Lycée Lesage MPI/MPI*

MATHÉMATIQUES

DEVOIR EN TEMPS LIBRE 2

28 septembre 2023 – À rendre pour le 12 octobre 2023

ENSAE 1996 - MP - Deuxième composition
Partie II obligatoire

Merci d'indiquer sur chacune des copies (de préférence doubles) : le nom de la personne ayant rédigé, celui de son binôme éventuel et enfin celui de la personne ayant corrigé.

Chaque membre d'un binôme doit rendre une copie séparée, afin de faciliter la correction.

Deuxième composition
ENSAE 1996 – MP

Dans tout le problème $\mathbf{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels. On note $\mathbf{R}^n$ l'ensemble des vecteurs $(x_1,\ldots,x_n)$ à coordonnées réelles.
Pour x et y dans $\mathbf{R}^n$, $\langle x\,|\,y\rangle$ désigne le produit scalaire canonique de x et de y, c'est-à-dire que l'on a $\langle x\,|\,y\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i y_i$. De même, $\|x\|$ désigne la norme euclidienne de x, c'est-à-dire que l'on a $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2$.
On note $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, l'ensemble des matrices carrées de dimension n à coefficients réels.
Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, avec $A=(a_{i,j})$, est dite bistochastique si, pour tout couple (i,j) d'éléments de $[\![1;n]\!]$, on a $a_{i,j}\geq 0$, $\displaystyle\sum_{h=1}^n a_{i,h} = \sum_{h=1}^n a_{h,j} = 1$.
On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices bistochastiques de dimension n.
Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est dite de permutation si elle est bistochastique et si tous ses coefficients sont égaux à zéro ou un.
Pour tout couple de réels (i,j), on note $\delta_{i,j}$ la quantité égale à 1 si $i=j$ et 0 sinon. Par ailleurs, on note e le vecteur de $\mathbf{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1.
Pour m entier, soit

$$\mathcal{S}_m = \left\{ \lambda \in \mathbf{R}^m \;\middle|\; \forall i \in [\![1;m]\!]\ ,\ \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}\ .$$

On rappelle que $K\subset \mathbf{R}^n$ est dit convexe si pour tout entier m, tout $\lambda\in\mathcal{S}_m$, et toute famille $(x^i)_{1\leq i\leq m}$ d'éléments de K, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^m \lambda_i x^i \in K$. Par ailleurs, si L est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$, on appelle enveloppe convexe de L, notée $co(L)$, l'intersection de toutes les parties convexes de $\mathbf{R}^n$ contenant L et on a $co(L) = \left\{ \displaystyle\sum_{i=1}^m \lambda_i x^i \;\middle|\; m\in\mathbf{N}, (x^i)\in L^m \text{ et } \lambda\in\mathcal{S}_m \right\}$.
La partie II est indépendante de la partie I et la partie IV des parties II et III.

PARTIE I - Préliminaires

1) Montrer que si A est une matrice de permutation de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, avec $A=(a_{i,j})$, alors il existe une permutation σ de $[\![1;n]\!]$ telle que pour tout couple (i,j) d'éléments de $[\![1;n]\!]$ on a $a_{i,j} = \delta_{\sigma(i),j}$.
2) Montrer que si A est une matrice de permutation alors A a un déterminant égal à 1 ou à -1. Déterminer l'inverse de A.
3) Montrer que le produit de deux matrices bistochastiques est une matrice bistochastique.
4) Montrer que si A est une matrice bistochastique et a un vecteur ligne de A alors $\|a\|\leq 1$ et que l'égalité n'est obtenue que si a est un vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^n$.
5) En déduire que les seules matrices bistochastiques d'inverse bistochastique sont les matrices de permutation.

PARTIE II - Polyèdres convexes

Un demi-espace de $\mathbf{R}^n$ est un sous-ensemble X pour lequel il existe x dans $\mathbf{R}^n$ non nul et α dans $\mathbf{R}$ tels que $X = \{y\in\mathbf{R}^n \mid \langle x\,|\,y\rangle \leq \alpha\}$.
On dit qu'un sous-ensemble K de $\mathbf{R}^n$ est un polyèdre convexe si K est borné et si K est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces.
On appelle dimension d'un polyèdre convexe K la dimension de l'espace affine qu'il engendre, c'est-à-dire la dimension de l'espace vectoriel engendré par $\left\{x-y \;\middle|\; (x,y)\in K^2\right\}$.
On dit que x est un sommet du polyèdre convexe K si $x\in K$ et si pour tout couple (y,z) d'éléments de K et tout $\lambda\in\,]0;1[$, $x=\lambda y+(1-\lambda)z$ entraîne $y=z=x$.

1) Montrer que $\mathcal{S}_n$ est un polyèdre convexe de $\mathbf{R}^n$. Déterminer sa dimension et ses sommets.

2) Soit K un polyèdre convexe de $\mathbf{R}^n$. On dit qu'une partie H de $\mathbf{R}^n$ est un hyperplan d'appui de K s'il existe x dans $\mathbf{R}^n$ non nul et α dans $\mathbf{R}$ tel que $H = \{y \in \mathbf{R}^n \mid \langle x \mid y \rangle = \alpha\}$, $H \cap K \neq \emptyset$ et $K \cap \{y \in \mathbf{R}^n \mid \langle x \mid y \rangle > \alpha\} = \emptyset$. Soit H un hyperplan d'appui de K, montrer que $H \cap K$ est un polyèdre convexe et que l'ensemble des sommets de $H \cap K$ est égal à l'ensemble des sommets de K appartenant à H.

3) Soit k un point de la frontière de K, polyèdre convexe de $\mathbf{R}^n$; montrer qu'il existe un hyperplan d'appui de K contenant k.

4) Montrer que K, polyèdre convexe de $\mathbf{R}^n$, est égal à l'enveloppe convexe de sa frontière.

5) En déduire, par récurrence sur n, que tout polyèdre convexe est l'enveloppe convexe de ses sommets.

PARTIE III - L'ensemble $\mathcal{B}_n$ des matrices bistochastiques de dimension n

1) Montrer que $\mathcal{B}_n$ est un polyèdre convexe de dimension au plus $(n-1)^2$.

