après la question précédente, on dispose de u tel que $\|u\|\cdot\left\|u^{-1}\right\|=1$. On pose alors $v=\dfrac{1}{\|u\|}u$ et il vient $\|v\|=\left\|v^{-1}\right\|=1$. Soit alors x dans E, il vient

$$\|u(x)\|\leq\|x\|=\left\|u^{-1}(u(x))\right\|\leq\|u(x)\|$$

et donc $\|x\|=\|u(x)\|$, i.e. u est une isométrie entre E et F. Par conséquent

$\boxed{E \text{ et } F \text{ sont isométriques si et seulement si } d(E,F)=0.}$

3. Soit u dans $\mathrm{GL}(E,F)$ et v dans $\mathrm{GL}(F,G)$. On pose $w=v\circ u$, de sorte qu'on a $w\in\mathrm{GL}(E,G)$. Il vient aussi $w^{-1}=u^{-1}\circ v^{-1}$ et donc, par sous-multiplicativité de la norme triple

$$\|w\|\cdot\left\|w^{-1}\right\|\leq\|v\|\cdot\|u\|\cdot\left\|u^{-1}\right\|\cdot\left\|v^{-1}\right\|$$

et donc, en choisissant u et v tels que $\|u\|\cdot\left\|u^{-1}\right\|=\exp(d(E,F))$ et $\|v\|\cdot\left\|v^{-1}\right\|=\exp(d(F,G))$ ainsi que le permet 2.a), il vient par croissance du logarithme et définition de l'infimum

$$d(E,G)\leq\ln\left(\|w\|\cdot\left\|w^{-1}\right\|\right)\leq d(E,F)+d(F,G)\ .$$

I.e. $\boxed{d(E,G)\leq d(E,F)+d(F,G).}$

4. a) La composée de deux applications linéaires en étant une, u^* est à valeurs dans E^*. De plus, la composition des fonctions étant linéaire à gauche, $\boxed{u^*\in\mathscr{L}(F^*,E^*).}$

Si A et B sont deux ensembles et f est une fonction à valeurs réelles, on a

$$\sup_{A\times B} f(a,b)=\sup_{a\in A}\left(\sup_{b\in B} f(a,b)\right)=\sup_{b\in B}\left(\sup_{a\in A} f(a,b)\right)$$

puisque le membre de gauche est un majorant de $f(a,b)$ pour tout (a,b) dans $A\times B$, et donc aussi de $\sup_{b\in B} f(a,b)$ pour tout a dans A et de $\sup_{a\in A} f(a,b)$ pour tout b de B, d'une part, et que, par définition du supremum, c'est le plus petit de ces majorants. Par définition de la norme et en utilisant ce qui précède et II.3, il vient

$$\begin{aligned}\|u^*\| &= \sup_{\zeta\in\overline{B}_{F^*}(0,1)}\|\zeta\circ u\|=\sup_{\zeta\in\overline{B}_{F^*}(0,1)}\left(\sup_{x\in\overline{B}_E(0,1)}|\zeta\circ u(x)|\right)\\ &= \sup_{(\zeta,x)\in\overline{B}_{F^*}(0,1)\times\overline{B}_E(0,1)}|\zeta\circ u(x)|\\ &= \sup_{x\in\overline{B}_E(0,1)}\left(\sup_{\zeta\in\overline{B}_{F^*}(0,1)}|\zeta\circ u(x)|\right)=\sup_{x\in\overline{B}_E(0,1)}\|u(x)\|=\|u\|\end{aligned}$$

et on en conclut $\boxed{\|u\|=\|u^*\|}$

b) Soit u dans $\mathrm{GL}(E,F)$, φ dans E^* et ζ dans F^*. On a

$$u^* \circ (u^{-1})^*(\varphi) = \varphi \circ u^{-1} \circ u = \varphi \quad \text{et} \quad (u^{-1})^* \circ u^*(\zeta) = \zeta \circ u \circ u^{-1} = \zeta$$

i.e. u^* est inversible, d'inverse $(u^{-1})^*$.
Par linéarité à droite de la composition des applications linéaires, $u \mapsto u^*$ est une application linéaire de $\mathscr{L}(E,F)$ dans $\mathscr{L}(F^*,E^*)$. D'après la question précédente, c'est une isométrie. Elle est donc injective entre deux espaces de même dimension finie, donc bijective. D'après ce qui précède l'image de $\mathrm{GL}(E,F)$ est incluse dans $\mathrm{GL}(F^*,E^*)$. De plus si u dans $\mathscr{L}(E,F)$ n'est pas injective, on dispose de x non nul dans son noyau. Soit f une forme linéaire sur E qui ne s'annule pas sur x, obtenue par exemple comme en II.3 par prolongement de la forme coordonnée associée à la base (x) de $\mathbf{R}x$. Alors f n'est pas dans l'image de u^* puisque, pour ζ dans F^*, on a $u^*(\zeta)(x) = \zeta(u(x)) = \zeta(0) = 0$. Donc u^* n'est pas surjective. Il en résulte que $u \mapsto u^*$ envoie les applications non bijectives sur de telles applications et donc que c'est une bijection de $\mathrm{GL}(E,F)$ dans $\mathrm{GL}(F^*,E^*)$.
Comme, de plus, pour u dans $\mathrm{GL}(E,F)$, on a $\|u\| = \|u^*\|$ et $\|u^{-1}\| = \|(u^{-1})^*\| = \|(u^*)^{-1}\|$, les ensembles définissant $d(E,F)$ et $d(F^*,E^*)$ se correspondent via $u \mapsto u^*$ et il en résulte $d(E,F) = d(F^*,E^*)$. Par symétrie, i.e. 1.b), on en conclut $\boxed{d(E,F) = d(E^*,F^*).}$

PARTIE IV

1. Soit x_1, …, x_m dans F. On développe la somme de gauche dans l'égalité cherchée par bilinéarité du produit scalaire et il vient

$$\sum_{\varphi\in\omega_n} \left\| \sum_{i=1}^m \varphi(i)x_i \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{\varphi\in\omega_n} \varphi(i)\varphi(j) \langle x_i \,|\, x_j \rangle \ .$$

Soit donc i et j dans $[\![1;m]\!]$. Si $i=j$, alors pour tout φ dans ω_n, on a $\varphi(i)\varphi(j) = \varphi(i)^2 = 1$ et donc $\sum_{\varphi\in\omega_n} \varphi(i)\varphi(j) = \mathrm{Card}(\omega_n) = 2^m$. Si $i \neq j$, on considère pour tout φ dans ω, l'application $\tilde{\varphi}$ définie sur $[\![1;m]\!]$ par $\tilde{\varphi}(k) = \varphi(k)$ si $k \neq j$ et $\tilde{\varphi}(j) = -\varphi(j)$. Alors $\tilde{\varphi} \in \omega_n$ et $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ est une bijection de ω_n dans lui-même. Il en résulte

$$\begin{aligned} \sum_{\varphi\in\omega_n} \varphi(i)\varphi(j) &= \sum_{\varphi\in\omega_n} \tilde{\varphi}(i)\tilde{\varphi}(j) \\ &= -\sum_{\varphi\in\omega_n} \varphi(i)\varphi(j) \end{aligned}$$

et donc cette somme est nulle. On en conclut $\boxed{\sum_{\varphi\in\omega_n} \left\| \sum_{i=1}^m \varphi(i)x_i \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \|x_i\|_2^2.}$

a) Pour i dans $[\![1;n]\!]$, on a $\|u(e_i)\|_2 \leq \|u\|$ et donc, en appliquant la question précédente, il vient

$$A(u) = 2^n \sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|_2^2 \leq n2^n \|u\|^2 \ ,$$

i.e. $\boxed{A(u) \leq n2^n \|u\|^2.}$

b) Puisque $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est la base canonique de $\mathbf{R}^n$, pour tout φ dans ω_n, le vecteur $\displaystyle\sum_{i=1}^n \varphi(i)e_i$ est de norme $\|\cdot\|_p$ égale à $n^{1/p}$ et, puisque u et u^{-1} sont des isométries

$$n^{1/p} = \left\|\sum_{i=1}^n \varphi(i)e_i\right\|_p \leq \left\|u^{-1}\right\| \cdot \left\|u\left(\sum_{i=1}^n \varphi(i)e_i\right)\right\|_2$$

et donc, en élevant au carré et en sommant sur ω_n, puis en utilisant 1), $2^n n^{2/p} \leq \left\|u^{-1}\right\|^2 A(u)$ et donc, puisque $\left\|u^{-1}\right\|^2 > 0$, $\boxed{A(u) \geq 2^n n^{2/p} \left\|u^{-1}\right\|^{-2}.}$