2) Montrer, par récurrence sur n, que l'ensemble des sommets de $\mathcal{B}_n$, est égal à l'ensemble des matrices de permutation. (On pourra commencer par montrer que si S est un sommet de $\mathcal{B}_n$, avec $S = (s_{i,j})$, alors il existe un couple (i,j) d'éléments de $[\![1;n]\!]$ tel que pour tout k de $[\![1;n]\!]$ on a $s_{i,k} = \delta_{k,j}$.)

3) Soit d un entier. Montrer que si $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i$ avec $(x, x^1, \ldots, x^m) \in (\mathbf{R}^d)^{m+1}$ et $\lambda \in \mathcal{S}_m$, alors il existe $\mu \in \mathcal{S}_{d+1}$ et $(y^1, \ldots, y^{d+1}) \in (\mathbf{R}^d)^{d+1}$ avec $\{y^1, \ldots, y^{d+1}\} \subset \{x^1, \ldots, x^m\}$ tels que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{d+1} \mu_i y^i$.

4) En déduire que toute matrice A de $\mathcal{B}_n$ se décompose sous la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i$ avec $\lambda \in \mathcal{S}_m$, $m \leq (n-1)^2+1$ et où les A_i sont des matrices de permutation.

PARTIE IV - Orbite d'un vecteur x de $\mathbf{R}^n$

1) Soit x dans $\mathbf{R}^n$ et deux entiers i et j de $[\![1;n]\!]$ tels que $x_1 \leq \cdots \leq x_i \leq \cdots \leq x_j \leq \cdots \leq x_n$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $y \in \mathbf{R}^n$ tels que $y_i = x_i + \varepsilon \leq x_j$, $y_j = x_j - \varepsilon \geq x_i$ et $y_k = x_k$ pour tout k différent de i et de j. Montrer qu'il existe $A_\varepsilon^{i,j}$ dans $\mathcal{B}_n$ tel que $y = A_\varepsilon^{i,j} x$.

2) On rappelle qu'une fonction φ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est dite convexe si pour tout entier m, tout t dans $\mathbf{R}^m$ et tout λ dans $\mathcal{S}_m$, on a $\varphi\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i t_i\right) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi(t_i)$. Soit x et y dans $\mathbf{R}^n$ et A dans $\mathcal{B}_n$ tels que $y = Ax$; montrer que pour toute fonction convexe φ on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \varphi(y_i)$.

3) Supposons, à présent, que x et y sont deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$ tels que $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ et $y_1 \leq \cdots \leq y_n$ et tels que pour toute fonction convexe φ on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \varphi(y_i)$. Montrer que l'on a alors, pour tout $k < n$, $x_1 + \cdots + x_k \leq y_1 + \cdots + y_k$ et $x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_n$.
Lorsque deux vecteurs x et y vérifient ces dernières relations on dit que y domine x.

4) Soit x et y deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$ tels que $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ et $y_1 \leq \cdots \leq y_n$. L'objet de cette question est de démontrer, par récurrence sur n, la propriété (P) suivante :

(P) Si y domine x alors il existe A dans $\mathcal{B}_n$ tel que $y = Ax$.

On notera $a = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

a) Vérifier la propriété (P) pour $n = 1$ ainsi que dans le cas général si $x_1 = a$ ou $x_n = a$.

b) On suppose, à présent, qu'on a $x_1 < a < x_n$ et que la propriété (P) est démontrée pour tout entier strictement plus petit que n. Montrer que s'il existe $k < n$ tel que $x_1 + \cdots + x_k = y_1 + \cdots + y_k$, alors il existe A_k dans $\mathcal{B}_k$ et A_{n-k} dans $\mathcal{B}_{n-k}$ tels que $y^{(k)} = A_k x^{(k)}$ et $y^{(n-k)} = A_{n-k} x^{(n-k)}$ où $x^{(k)}$ désigne le vecteur $(x_1, \ldots, x_k)$ et $x^{(n-k)}$ le vecteur $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ (idem pour y). Conclure dans ce cas.

c) On suppose à présent que toutes les inégalités sont strictes (c'est à dire qu'on a $x_1 + \cdots + x_k < y_1 + \cdots + y_k$ pour $1 \leq k \leq n-1$ et $x_1 < a < x_n$). Soit i l'indice de la plus grande coordonnée de x inférieure strictement à a et j l'indice de la plus petite coordonnée de x strictement supérieure à a. Soit ε le plus grand réel tel que $A_\varepsilon^{i,j} x$ est dominé par y. Montrer que la propriété (P) est vraie si $\varepsilon \leq \min\{(a - x_i), (x_j - a)\}$ (on remarquera que, dans ce cas, $A_\varepsilon^{i,j} x$ sature au moins l'une des inégalités).

d) Dans le cas contraire (c'est à dire si $\varepsilon > \min\{(a - x_i), (x_j - a)\}$), montrer qu'il suffit alors de vérifier la propriété (P) pour un vecteur x' bien choisi ayant strictement plus de coordonnées égales à a que x. Conclure.

5) On note $\mathcal{I}_k$ l'ensemble des sous ensembles I de $[\![1; n]\!]$ à k éléments. Soit x et y dans $\mathbf{R}^n$. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe A dans $\mathcal{B}_n$ tel que $y = Ax$ est donnée par $\min_{I \in \mathcal{I}_k} \sum_{i \in I} x_i \leq \min_{I \in \mathcal{I}_k} \sum_{i \in I} y_i$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$.

Deuxième composition – ENSAE 1996 – MP

PARTIE I - Préliminaires

1) Soit A une matrice de permutation de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et i dans $[\![1;n]\!]$. Puisque les coefficients de A sont égaux à 0 ou 1, on a $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = |\{j \in [\![1;n]\!] \,|\, a_{i,j} \neq 0\}|$ et donc, puisque A est bistochastique, ce dernier ensemble est de cardinal 1. On note $\sigma(i)$ son unique élément et on a donc, pour j dans $[\![1;n]\!]$, on a $a_{i,j} = \delta_{\sigma(i),j}$. Par construction σ est une application de $[\![1;n]\!]$ dans lui-même. De plus, pour i dans $[\![1;n]\!]$, on a $\sum_{i'=1}^{n} a_{i';\sigma(i)} = 1$, puisque A est bistochastique, et donc $\sum_{i'=1}^{n} \delta_{\sigma(i');\sigma(i)} = 1$. Autrement dit $\sigma^{-1}(\sigma(i))$ est de cardinal 1, ce qui signifie que σ est injective. Comme c'est une application entre deux ensembles de même cardinal et que ce cardinal est fini, σ est bijective, i.e. est une permutation. Par conséquent $\boxed{\sigma \in S_n \text{ et, pour } 1 \leq i,j \leq n,\ a_{i,j} = \delta_{\sigma(i),j}.}$

2) D'après ce qui précède, si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est la base canonique de $\mathbf{R}^n$, on a $Ae_{\sigma(i)} = e_i$, pour $i \in [\![1;n]\!]$. Il en résulte $\det(A) = \det(e_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, e_{\sigma^{-1}(n)})$. Puisque le déterminant est alterné, en permutant avec σ les vecteurs du déterminant, on multiplie le déterminant par la signature de σ. Il en résulte $\det(A) = \varepsilon(\sigma)\det(e_1, \ldots, e_n) = \varepsilon(\sigma)$, en notant ε l'application signature sur S_n. En particulier A est inversible et on a $\boxed{\det(A) = \pm 1.}$

De plus l'application inverse de A envoie e_i sur $e_{\sigma(i)}$, d'après la remarque faite ci-dessus et donc, par linéarité, $A^{-1}e_{\sigma^{-1}(i)} = e_i$. Autrement dit

$\boxed{A^{-1} \text{ est la matrice de permutation associée à } \sigma^{-1}.}$

De plus, en notant, $(b_{i,j})$ les coefficients de A^{-1}, on a $b_{i;j} = \delta_{\sigma^{-1}(i),j}$ ou encore $b_{i,j} = \delta_{i;\sigma(j)} = \delta_{\sigma(j),i} = a_{j,i}$. Par conséquent $\boxed{A^{-1} = A^{\mathrm{T}}.}$

3) Par définition A est bistochastique si et seulement si A est une matrice à coefficients positifs telle que $Ae = e$ et $A^{\mathrm{T}}e = e$. Soit maintenant A et B deux matrices bistochastiques et C leur produit. On a $Ce = A(Be) = Ae = e$ et $C^{\mathrm{T}}e = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}e = B^{\mathrm{T}}e = e$ et les coefficients de C sont obtenus comme sommes de produits de coefficients de A et B. Comme $\mathbf{R}_+$ est stable par addition et produit, C est à coefficients positifs et donc $\boxed{AB \text{ est bistochastique.}}$

4) Soit a un élément de $\mathcal{S}_n$. On note $a = (x_i)_{1\leq i\leq n}$. Comme les réels (x_i) sont positifs de somme 1, ils sont tous dans $[0;1]$. En particulier on a

$$0 \leq \|a\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

et donc, par croissance de la racine carrée, $\|a\| \leq 1$. Soit maintenant A une matrice bistochastique et a un vecteur ligne de A. Par définition de $\mathcal{B}_n$, $a \in \mathcal{S}_n$ et donc $\boxed{\|a\| \leq 1.}$

De plus il n'y a égalité dans l'inégalité précédente que si, pour tout i dans $[\![1;n]\!]$, $x_i = x_i^2$, i.e. $x_i \in \{0;1\}$. Comme $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, a a exactement une coordonnée non nulle et elle est égale à 1. Autrement dit a est un vecteur de la base canonique.

$\boxed{\text{l'égalité n'a lieu que si } a \text{ est un vecteur de la base canonique.}}$

5) Soit A une matrice bistochastique inversible, d'inverse bistochastique, et a un vecteur ligne de A. Soit b le vecteur colonne de même indice dans B. Puisque B^{T} est également bistochastique, la question précédente montre que b est de norme inférieure à 1. Puisque AB est l'identité, on a $\langle a \,|\, b\rangle = 1$. Or, par inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\langle a \,|\, b\rangle \leq \|a\|\,\|b\| \leq \|a\|$. Il en résulte $\|a\| \geq 1$ puis, d'après ce qui précède, $\|a\| = 1$ et tous les coefficients de a sont égaux à 0 ou 1 ; A est donc une matrice de

permutation. D'après la question 2), si A est une matrice de permutation, son inverse est sa transposée et est donc également bistochastique. Par conséquent les seules matrices bistochastiques inversibles d'inverse bistochastique sont les $\boxed{\text{matrices de permutation.}}$

PARTIE II - Polyèdres convexes

1) D'après le résultat démontré en question I.4), $\mathcal{S}_n$ est inclus dans la boule unité et donc est borné. De plus, en notant $X_{x,\alpha}$ le demi-espace donné par $X_{x,\alpha} = \{y \in \mathbf{R}^n \,|\, \langle x \,|\, y\rangle \leq \alpha\}$, on a

$$\mathcal{S}_n = X_{e,1} \cap X_{-e,-1} \cap X_{-e_1,0} \cap X_{-e_2,0} \cdots \cap X_{-e_n,0}$$

et donc $\boxed{\mathcal{S}_n \text{ est un polyèdre convexe.}}$

On note $X = \{x - y \,|\, (x, y) \in \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n\}$. Comme $\mathcal{S}_n$ contient les vecteurs de la base canonique, X contient la famille libre $(e_1 - e_n, \ldots, e_{n-1} - e_n)$ et donc l'espace vectoriel engendré par X est de dimension supérieure à $n - 1$. De plus, pour tout x dans X, on a $\langle e \,|\, x\rangle = 0$ et donc X est inclus dans le noyau de la forme linéaire non nulle $x \mapsto \langle e \,|\, x\rangle$, donc dans un hyperplan. Il en résulte que $\boxed{\text{la dimension de } \mathcal{S}_n \text{ est égale à } n - 1.}$