2. On suppose tout d'abord $p < 2$ et on utilise la question précédente. Pour u dans $\mathrm{GL}(E,F)$, on a

$$2^n n^{2/p} \left\|u^{-1}\right\|^{-2} \leq n2^n \left\|u\right\|^2$$

et donc $\dfrac{n^{1/p}}{n^{1/2}} \leq \|u\| \cdot \left\|u^{-1}\right\|$. D'où le résultat cherché en prenant les logarithmes puis l'infimum.
Si $p = 2$, on a $E = F$ et les deux membres de l'égalité sont égaux à 0. Si $p > 2$, en utilisant I.5.a) et III.4.b), il vient $d(\ell_n^p, \ell_n^2) = d(\ell_n^q, \ell_n^2)$ où $q = \dfrac{p}{p-1}$. Comme $q < 2$, ce cas résulte du précédent. Par conséquent $\boxed{d(\ell_n^p, \ell_n^2) \geq \left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}\right| \ln(n).}$

3. a) Soit x dans $\mathbf{R}^n$. On dispose de u dans $\mathbf{R}^n$ tel que $\|u\|_p = 1$ et $x = \|x\|_p u$. On écrit $u = (u_i)_{1\leq i\leq n}$. Puisque $\|u\|_p = 1$, pour $1 \leq i \leq n$, on a $|u_i| \leq 1$ de sorte qu'on a aussi $|u_i|^{p'} \leq |u_i|^p$ et donc $\|u\|_{p'}^{p'} \leq \|u\|_p^p = 1$, d'où $\|u\|_{p'} \leq 1$. Comme $\|x\|_{p'} = \|x\|_p \|u\|_{p'}$, il en résulte $\boxed{\|x\|_{p'} \leq \|x\|_p.}$

b) On suppose tout d'abord $p < 2$. Soit Id dans $\mathrm{GL}(E,F)$. Alors, d'après ce qui précède, $\|\mathrm{Id}\| \leq 1$. Soit alors x dans $\mathbf{R}^n$ donné par $x = (x_i)_{1\leq i\leq n}$. Puisqu'on a $1 < \dfrac{2}{p}$, on peut appliquer I.2) et il vient

$$\|x\|_p^p \leq \|x\|_2^{p/2} n^{1-p/2}$$

en posant $a_i = |x_i|^p$ et $b_i = 1$ et pour les exposants $2/p$ et $2/(2-p)$. Il en résulte $\left\|\mathrm{Id}^{-1}\right\| \leq n^{1/p-1/2}$ et donc, en combinant les deux majorations $\|\mathrm{Id}\| \cdot \left\|\mathrm{Id}^{-1}\right\| \leq n^{1/p-1/2}$. En passant à l'infimum il vient $d(\ell_n^p, \ell_n^2) \leq \left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}\right| \ln(n)$, d'où l'égalité d'après la question 3).
Si $p = 2$, les deux membres de l'égalité à démontrer sont nuls. Si $p > 2$, on utilise encore un argument de dualité. Dans tous les cas il vient $\boxed{d(\ell_n^p, \ell_n^2) = \left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}\right| \ln(n).}$

c) Par dualité, on a $d(\ell_n^\infty, \ell_n^2) = d(\ell_n^1, \ell_n^2)$ et donc $\boxed{d(\ell_n^\infty, \ell_n^2) = \dfrac{1}{2}\ln(n).}$

PARTIE V

1. Puisque E est de dimension finie, S_E est une partie compacte et donc S_E^n l'est aussi en tant que produit de compacts. Comme Λ est multilinéaire, elle est continue et elle est donc bornée sur S_E^n et y atteint son maximum. Comme Λ n'est pas nulle, ce maximum est non nul et comme S_E est invariant par passage à l'opposé, ce maximum est aussi le maximum de $|\Lambda|$. On dispose donc de $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ dans S_E^n tel que, pour tout $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ dans S_E^n, on ait $|\Lambda(x_1, \cdots, x_n)| \leq \Lambda(b_1, \cdots, b_n)$.