Par définition de $\mathcal{S}_n$ ses éléments sont barycentres à coefficients positifs des éléments de la base canonique. Plus précisément, soit y et z dans $\mathcal{S}_n$, avec $y = (y_i)_{1\leq i\leq n}$ et $z = (z_i)_{1\leq i\leq n}$, et t dans $]0; 1[$. Si y n'est pas un vecteur de la base canonique, on dispose de j dans $[\![1; n]\!]$ avec $0 < y_j < 1$. Alors $y = y_j e_j + (1 - y_j)u$ avec $u = \dfrac{1}{1 - y_j}(y - y_j e_j)$, ce qui est licite puisque $1 - y_j$ est non nul. Les coordonnées de u sont soit nulles, soit égales à celle de y et donc sont toutes positives. La somme des coefficients de $y - y_j e_j$ est égale à $1 - y_j$ par linéarité et donc celle de coefficients de u est égale à 1. L'expression précédente montre donc que y n'est pas un sommet de $\mathcal{S}_n$. Si $ty + (1 - t)z$ est égal à e_i pour $1 \leq i \leq n$, alors pour j distinct de i dans $[\![1; n]\!]$, $ty_j + (1 - t)z_j = 0$. Comme tous les termes sont positifs, on en déduit $ty_j = (1-t)z_j = 0$ et donc $y_j = z_j = 0$ puisque t et $1-t$ sont strictement positifs. Il en résulte que y et z sont des multiples de e_i, donc égaux à e_i de par la somme de leurs coefficients. On en déduit que $\boxed{\text{les sommets de } \mathcal{S}_n \text{ sont les vecteurs de la base canonique.}}$

2) Puisque K est borné, $H \cap K$ l'est aussi et puisque K est intersection de demi-espaces, $H \cap K$ aussi, et donc $H \cap K$ est un polyèdre convexe et on peut parler de ses sommets.

Si a est un sommet de K appartenant à H, alors il n'est combinaison convexe non triviale d'aucun couple de points de points distincts de K et donc aussi a fortiori de couples de points distincts de $K\cap H$. C'est donc un sommet de $K\cap H$. Soit maintenant a un sommet de $K\cap H$, y et z dans K et t dans $]0; 1[$ tels que $a = ty+(1-t)z$. L'application φ donnée par $\varphi(u) = \alpha-\langle x \,|\, u\rangle$ envoie K dans $\mathbf{R}_+$ par hypothèse sur H. Or on a $\varphi(a) = t\varphi(y) + (1-t)\varphi(z)$ par linéarité du produit scalaire et puisqu'on a affaire à une combinaison barycentrique. Une somme de réels positifs étant nulle si et seulement si ces réels sont nuls, on en déduit $t\varphi(y) = (1-t)\varphi(z) = 0$ et donc $\varphi(y) = \varphi(z) = 0$ puisque $0 < t < 1$, et donc que y et z appartiennent à $K\cap H$. Par conséquent $y = z = a$ par définition des sommets de $K\cap H$, et donc a est un sommet de K. On en déduit que $\boxed{\text{les sommets de } K \cap H \text{ sont les sommets de } K \text{ appartenant à } H.}$

3) Soit k dans K et $((x_i, \alpha_i))_{1\leq i\leq m}$ une famille de couples formés d'un vecteur non nul de $\mathbf{R}^n$ et d'un réel telle que K soit égal à $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{m} X_{x_i,\alpha_i}$. Si pour tout i dans $[\![1; m]\!]$ on a $\langle x_i \,|\, k\rangle < \alpha_i$, alors on pose $\alpha = \displaystyle\min_{1\leq i\leq m} (\alpha_i - \langle x_i \,|\, k\rangle)$ et $r = \displaystyle\min_{1\leq i\leq m} \frac{\alpha}{\|x_i\|}$. Alors on a $\alpha > 0$ et $r > 0$. Pour u dans $B(k, r)$ et i dans $[\![1; m]\!]$ on a, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\langle x_i \,|\, u\rangle = \langle x_i \,|\, k\rangle + \langle x_i \,|\, u - k\rangle \leq \langle x_i \,|\, k\rangle + r \,\|x_i\| \leq \alpha_i - \alpha + \alpha = \alpha_i$$

et donc $B(k,r) \subset K$ et $k \in \mathring{K}$. Si donc k appartient à la frontière de K, on dispose de i dans $[\![1;m]\!]$ tel que $\langle x_i \,|\, k\rangle = \alpha_i$, ce qui montre que k appartient à l'hyperplan d'appui $\{y \in \mathbf{R}^n \,|\, \langle x_i \,|\, y\rangle = \alpha_i\}$. Donc $\boxed{\text{tout point frontière de } K \text{ appartient à un hyperplan d'appui de } K.}$

4) Soit k dans $\mathring{K}$ et u un vecteur unitaire. Pour t réel on pose $k_t = k + tu$ et on considère l'ensemble X donné par $X = \{t \in \mathbf{R} \,|\, k_t \in K\}$. Pour t réel on a, par inégalité triangulaire $|t| - \|k\| \leq \|k_t\| \leq \|k\| + |t|$. La première partie de l'inégalité, jointe au fait que K est borné, montre que X l'est aussi. La seconde, jointe au fait que k est intérieur à K montre que 0 est intérieur à X. En particulier X est non vide et on peut poser de $\alpha = \inf X$ et $\beta = \sup X$. De plus $\alpha < 0 < \beta$ et, si (x_n) est une suite de points de X tendant vers α ou β, alors k_{x_n} est une suite convergente de points de K, tendant vers k_α ou k_β. Or K est une intersection de fermés, donc il est fermé et donc α et β appartiennent à X. De plus pour $t > \beta$ ou $t < \alpha$, on a $k_t \notin K$ et donc k_α et k_β ne sont pas intérieurs à K. Il en résulte qu'ils appartiennent à la frontière de K. Enfin on a $k = \dfrac{\beta}{\beta-\alpha}k_\alpha - \dfrac{\alpha}{\beta-\alpha}k_\beta$ avec $0 < \dfrac{\beta}{\beta-\alpha} < 1$ (puisque $\alpha < 0 < \beta$) et $\dfrac{\beta}{\beta-\alpha} - \dfrac{\alpha}{\beta-\alpha} = 1$, et donc k appartient à l'enveloppe convexe de la frontière de K.

Si k appartient à K mais pas à $\mathring{K}$, alors il appartient à la frontière de K et donc aussi à l'enveloppe convexe d'icelle. Il en résulte $K \subset co(\mathrm{Fr}(K))$. Réciproquement K est un convexe contenant $\overline{K}$, puisque K est fermé, et donc a fortiori $\mathrm{Fr}(K)$. Par définition de l'enveloppe convexe, on a donc $co(\mathrm{Fr}(K)) \subset K$. Par conséquent $\boxed{K \text{ est l'enveloppe convexe de sa frontière.}}$

5) Pour m dans $[\![0;n]\!]$, on pose le prédicat suivant, noté $\mathbf{H}_m$: tout polyèdre convexe (non vide) de dimension inférieure à m est enveloppe convexe de ses sommets. Pour $m = 0$, un polyèdre convexe non vide de dimension inférieure à 0 est un point et il est égal à l'ensemble de ses sommets et donc aussi à l'enveloppe convexe d'iceux.

Soit maintenant m dans $[\![0;n-1]\!]$ tel que $\mathbf{H}_m$ soit vrai et soit K un convexe non vide de dimension $m+1$. Soit k un point de K. Par définition de la dimension de K, on dispose de E espace vectoriel de dimension $m+1$ tel que l'application $\tau : x \mapsto x - k$ envoie K dans E. On note $K' = \tau(K)$. Alors K' est borné puisque K l'est. De plus, pour x dans $\mathbf{R}^n$ non nul et α réel, on a, pour tout y dans K,

$$\langle x \,|\, y\rangle - \alpha = \langle x \,|\, y-k\rangle + \langle x \,|\, k\rangle - \alpha = \langle u \,|\, y-k\rangle + \langle x \,|\, k\rangle - \alpha$$

où u est le projeté orthogonal $p_E(x)$ de x sur E. Il en résulte que, si

$$K = \bigcap_{(x,\alpha)\in I} X_{x,\alpha}$$

pour un ensemble fini I de couples formés d'un vecteur de $\mathbf{R}^n$ non nul et d'un réel, alors

$$K' = \bigcap_{(x,\alpha)\in I} X_{p_E(x),\alpha - \langle x \,|\, k\rangle}$$

et donc K' est un polyèdre convexe de E, en tant qu'intersection de demi-espaces (si u est nul, il n'intervient plus dans la définition de K'). Comme E est de dimension $m+1$, on peut l'identifier à $\mathbf{R}^{m+1}$.

Soit k' un point de la frontière de K' dans E, on dispose d'un hyperplan H d'appui de K' contenant k', d'après II.3. Alors $H \cap K'$ est un polyèdre convexe inclus dans H, donc de dimension inférieure à m. Par hypothèse de récurrence k' est combinaison convexe de sommets de $H \cap K'$, et donc de K' d'après II.2). Puisque τ est une translation, les sommets de K' sont les images par τ des sommets de K, et la frontière de K' est l'image de la frontière de K par τ. Il en résulte que tout point de la frontière de K est combinaison convexe de sommets de K. D'après II.4), K est donc $\boxed{\text{l'enveloppe convexe de ses sommets.}}$

PARTIE III - Matrices bistochastiques

1) On identifie $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ à $\mathbf{R}^{n^2}$ qu'on munit de son produit scalaire canonique. On note $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et pour i dans $[\![1;n]\!]$, on pose $L_i = \sum\limits_{j=1}^{n} E_{i,j}$ et $C_i = L_i^{\mathrm{T}}$. Par définition, on a donc, en reprenant les notations de la question II.1,

$$\mathcal{B}_n = \left(\bigcap_{1\leq i,j\leq n} X_{-E_{i,j},0}\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_{L_i,1} \cap X_{-L_i,-1} \cap X_{C_i,1} \cap X_{-C_i,-1})\right)$$

ce qui montre que $\mathcal{B}_n$ est intersection d'un nombre fini de demi-espaces. De plus puisque tous les coefficients d'une matrice bistochastique sont positifs et inférieurs à 1, la somme de leurs carrés est inférieure à n^2 et donc la norme euclidienne d'une matrice bistochastique est inférieure à n, ce qui montre que $\mathcal{B}_n$ est borné et donc que c'est un $\boxed{\text{polyèdre convexe.}}$

Soit A et B deux matrices bistochastiques données par $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. On a

$$A - B = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}(a_{i,j} - b_{i,j})(E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n})$$

puisque les deux membres de part et d'autre de l'égalité ont les mêmes coefficients d'indices (i,j) avec $1 \leq i,j \leq n-1$ par construction, et il en va alors de même pour ceux d'indices (i,n) et (n,j) puisque

$$a_{i,n} - b_{i,n} = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j} - 1 + \sum_{j=1}^{n-1} b_{i,j} = -\sum_{j=1}^{n-1}(a_{i,j} - b_{i,j})$$

et

$$a_{n,j} - b_{n,j} = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,j} - 1 + \sum_{i=1}^{n-1} b_{i,j} = -\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i,j} - b_{i,j})\,,$$

et enfin

$$a_{n,n} - b_{n,n} = -\sum_{j=1}^{n-1}(a_{n,j} - b_{n,j}) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}(a_{i,j} - b_{i,j})\ .$$

Par conséquent $A - B$ est combinaison linéaire de $(n-1)^2$ vecteurs fixés de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, ce qui montre que $\boxed{\mathcal{B}_n \text{ est de dimension au plus } (n-1)^2.}$

Remarque : soit $A = \dfrac{1}{n}\mathbb{1}$ et $B = A + \dfrac{1}{n}(E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n})$, alors A et B sont bistochastique et donc l'espace vectoriel engendré par les différences de matrices bistochastiques est exactement l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n})_{1\leq i,j\leq n-1}$. Cette famille est libre puisque le vecteur $E_{i,j}$ de la base canonique, pour $1 \leq i,j \leq n-1$, n'apparait qu'une fois dans la famille. On en déduit que $\mathcal{B}_n$ est exactement de dimension $(n-1)^2$.