On pose alors, pour x dans E et $1 \leq i \leq n$,

$$\varphi_i(x) = \frac{\Lambda(b_1, \cdots, b_{i-1}, x, b_{i+1}, b_n)}{\Lambda(b_1, \cdots, b_n)}$$

de sorte que $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ est la base duale de $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ et $\|\varphi_i\| \leq 1$ par définition du maximum de Λ. On a en fait égalité puisque $\varphi_i(b_i) = 1$ et donc il existe une base unitaire de E dont la base duale est aussi unitaire, i.e.

$\boxed{\text{il existe } n \text{ vecteurs unitaires } (b_i)_{1\leq i\leq n} \text{ de } E \text{ et } n \text{ formes linéaires unitaires } (\varphi_i)_{1\leq i\leq n} \text{ de } E^* \text{ de sorte qu'on ait, pour } 1 \leq i,j \leq n,\ \varphi_i(b_j) = \varepsilon_{i,j}.}$

2. Soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ dans $\mathbf{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = 0$. Alors, par application de φ_i, on a $\lambda_i = 0$ et donc la famille $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base puisqu'elle est de cardinal n et est libre. La famille $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ est donc une base de E^* (duale de la précédente) et ν est la norme 1 associée à cette base. En particulier $\boxed{\nu \text{ est une norme sur } E.}$
De plus l'application $x \mapsto (\varphi_i(x))_{1\leq i\leq n}$ est une isométrie de E_1 sur ℓ_n^1. En particulier
$\boxed{E_1 \text{ et } \ell_n^1 \text{ sont isométriques.}}$

3. Par définition, pour x dans E, on a $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) b_i$ et il vient

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(x)| \, \|b_i\| = \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(x)| = \nu(x)$$

et

$$\nu(x) = \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i\| \cdot \|x\| = n \, \|x\|$$

d'où $d(E, E_1) \leq \ln\left(\|\mathrm{Id}\| \cdot \left\|\mathrm{Id}^{-1}\right\|\right) \leq \ln(n)$. Il résulte de III.3) et de la question précédente, $d(E, \ell_n^1) \leq d(E, E_1) + d(E_1, \ell_n^1) \leq \ln(n) + 0$ et donc $\boxed{d(E, \ell_n^1) \leq \ln(n).}$

PARTIE VI

1. L'identité étant une isométrie d'un espace vectoriel normé sur lui-même, la relation $\mathcal{R}$ est réflexive. La réciproque d'une isométrie en étant une, la relation $\mathcal{R}$ est symétrique. Enfin la composée de deux isométries en étant une, cette relation est aussi transitive et donc $\boxed{\mathcal{R} \text{ est une relation d'équivalence.}}$
Si X et X' sont isométriques, de même que Y et Y', alors par III.3) et III.2.b), il vient $d(X', Y') \leq d(X', X) + d(X, Y) + d(Y, Y') = d(X, Y)$ et donc, en renversant les rôles, $d(X, Y) \leq d(X', Y')$, soit $d(X, Y) = d(X', Y')$, i.e. la notation $\boxed{\hat{d}(\hat{X}, \hat{Y}) \text{ est cohérente.}}$