2) On note $F = \mathrm{V}ect\,(A - B)_{(A,B)\in\mathcal{B}_n^2}$. D'après ce qui précède F est un espace vectoriel de dimension $(n-1)^2$. Soit S un sommet de $\mathcal{B}_n$, avec $S = (s_{i,j})$. Soit X donné par

$$X = \left\{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \;\middle|\; s_{i,j} \neq 0\right\}$$

$E = \mathrm{V}ect\,(E_{i,j})_{(i,j)\in X}$ et $\alpha = \min_{(i,j)\in X} s_{i,j}$. Supposons qu'il existe A non nul dans $E \cap F$, alors la somme des coefficients d'une ligne ou d'une colonne de A est nulle puisque $A \in F$. En posant

$A = (a_{i,j})$, soit $\beta = \max_{(i,j)\in X} |a_{i,j}|$. Alors $\beta > 0$ puisque $A \in E$ et A est non nul. Dès lors, pour $t = \pm\dfrac{\alpha}{\beta}$, les coefficients de $S + tA$ sont tous positifs puisque $A \in E$ et, pour (i,j) dans X, $|ta_{i,j}| \leq s_{i,j}$ et donc le signe de $s_{i,j} + ta_{i,j}$ est celui de $s_{i,j}$. Il en résulte que $S + tA$ est bistochastique. Et puisque $S = \dfrac{1}{2}\left((S + \dfrac{\alpha}{\beta}A) + (S - \dfrac{\alpha}{\beta}A)\right)$, ceci contredit le fait que S est un sommet. On en déduit, par la formule de Grassmann, que E est de dimension inférieure ou égale à $2n-1$ et donc que X est de cardinal inférieur à $2n-1$. En particulier on dispose d'une ligne de S ayant au plus un élément non nul et donc exactement un. Autrement dit on dispose d'un couple (i,j) tel que, pour k dans $[\![1;n]\!]$, $s_{i,k} = \delta_{j,k}$.

On raisonne maintenant par récurrence sur n pour montrer que les sommets de $\mathcal{B}_n$ sont tous des matrices de permutation. Pour $n = 1$, $S = I_1$ et donc $\mathcal{B}_1$ est réduit à son unique sommet, qui est une matrice de permutation.

Pour démontrer l'hérédité, on considère un sommet S de $\mathcal{B}_n$. D'après l'étude précédente, S admet un 1 parmi ses coefficients et alors en supprimant la ligne et la colonne de ce coefficient on obtient une matrice bistochastique dans $\mathcal{B}_{n-1}$. Si cette matrice était barycentre non trivial d'éléments de $\mathcal{B}_{n-1}$, on obtiendrait, en rajoutant la ligne et la colonne supprimés et en les remplissant de 0 sauf un 1 à leur intersection, on exhiberait S comme barycentre non trivial d'éléments de $\mathcal{B}_n$. Il en résulte que la matrice obtenue est une matrice de permutation, i.e. ne contient que des 0 et des 1, et donc S aussi.

Réciproquement si S est une matrice de permutation et si A, B sont bistochastiques et t un réel dans $]0;1[$ avec $S = tA + (1-t)B$. En écrivant cette égalité pour un coefficient de S égal à 1, on en déduit que les coefficients correspondants de A et B sont nécessairement égaux à 1. On en déduit que les lignes de A et B sont égales à celles de S, donc $A = B = S$ et S est un sommet. Ainsi $\boxed{\text{les sommets de } \mathcal{B}_n \text{ sont les matrices de permutation.}}$

3) Soit x^1, …, x^m dans $\mathbf{R}^d$ et λ dans $\mathcal{S}_m$. On pose $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$, $X = \{x^1, \dots, x^m\}$ et

$$E = \left\{ n \in \mathbf{N} \;\middle|\; \exists \mu \in \mathcal{S}_n \,, \exists (y^1, \dots, y^n) \in X^n \,,\ x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i y^i \right\} .$$

Puisque $m \in E$ par hypothèse, E est une partie non vide de $\mathbf{N}$ et on peut en prendre le minimum : soit $n = \min(E)$ et $(y^1, \dots, y^n) \in X^n$ et $\mu \in \mathcal{S}_n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i y^i$.

Si $n > d+1$, la famille $(y^1 - y^n, \dots, y^{n-1} - y^n)$ est une famille de cardinal $n-1$ dans un espace de dimension d avec $n - 1 > d$. Elle est donc liée. On dispose alors d'une famille $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ de réels, non tous nuls, tels que $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (y^i - y^n) = 0$ ou encore, en posant $\alpha_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y^i = 0$. Puisque les réels $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ sont non tous nuls, il en va de même pour $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Comme de plus cette dernière famille est de somme nulle par construction, elle contient des réels strictement positifs et des réels strictement négatifs. Soit $I = \{i \in [\![1;n]\!] \mid \alpha_i > 0\}$, $t = \max_{i\in I}\left(-\dfrac{\mu_i}{\alpha_i}\right)$. Comme il s'agit d'un maximum sur un ensemble fini, il est atteint et on dispose de j dans I tel que $t = -\dfrac{\mu_j}{\alpha_j}$. On pose $J = I \setminus \{j\}$ et on considère les familles $(z^i)_{i\in J}$ et $(\nu_i)_{i\in J}$ données par $z^i = y^i$ et $\nu_i = \mu_i + t\alpha_i$. Comme $0 = \mu_j + t\alpha_j$, il vient

$$\sum_{i\in J} \nu_i z^i = \sum_{i\in I} (\mu_i + t\alpha_i) y^i = x + t \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y^i = x \,.$$

De plus si $i \notin I$, alors $\alpha_i \leq 0$ et donc $t\alpha_i \geq 0$ et $\nu_i \geq \mu_i \geq 0$; si $i \in I$ alors, par positivité de α_i, il vient $\nu_i \geq \mu_i + \left(-\dfrac{\mu_i}{\alpha_i}\right)\alpha_i \geq 0$. En prenant une bijection entre J et $[\![1;n-1]\!]$, on aboutit à une contradiction avec la définition de n.

On a donc $n \leq d+1$. On pose $z^i = y^i$ et $\nu_i = \mu_i$ pour $1 \leq i \leq m$ et $z^i = y^n$ et $\nu_i = 0$ pour $i > m$. Alors $\nu \in \mathcal{S}_{d+1}$ puisque ν est à coordonnées positives et de somme égale à celle des coordonnées de μ, et on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{d+1} \nu_i z^i = \sum_{i=1}^{m} \mu_i y^i = x$. $\boxed{\text{L'assertion en résulte.}}$

4) Soit A une matrice bistochastique. D'après III.1) $\mathcal{B}_n$ est un polyèdre convexe et donc A est combinaison convexe de sommets de $\mathcal{B}_n$ d'après II.5), c'est-à-dire de matrices de permutations, d'après III.2). Comme la dimension de ce polyèdre est inférieure à $(n-1)^2$ d'après III.1), la question précédente permet de conclure que

$$\boxed{A \text{ est combinaison convexe d'au plus } (n-1)^2+1 \text{ matrices de permutations.}}$$

PARTIE IV - Orbite d'un vecteur

1) Par hypothèse on a $0 < \varepsilon \leq x_j - x_i$. On en déduit que $x_j - x_i$ est strictement positif et qu'en posant $\lambda = \dfrac{\varepsilon}{x_j - x_i}$ on a $0 < \lambda \leq 1$. On pose alors, avec les notations de la partie précédente, $A_\varepsilon^{i,j} = I_n + \lambda(-E_{i,i} + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{j,j})$. Puisque λ est positif les coefficients de $A_\varepsilon^{i,j}$ sont positifs sauf peut-être ceux d'indices (i,i) et (j,j), et ceux-là le sont car $\lambda \leq 1$. Comme l'identité appartient à $\mathcal{B}_n$ et que la somme des coefficients de chaque ligne et chaque colonne de $-E_{i,i} + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{j,j}$ est nulle, $A_\varepsilon^{i,j}$ est bistochastique.

Par ailleurs

$$A_\varepsilon^{i,j} x = x + \lambda(-x_i e_i + x_j e_i + x_i e_j - x_j e_j) = x + \varepsilon(e_i - e_j) = y$$

et donc $\boxed{A_\varepsilon^{i,j} \in \mathcal{B}_n \text{ et } y = A_\varepsilon^{i,j} x.}$

2) On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Pour i dans $[\![1;n]\!]$, on a $y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$ et donc, par convexité de φ, et puisque A est bistochastique, $\varphi(y_i) \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\varphi(x_j)$. En sommant sur i et puisque A est bistochastique, il vient

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(y_i) \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}\varphi(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j)$$

et donc $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi(y_i) \leq \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j).}$

3) Puisque les fonction Id et $-$Id sont affines donc convexes, l'hypothèse montre qu'on a

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i.}$$

On s'intéresse maintenant, pour $i \in [\![1;n]\!]$, à la fonction $t \mapsto (x_i - t)^+$, i.e. $t \mapsto \max(x_i - t, 0)$. Puisqu'on a affaire à un supremum de fonctions affines, donc convexes, c'est une fonction convexe. Par hypothèse sur x et y il vient

$$\sum_{j=1}^{i}(x_i - x_j) = \sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^+ \geq \sum_{j=1}^{n}(x_i - y_j)^+ \geq \sum_{j=1}^{i}(x_i - y_j)^+ \geq \sum_{j=1}^{i}(x_i - y_j)$$

et donc $\boxed{\displaystyle\sum_{j=1}^{i} x_j \leq \sum_{j=1}^{i} y_j.}$

4) La formulation de cette récurrence est scandaleuse ! Le prédicat est donné, pour n dans $\mathbf{N}^*$ par : pour tout d dans $[\![1;n]\!]$, tous x et y dans $\mathbf{R}^d$ ayant leurs coordonnées croissantes et tels que y domine x, il existe une matrice bistochastique A dans $\mathcal{B}_d$ telle que $y = Ax$.

a) Si $n = 1$, on a $y = x = I_1 x$ et I_1 est bistochastique, donc $\boxed{(P) \text{ est vrai si } n = 1.}$

Si $x_1 = a$ ou $x_n = a$, alors le plus petit ou le plus grand parmi $(x_1, \ldots, x_n)$ est égal à leur moyenne arithmétique et donc $x = ae$. Comme $y_1 \geq x_1$, les réels $(y_1, \ldots, y_n)$ sont tous supérieurs à a, et leur moyenne est a puisque $\langle x \,|\, e\rangle = \langle y \,|\, e\rangle = na$. On a donc aussi $y = ae$ et donc $y = I_n x$. Comme $I_n \in \mathcal{B}_n$, $\boxed{(P) \text{ est vrai si } x_1 = a \text{ ou } x_n = a.}$

b) Soit k un entier comme dans l'énoncé. Alors $y^{(k)}$ domine $x^{(k)}$ et $y^{(n-k)}$ domine $x^{(n-k)}$. Par hypothèse, on dispose de

$\boxed{A_k \text{ dans } \mathcal{B}_k \text{ et } A_{n-k} \text{ dans } \mathcal{B}_{n-k} \text{ tels que } y^{(k)} = A_k x^{(k)} \text{ et } y^{(n-k)} = A_{n-k} x^{(n-k)}.}$

Soit alors A défini par blocs par $A = \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & A_{n-k} \end{pmatrix}$. Par positivité des coefficients de A_k et A_{n-k}, ceux de A le sont aussi. Par construction la somme des coefficients de A sur une ligne ou une colonne sont ceux d'une ligne ou d'une colonne de A_k ou de A_{n-k}, et donc A est bistochastique. Enfin le produit par bloc montre qu'on a $\boxed{A \text{ bistochastique et } y = Ax.}$

c) La définition de i et j est incorrecte. On prend plutôt

$$i = \max\{k \in [\![1;n]\!] \,|\, x_k < a\} \quad \text{et} \quad j = \min\{k \in [\![1;n]\!] \,|\, x_k > a\} \ .$$

La matrice $A_\varepsilon^{i,j}$ n'est pas définie. En effet en IV.1), il est supposé qu'elle est bistochastique, ce qui n'est pas nécessairement le cas ici. On pose donc, comme dans la réponse à IV.1), $A_\varepsilon^{i,j} = I_n + \dfrac{\varepsilon}{x_j - x_i}(-E_{i,i} + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{j,j})$, ce qui est licite puisque $x_i < a < x_j$ et donc $x_j - x_i > 0$. Cette matrice est bistochastique si et seulement si $x_i + \varepsilon \leq x_j$, ce qui est le cas si $\varepsilon \leq \min((a - x_i), (x_j - a))$ puisque $x_i < a < x_j$.