2. a) Puisque tout élément de Φ_n est la restriction à B_1 d'une norme majorée par la norme 1, tous ses éléments sont de norme inférieure à 1. Soit maintenant (f_k) une suite de points de Φ_n convergeant dans $C(B_1)$. On note f sa limite.
Par passage à la limite, pour x dans B_1, il vient immédiatement $f(x) \leq \|x\|_1$ et $\|x\|_1 \leq nf(x)$. Pour x quelconque, on pose $N(x) = \|x\|_1 f(u)$ si $x = \|x\|_1 u$ avec $\|u\|_1 = 1$. Par passage à la limite N est la limite simple des normes associées à (f_k) et donc c'est une norme. Il en résulte $f \in \Phi_n$ et donc $\boxed{\Phi_n \text{ est fermé et borné.}}$

b) Tout élément de Φ_n étant la restriction d'une norme, il est 1-lipschitzien par rapport à cette norme et donc aussi par rapport à $\|\cdot\|_1$ par définition de Φ_n. Il en résulte que pour tout ε dans $\mathbf{R}_+^*$, en posant $\delta = \varepsilon$, on a pour tous x et y dans B_1,
$\boxed{\|x - y\|_1 \leq \delta \Rightarrow \sup_{f\in\Phi_n} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.}$

3. a) Comme précédemment, si f appartient à Φ_n la norme qui lui est associé est donnée par $N(x) = \|x\|_1 f(u)$ si $x = \|x\|_1 u$ avec $\|u\|_1 = 1$. Il en résulte que $\boxed{\tau \text{ est bien définie.}}$
Si on se donne une norme N sur $\mathbf{R}^n$ alors, par équivalence des normes, on dispose de a et b dans $\mathbf{R}_+^*$ tels que $aN \leq \|\cdot\|_1 \leq bN$. En posant $N' = aN$, alors $(\mathbf{R}^n, N)$ et $(\mathbf{R}^n, N')$ sont isométriques car l'homothétie de rapport a est une isométrie. On peut donc supposer $a = 1$. Le résultat de V.3 montre alors qu'on peut choisir $b \leq n$. La restriction de N' à B_1 est donc un antécédent de la classe de $(\mathbf{R}^n, N)$. Par conséquent $\boxed{\tau \text{ est surjective.}}$

b) On associe à la suite (f_j), la suite de normes (N_j) et on pose E_j l'espace $\mathbf{R}^n$ muni de la norme N_j. De même on note N la norme associée à f et E l'espace vectoriel normé $(\mathbf{R}^n, N)$. On étudie l'identité de E dans E_j. Alors
$$\|\mathrm{Id}\| = \sup_{x\in B_1} \frac{f_j(x)}{f(x)}$$
et cette norme est atteinte. On dispose donc de x_j dans B_1 tel que $\|\mathrm{Id}\| = \dfrac{f_j(x_j)}{f(x_j)}$. De même on dispose de y_j dans B_1 tel que $\left\|\mathrm{Id}^{-1}\right\| = \dfrac{f(y_j)}{f_j(y_j)}$.
Par compacité de B_1, en posant $a = \inf_{B_1} f$, on a $a > 0$. Pour j assez grand, on a $N_\infty(f - f_j) < a/2$ et donc $\inf_{B_1} f_j \geq \dfrac{a}{2}$. Par compacité, pour j plus petit que le rang trouvé précédemment, f_j atteint un minimum strictement positif sur B_1 et donc en posant $b = \inf_j \inf_{B_1} f_j$, on a $b > 0$.
Soit alors ε dans $\mathbf{R}_+^*$. Pour j assez grand on a $N_\infty(f_j - f) \leq \varepsilon$ et donc $N_\infty\left(\dfrac{f_j}{f} - 1\right) \leq a\varepsilon$. De même $N_\infty\left(\dfrac{f}{f_j} - 1\right) \leq b\varepsilon$ et il en résulte
$$\|\mathrm{Id}\| \cdot \left\|\mathrm{Id}^{-1}\right\| \leq (1 + a\varepsilon)(1 + b\varepsilon)$$
et donc, par continuité du logarithme en 1, $d(E, E_j) \to 0$. Autrement dit
$\boxed{\lim \hat{d}(\tau(f_j), \tau(f)) = 0.}$

4. D'après ce qui précède τ est continue et donc l'image du compact Φ_n est un compact. L'application $\hat{d}$ étant une distance, on en déduit que $\boxed{(\hat{\mathcal{E}}_n, \hat{d}) \text{ est un espace métrique compact.}}$