Alors, pour $\varepsilon' > 0$ et en posant $x' = A_{\varepsilon'}^{i,j} x$, on a pour tout m dans $[\![1;n]\!]$

$$\sum_{k=1}^{m} x'_k = \sum_{k=1}^{m} x_k + \varepsilon' \delta_{i \leq m < j}$$

avec $\delta_{i \leq m < j} = 1$ si $i \leq m < j$ et 0 sinon. Il en résulte que y domine x' si et seulement si

$$\varepsilon' \leq \min_{i \leq m < j} \left(\sum_{k=1}^{m} y_k - \sum_{k=1}^{m} x_k \right)$$

et donc ε est égal au membre de droite. On fixe maintenant $\varepsilon' = \varepsilon$. Le minimum étant pris sur un ensemble fini, il est atteint et on dispose de m tel que $i \leq m < j$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} x'_k = \sum_{k=1}^{m} y_k$. De plus on a $x'_1 \leq \cdots \leq x'_n$ si et seulement si $x'_i \leq x'_{i+1}$ et $x'_{j-1} \leq x'_j$, ce qui s'écrit $x_i + \varepsilon \leq a \leq x_j - \varepsilon$ si $i < j+1$ et $x_i + \varepsilon \leq x_j - \varepsilon$ si $j = i+1$. Dans le premier cas l'inégalité est vérifiée si $\varepsilon \leq \min((a - x_i), (x_j - a))$; dans le second cas si $\varepsilon \leq \min((a - x_i), (x_j - a))$, on a $2\varepsilon \leq a - x_i + x_j - a = x_j - x_i$ et donc $x_i + \varepsilon \leq x_j - \varepsilon$. Par conséquent si $\varepsilon \leq \min((a - x_i), (x_j - a))$, alors x' admet des coordonnées croissantes et est dominé par y, et il s'écrit Ax avec A bistochastique d'après IV.1). Par hypothèse y s'écrit Bx' avec B bistochastique et donc $y = (BA)x$. Il résulte de I.3) que BA est bistochastique et donc $\boxed{(P) \text{ est vrai dans ce cas.}}$

d) Dans le cas contraire, on pose $\varepsilon' = \min((a - x_i), (x_j - a))$. Alors x' s'écrit Ax avec A bistochastique d'après IV.1), est dominé par y par définition de ε' et a des coordonnées croissantes également par définition de ε'. De plus on a $x'_i = a$ ou $x'_j = a$ et donc x' possède strictement plus de coordonnées égales à a que x. Si $y = Bx'$ avec B bistochastique, alors $y = BAx$ et, comme précédemment, BA est bistochastique. Il en résulte qu' $\boxed{\text{il suffit de vérifier } (P) \text{ pour } x'.}$

On modifie le prédicat. On note I l'ensemble donné par

$$I = \{(n,k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N} \,|\, 0 \leq k \leq n\} \ ,$$

et on l'ordonne de la façon suivante : $(n,k) \leq (n',k')$ si et seulement si $n < n'$ ou bien ($n = n'$ et $k' \geq k$). Cet ordre permet de construire une bijection de $\mathbf{N}$ sur I de la façon suivante : $f(0) = (1,1)$ et si $f(a) = (n,k)$ alors $f(a+1) = (n,k-1)$ si $k > 0$ et $f(a+1) = (n+1,n+1)$ sinon. On note alors $\mathbf{H}_{n,k}$ le prédicat : pour tout d dans $[\![1;n]\!]$, tous x et y dans $\mathbf{R}^d$ ayant leurs coordonnées croissantes et tels que y domine x et, si $d = n$, x admet au moins k coordonnées égales à la moyenne de ses coordonnées, il existe une matrice bistochastique A dans $\mathcal{B}_b$ telle que $y = Ax$.

On initialise la récurrence avec le couple $(1,1)$, ce qui est la question 4.a). Si $\mathbf{H}_{n,k}$ est vrai pour (n,k) dans I. Si $k = 0$, alors $\mathbf{H}_{n+1,n+1}$ est vrai également d'après la question 4.a). Sinon les questions 4.b), 4.c) et ce qu'on vient de démontrer permettent de démontrer l'hérédité. Le principe de récurrence permet donc de conclure que $\boxed{(P) \text{ est vrai.}}$

5) Soit x et y dans $\mathbf{R}^n$. On dispose de A et B des matrices de permutation telles que Ax et By aient des coordonnées ordonnées dans le sens croissant. On pose $x' = Ax$ et $y' = By$. Même si A et B ne sont pas nécessairement uniques, x' et y' le sont. D'après I.5), A et B son inversibles. De plus si $y = Cx$ avec C bistochastique, alors $y' = BCA^{-1}x'$ et, réciproquement, si $y' = Cx'$ avec C bistochastique, alors $y = B^{-1}CAx$. Par conséquent y s'écrit Ax avec A bistochastique si et seulement si y' s'écrit Ax' avec A bistochastique, i.e. si et seulement si y' domine x', d'après ce qui précède. Or, par construction de x' et y', on a, pour k dans $[\![1;n]\!]$,

$$\min_{I \in \mathcal{I}_k} \sum_{i \in I} x_i = \sum_{i=1}^{k} x'_i \quad \text{et} \quad \min_{I \in \mathcal{I}_k} \sum_{i \in I} y_i = \sum_{i=1}^{k} y'_i$$

et donc y' domine x' si et seulement si, pour tout k dans $[\![1;n]\!]$, $\min_{I \in \mathcal{I}_k} \sum_{i \in I} x_i \leq \min_{I \in \mathcal{I}_k} \sum_{i \in I} y_i$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$. Autrement dit

$$\boxed{y \text{ s'écrit } Ax \text{ avec } A \text{ bistochastique si et seulement si } \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \text{ et, pour } 1 \leq k \leq n,\ \min_{I \in \mathcal{I}_k} \sum_{i \in I} x_i \leq \min_{I \in \mathcal{I}_k} \sum_{i \in I} y_i.}$$